

М. Г. Козлов<sup>1</sup>, А. В. Резниченко<sup>2</sup>, В. С. Фадин<sup>3</sup>Институт ядерной физики СО РАН  
пр. Акад. Лаврентьева, 11, Новосибирск, 630090, РоссияНовосибирский государственный университет  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, РоссияE-mail: <sup>1</sup> M.G.Kozlov@inp.nsk.su;<sup>2</sup> A.V.Reznichenko@inp.nsk.su;<sup>3</sup> Fadin@inp.nsk.su**КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ**\*

Дан краткий и по возможности упрощенный обзор методов и результатов суммирования рядов теории возмущений для процессов при больших энергиях и ограниченных передачах импульса в современной теории сильных взаимодействий – квантовой хромодинамике. Особое внимание уделено подходу ВФКЛ и сравнению его с моделью цветowych диполей.

*Ключевые слова:* уравнение ВФКЛ, дипольная картина, уравнение ВК, эффективное действие.

**Введение**

Квантовая хромодинамика (КХД) считается общепризнанной теорией сильных взаимодействий, хотя ни кинематические свойства экспериментально наблюдаемых сильно-взаимодействующих частиц-адронов, ни их взаимодействие на характерных адронных расстояниях  $r_h \sim 0,2 fm$  (порядка размера нуклона) в рамках КХД описать по существу не удается. В основном успехи КХД связаны с малыми (много меньшими  $r_h$ ) расстояниями и обусловлены ее фундаментальным свойством – асимптотической свободой, т. е. стремлением эффективного заряда к нулю на малых расстояниях.

По современным представлениям адроны – это сложные образования, состоящие из кварков (подразумеваются и антикварки) и глюонов. Кварки и глюоны считаются элементарными частицами; именно они и являются объектами теории. Многообразие наблюдаемых адронов связано с наличием нескольких типов кварков, называемых ароматами или флэйворами. В настоящее время известно шесть ароматов. Но для КХД они отличаются только массой; в лагранжиане КХД кварки разных ароматов входят аддитивно, так что ароматы не связаны с динамикой. Взаимодействие кварков обусловлено в КХД наличием у них «цвета». Дополнительное (по отношению к аромату)

квантовое число было введено в 1965 г. [1; 2; 3; 4], еще до возникновения КХД, для того чтобы согласовать симметрию флэйворной, спиновой и координатной волновой функции барионов с требованием статистики Ферми – Дирака. Впоследствии [5] это число получило название «цвет». Для обеспечения антисимметрии полной волновой функции нужно три различных «цвета» (обычно называют красный, голубой и желтый). Сильными аргументами в пользу существования трех цветов стали результаты экспериментов по измерению сечения  $e^+e^-$  аннигиляции в адроны в области энергий в районе 2 ГэВ и сравнение ширины распада  $\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)$  с теорией, основанной на аномалии в дивергенции аксиально-векторного тока [6; 7]. В теоретические предсказания для этих величин число цветов входит множителем. Для совпадения предсказаний теории с экспериментом этот множитель должен быть равен трем.

Все цвета равноправны, что означает инвариантность лагранжиана КХД относительно унитарных преобразований в цветовом пространстве. Эти преобразования образуют группу  $SU(3_c)$  (индекс внизу обозначает цвет). При этом все наблюдаемые адроны являются «бесцветными или цветовыми синглетами», т. е. их цветовые волновые функции не меняются при преобра-

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и INTAS.

зованиях группы  $SU(3_c)$ . Отсутствие «цветных» физических состояний (по-другому, невылетание цвета, или конфайнмент) получило объяснение (по крайней мере качественное) только в рамках КХД.

КХД – это локальная калибровочная теория поля, описывающая взаимодействие кварков и глюонов. Известным примером калибровочной теории является релятивистская квантовая теория взаимодействия электронов и фотонов – квантовая электродинамика (КЭД). По построению КХД во многом похожа на КЭД, с тем существенным отличием, что группа калибровочных преобразований  $SU(3_c)$ , лежащая в основе КХД, является неабелевой, в отличие от абелевой группы преобразований КЭД. Поэтому вместо одного фотона число переносчиков взаимодействия – глюонов – в КХД равно восьми (по числу параметров группы), и они не являются бесцветными (обладают цветовым зарядом). В результате зависимость эффективного цветового заряда  $g$  (константы связи в КХД) от расстояния кардинально отличается от КЭД, где эффективный заряд убывает с увеличением расстояния в результате его экранировки парами виртуальных заряженных частиц. Вместо этого в КХД эффективный заряд растет с увеличением расстояния, т. е. имеет место антиэкранировка. С уменьшением же расстояния заряд стремится к нулю, что и означает асимптотическую свободу. Это замечательное явление было открыто в работах Гросса, Вильчека [8] и Политцера [9]. Решающую роль в нем играет самодействие глюонов, обеспечивающее антиэкранировку цветового заряда. Для цветовой группы  $SU(N_c)$  и  $n_f$  кварковых ароматов зависимость эффективного заряда от расстояния  $r$  имеет вид

$$\alpha_s(r) \equiv \frac{g^2(r)}{4\pi} \simeq \frac{2\pi}{b \ln(1/r\Lambda_{QCD})},$$

$$b = \frac{11}{3}N_c - \frac{2}{3}n_f > 0, \quad (1)$$

где величина  $\Lambda_{QCD} \sim 300$  МэВ характеризует адронный масштаб. Конечно, формула (1) применима только в области, где эффективный заряд  $\alpha_s(r)$  мал, т. е. при  $r \ll 1/\Lambda_{QCD}$ .

Асимптотическая свобода обеспечивает возможность использования теории возму-

щений в области больших передач импульса  $Q$ , поскольку существенные расстояния  $r \sim 1/Q$ . Поэтому особый интерес для детального теоретического исследования представляют так называемые жесткие процессы, для которых  $Q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$ . В таких процессах важна стадия развития, происходящая на малых расстояниях  $r \sim 1/Q$  (жесткая стадия). На этой стадии рассмотрение ведется в терминах кварковых и глюонных полей, т. е. непосредственно с помощью лагранжиана КХД и построенной на его основе теории возмущений. Применимость теории возмущений обеспечивается малостью эффективного заряда на этой стадии.

Асимптотическая свобода позволила объяснить обнаруженное в 1963 г. в экспериментах по глубоко-неупругому электрон-протонному рассеянию на Стенфордском линейном ускорителе (SLAC) удивительное для того времени явление, получившее название бьёркеновский скейлинг. Было обнаружено, что для виртуального фотона с энергией  $\omega$  в системе покоя протона и виртуальностью («массой»)  $-Q^2$  его полное сечение взаимодействия с протоном, умноженное на  $Q^2$ , является функцией только отношения  $x = Q^2/(2M\omega)$ , где  $M$  – масса протона. Для естественного объяснения этого явления требовалось предположить [10], что составляющие протона (партоны) почти не взаимодействуют на малых расстояниях. В экспериментах по глубоко-неупругому  $e-p$  рассеянию было обнаружено также, что отношение сечений для продольно и поперечно поляризованных фотонов близко к нулю (соотношение Калана – Гросса), что свидетельствовало о том, что заряженные партоны имеют спин  $1/2$ . Успешное теоретическое описание процесса глубоко-неупругого рассеяния положило начало триумфальному становлению КХД как теории сильных взаимодействий.

Однако во всех сильных взаимодействиях всегда присутствует мягкая стадия, на которой происходит формирование адронов. Для этой стадии характерные расстояния  $r \sim r_h \sim 1/\Lambda_{QCD}$ , так что здесь  $\alpha_s \sim 1$ , и она не может быть описана в рамках теории возмущений (является существенно непертурбативной). Рассмотрение этой стадии осложнено еще и нетривиальностью вакуума теории [11; 12].

Поэтому в рамках КХД «из первых принципов» возможно вычисление только полностью инклюзивных величин (таких, как полное сечение однофотонной  $e^+e^-$  аннигиляции в адроны), где детали процесса адронизации не важны (полная вероятность перехода партонов в адроны равна 1). Описание же процессов с характерной виртуальностью  $Q^2$  на жесткой стадии, с адронами в начальном состоянии и с выделенными адронами в конечном состоянии проводится с помощью функций распределения  $f_h^i(x, Q^2)$  партонов (кварков и глюонов) типа  $i$  в адроне  $h$  и функций фрагментации  $\bar{f}_i^h(x, Q^2)$  партона типа  $i$  в адроны  $h$ . Функции распределения (фрагментации) имеют простой физический смысл в системе, где адрон  $h$  (партон  $i$ ) является ультррелятивистским, или в пределе, модуль его импульса  $p = |\vec{p}|$  стремится к бесконечности. Такую систему называют системой бесконечного импульса; при этом импульсы вдоль  $\vec{p}$  называют продольными, а перпендикулярные к  $\vec{p}$  – поперечными. В системе бесконечного импульса  $f_h^i(x, Q^2)dx$  есть число партонов с продольным импульсом от  $xp$  до  $(x+dx)p$  и поперечными импульсами меньше  $Q$  (или с поперечными размерами больше  $1/Q$ ). Аналогично  $\bar{f}_i^h(x, Q^2)dx$  есть число адронов  $h$  с продольным импульсом от  $xp$  до  $(x+dx)p$  и поперечными импульсами меньше  $Q$  (или поперечными размерами больше  $1/Q$ ). Физические наблюдаемые выражаются через партонные функции распределения  $f_h^i(x, Q^2)$ , сечения  $d\sigma_p(s_p, Q^2)$  взаимодействия партонов ( $s_p$  – квадрат полной энергии партонов) и функций фрагментации  $\bar{f}_i^h(x, Q^2)$ . Наиболее прост уже обсуждавшийся случай глубоко-неупругого рассеяния. Здесь сечение выражается через функции распределения заряженных партонов в адроне. Если обозначить  $k$  и  $k'$  импульсы электрона в начальном и конечном состояниях,  $p$  – импульс адрона,  $q = k - k'$ , и ввести переменные

$$x = \frac{Q^2}{2pq}, \quad y = \frac{pq}{pk} = \frac{Q^2}{2xpk}, \quad Q^2 = -q^2,$$

то

$$\frac{d\sigma}{dxdy} = \frac{2\pi\alpha^2}{x^2y^2(pk)} \times \left[ (1-y)F_2(x, Q^2) + \frac{y^2}{2}2xF_1(x, Q^2) \right],$$

причем

$$F_2(x, Q^2) = \sum_i Q_i^2 x f_h^i(x, Q^2),$$

где  $Q_i$  – заряд партона  $i$ , а соотношение Каллана – Гросса есть  $2xF_1 = F_2$ . В отличие от партонных сечений  $d\sigma_p(s_p, Q^2)$ , полностью вычисляемых в теории возмущений, функции распределения и фрагментации содержат информацию о мягкой стадии процесса и поэтому не могут быть найдены по теории возмущений. Однако уравнения для изменения этих функций с  $Q$  (уравнения эволюции) выводятся в теории возмущений, поскольку вид этих уравнений определяется только виртуальностями порядка  $Q^2$ . Они называются уравнениями Докшицера – Грибова – Липатова – Алтарелли – Паризи (DGLAP) [13–15] и имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial \ln Q^2} f_h^i(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_i^j \left( \frac{x}{z} \right) f_h^j(z, Q^2).$$

Ядра уравнений эволюции (функции расщепления)  $P_i^j$  определяют скорость изменения вероятности распределения партонов типа  $i$  за счет испускания партонов типа  $j$  с изменением  $Q^2$ . Они представляются рядами по степеням  $\alpha_s(Q^2)$ . Ведущие (нулевые) члены рядов можно легко вычислить, пользуясь методом эквивалентных фотонов и электронов [16] и его обобщением на глюоны. Начальные условия для уравнений эволюции, т. е. значение партонных плотностей в исходной точке  $Q_0^2$  порядка адронного масштаба, не могут быть найдены теоретически и должны извлекаться из эксперимента. Партонные функции распределения являются универсальными, т. е. не зависят от процесса.

Уравнения DGLAP позволяют суммировать члены, усиленные в каждом порядке теории возмущений степенями «больших логарифмов»  $\ln Q^2$ . Эти логарифмы называют коллинеарными, так как они набираются от области малых углов между импульсами партонов. Наряду с этими

логарифмами как в партонных функциях распределения и фрагментации при малых  $x$ , так и в партонных сечениях при малых значениях отношения  $Q^2/s_p$  (в дальнейшем для простоты будем называть это отношение тоже  $x$ ) имеются логарифмы  $\ln(1/x)$  (они называются «мягкими»), которые набираются от интегрирования по относительным энергиям, или быстрой партонов. В области малых  $x$  эти логарифмы оказываются даже важнее, чем  $\ln Q^2$ , и возникает задача их суммирования.

### Подход BFKL

Наиболее общую основу для теоретического описания процессов с малыми  $x$  дает подход BFKL (Балицкого – Фадина – Кураева – Липатова) [17–19], основанный на замечательном свойстве КХД – реджезации глюона.

Реджезацией элементарной частицы со спином  $j$  и массой  $m$  называется замечательное (и не до конца понятое) явление в квантовой теории поля, состоящее в том, что при больших энергиях  $\sqrt{s}$  сталкивающихся частиц и фиксированных переданных импульсах  $\sqrt{-t}$  амплитуды процессов с обменом этой частицей с учетом радиационных поправок имеют тот же вид, что и в борновском приближении, но со спином, отличным от  $j$  и зависящим от передачи импульса. Впервые это явление было обнаружено в 1964 г. М. Гелл-Манном, М. Л. Голдбергером, Ф. Е. Лоу, Е. Марксом и Ф. Закарайзенем [20] в квантовой электродинамике в процессе комптоновского рассеяния назад (точнее, на углы, близкие к  $\pi$ ). Оно было названо реджезацией, потому что как раз к такому виду амплитуд приводит наличие полюса в комплексной плоскости угловых моментов  $J$ , положение которого  $j(t)$  зависит от передачи импульса  $t$  и который при  $t = m^2$  (т. е. в перекрестном канале) находится в точке  $j$ . Комплексные угловые моменты были введены в квантовой механике итальянским физиком Редже, движущиеся с  $t$  полюса стали называться Реджевскими полюсами, а зависимость  $j(t)$  – траекторией Редже. Теория комплексных угловых моментов была развита В. Н. Грибовым для релятивистских частиц и сыграла выдающуюся роль в физике эле-

ментарных частиц. В 1960-х – начале 1970-х гг. эта теория была основным и почти единственным инструментом теоретического анализа сильных взаимодействий. Из нее выросли модель Венециано и алгебра Вирасоро, струны и суперструны. Реджезация элементарных частиц создает мостик между квантовой теорией поля и теорией комплексных моментов и, по-видимому, указывает на связь реджезующихся частиц со струнами.

Положение  $j(0)$  реджевского полюса при  $t = 0$  принято называть интерсептом, а производную  $j'(0)$  – наклоном траектории. В теории Грибова фундаментальную роль играет реджеон с вакуумными квантовыми числами, положительной сигнатурой (четностью относительно замены  $s \rightarrow -s$ ) и интерсептом, равным (или большим) 1, названный помероном в честь выдающегося советского физика И. Я. Померанчука. Этот реджеон определяет поведение полных сечений при больших энергиях. Первоначально он был введен (с интерсептом 1) [21; 22] для обеспечения постоянных полных сечений при асимптотически больших энергиях. Большой интерес вызывает и другой реджеон, отличающийся от померона  $C$ - и  $P$ -четностью и названный оддероном [23; 24]. Он отвечает за разность сечений рассеяния частицы и античастицы на какой-либо мишени.

Замечательным свойством КХД является то, что в ней реджезуются не только кварки, но и глюоны (в отличие от КЭД, где реджезуется только электрон, фотон же остается элементарным), что чрезвычайно важно для теоретического описания процессов при больших энергиях и фиксированных передачах импульса. В настоящее время реджезация глюона доказана в КХД как в главном логарифмическом приближении (ГЛП), когда суммируются только члены  $(\alpha_s \ln s)^n$  ряда теории возмущений, так и в следующем за ним (СГЛП), когда суммируются и члены  $\alpha_s (\alpha_s \ln s)^n$ .

Идея реджезации глюона возникла в результате вычислений амплитуд неабелевых калибровочных теорий в нескольких первых порядках теории возмущений. Чрезвычайно удобным для анализа этих амплитуд оказался дисперсионный метод вычислений, основанный на унитарности и аналитичности.

Продемонстрируем *дисперсионный метод* на примере вычисления амплитуд в борнов-

ском приближении. В этом приближении амплитуды вычисляются с помощью  $t$ -канальной унитарности [25]. Нас интересуют главные ( $\sim s$ ) вклады в амплитуды, приводящие к сечениям, не падающим с энергией. Такие вклады дает только обмен глюоном в  $t$ -канале. Это легко понять, рассматривая амплитуду с точки зрения  $t$ -канального парциального разложения. Обмен частицей со спином  $j$  дает вклад в него, пропорциональный  $P_j(\cos\theta_t)$ , где  $P_j$  – полином Лежандра, а  $\theta_t$  – угол рассеяния в  $t$ -канале,  $\theta_t \simeq 1 - 2s/t$  (для простоты мы берем рассеяние скалярных частиц с нулевой массой; учет массы и спина не меняет результата). При переходе в  $s$ -канал имеем в реджевской области (большие энергии и ограниченные передачи импульса)  $P_j(\cos\theta_t) \propto (s/t)^j$ . Таким образом,  $t$ -канальные скачки упругих амплитуд  $A_{AB}^{A'B'}(s,t)$  представляются диаграммами (рис. 1). Выходящая линия изображает  $t$ -канальный глюон; пересечение этой линии пунктирной означает вычисление скачка, т. е. замену

$$\frac{1}{t+i0} \rightarrow -2\pi i \delta(t)$$

в его пропагаторе; прямые же линии могут представлять как кварки, так и глюоны. В реджевской области главные по  $s$  члены можно получить с помощью следующей замены числителя  $g^{\mu\nu}$  глюонного пропагатора, соединяющего вершину с импульсами  $p_A, p'_A$  и индексом  $\mu$  с вершиной с импульсами  $p_B, p'_B$  и индексом  $\nu$ :

$$g^{\mu\nu} \rightarrow \frac{2p_B^\mu p_A^\nu}{s},$$

так что

$$2i\mathfrak{Z}_t A_{AB}^{A'B'}(s,t) = -4\pi i s \delta(t) \Gamma_{AA}^c \Gamma_{BB}^c,$$

где  $\mathfrak{Z}_t$  обозначает  $t$ -канальную мнимую часть ( $2i\mathfrak{Z}_t \equiv disc_t$  – скачок в  $t$ -канале). Перенормируемость теории требует падения членов  $\sim s$  с  $t$ , поэтому  $t$ -канальная мнимая часть однозначно определяет амплитуду:

$$A_{AB}^{A'B'}(s,t) = \frac{2s}{t+i0} \Gamma_{AA}^c \Gamma_{BB}^c, \quad (2)$$

где  $\Gamma_{P'P}^c$  – эффективные вершины (как станет ясно из дальнейшего, это вершины

взаимодействия реджезованного глюона с частицами  $P, P'$ ; для краткости мы будем называть их также вершинами рассеяния). В спиральном базисе

$$\Gamma_{P'P}^c = g T_{P'P}^c \delta_{\lambda_P, \lambda_{P'}}, \quad (3)$$

где  $T_{P'P}^c$  – генераторы цветовой группы в соответствующем представлении;  $\lambda$  – спиральности частиц. Подчеркнем, что вершины  $\Gamma_{P'P}^c$  – отнюдь не вершины фейнмановских диаграмм, и что амплитуда (2) представляет совокупность вкладов нескольких фейнмановских диаграмм. Ее можно рассматривать как борновское приближение для амплитуды с обменом реджеоном – реджезованным глюоном (рис. 2). В этом приближении пропагатор реджеона есть просто  $1/t$ .

При дисперсионном подходе невозможно ограничиться вычислением только упругих амплитуд; с ростом порядка теории возмущений требуется знание все большего числа неупругих амплитуд. На первый взгляд задача представляется невообразимо сложной.

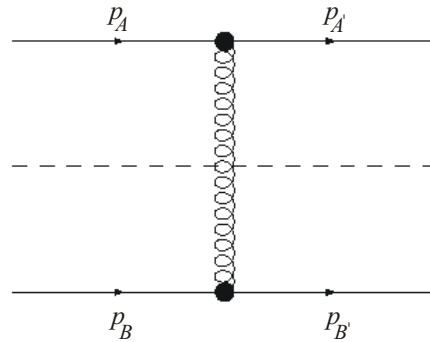


Рис. 1.  $t$ -канальный скачок амплитуды  $A_{AB}^{A'B'}(s,t)$

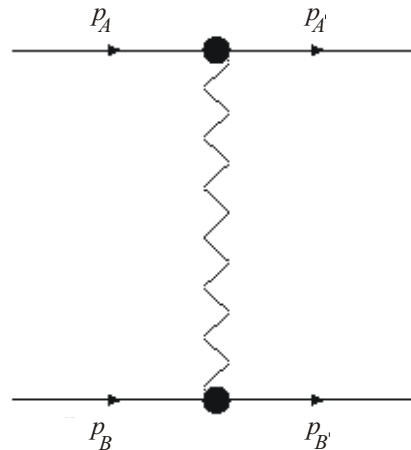


Рис. 2. Амплитуда  $A_{AB}^{A'B'}(s,t)$  с реджеоном в  $t$ -канале

Оказывается, однако, что она чрезвычайно упрощается благодаря двум обстоятельствам.

Во-первых, неупругие амплитуды нужны только в специальной кинематике, которая называется мультиреджевской. В ней частицы имеют ограниченные (не растущие с энергией) поперечные импульсы, а по продольным импульсам они разбиваются на группы (струи) с близкими (одного порядка) импульсами; при этом продольные импульсы струй сильно разнятся при переходе от одной к другой (другими словами, струи сильно упорядочены по быстротам). То, что такая кинематика играет важнейшую роль в сильных взаимодействиях, было осознано К. А. Тер-Мартirosяном еще в 1965 г. [26], задолго до появления КХД. При вычислениях дисперсионным методом большие логарифмы  $\ln s$  возникают при интегрировании по продольным импульсам промежуточных струй в соотношении унитарности. Поэтому в ГЛП каждая струя есть фактически одна частица; в СГЛП в одной из струй может быть две частицы.

Во-вторых, оказывается, что реджезация глюона обеспечивает простую факторизованную форму амплитуд процессов множественного рождения частиц в МРК. Они выражаются через эффективные вершины взаимодействия реджезованного глюона с частицами и реджевскую траекторию глюона, причем вся энергетическая зависимость определяется траекторией.

В ГЛП полный набор реджеонных вершин состоит из вершин рассеяния (3) и вершины рождения глюона, которая появляется при вычислении амплитуд  $2 \rightarrow 3$ . Амплитуды  $A_{AB}^{A'DB'}$  вычисляются по  $t_1$ - и  $t_2$ -канальным скачкам (рис. 3);  $t_i = q_i^2$ ,

$$q_1 = p_A - p_{A'}, \quad q_2 = p_{B'} - p_B.$$

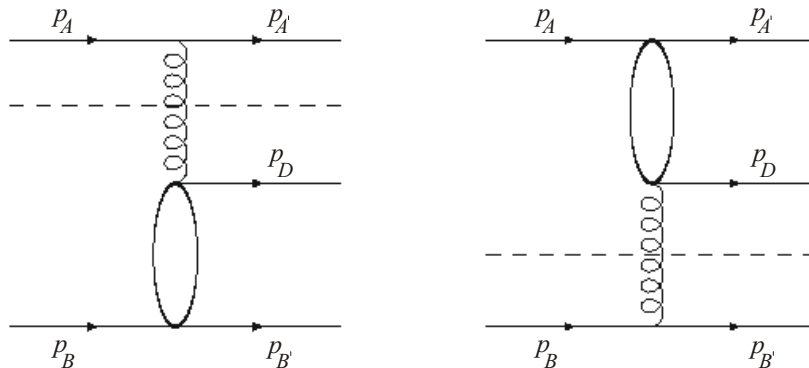


Рис. 3. Схематическое представление  $t_1$ - и  $t_2$ -канальных скачков амплитуды  $A_{AB}^{A'DB'}$

В ГЛП рождаться может только глюон. Скачки в каналах  $t_1$  и  $t_2$  однозначно определяют амплитуду:

$$A_{AB}^{A'DB'} = 2s \Gamma_{A'A}^{c_1} \frac{1}{t_1} \gamma_{c_1 c_2}^d(q_1, q_2) \frac{1}{t_2} \Gamma_{B'B}^{c_2}, \quad (4)$$

где  $\Gamma_{P'P}^c$  – вершины рассеяния, а

$$\gamma_{c_1 c_2}^d(q_1, q_2) = g T_{c_1 c_2}^d e_\mu^*(k) C^\mu(q_2, q_1),$$

$$C^\mu(q_2, q_1) = -q_1^\mu - q_2^\mu + p_A^\mu \left( \frac{q_1^2}{k p_A} + 2 \frac{k p_B}{p_A p_B} \right) - p_B^\mu \left( \frac{q_2^2}{k p_B} + 2 \frac{k p_A}{p_A p_B} \right)$$

есть вершина рождения глюона с импульсом  $k$ , вектором поляризации  $e(k)$  и цветовым индексом  $d$ . Отметим ее нелокальность, проявляющуюся в наличии зависящих от импульсов знаменателей. Подчеркнем опять, что это отнюдь не трехглюонная вершина фейнмановских диаграмм, и что амплитуда (4) представляет совокупность множества фейнмановских диаграмм. Ее можно рассматривать как борновское приближение для амплитуды с реджезованными глюонами в каналах  $t_1$  и  $t_2$  (рис. 4).

Радиационные поправки вычисляются с помощью  $s$ -канальной унитарности. Для упругой амплитуды скачки с двумя и тремя частицами в  $s$ -канале представлены на рис. 5.

Траектория глюона появляется уже при вычислении первой радиационной поправки к упругой амплитуде. Для ее вычисления нужен только двухчастичный скачок. В следующем порядке в двухчастичном скачке (см. рис. 5) одна их упругих амплитуд должна браться уже с учетом первой по-

правки. Результат вычисления согласуется с реджевской формой

$$A_{AB}^{A'B'} = \Gamma_{A'A}^c \left[ \left( \frac{-s}{-t} \right)^{j(t)} - \left( \frac{s}{-t} \right)^{j(t)} \right] \Gamma_{B'B}^c,$$

где  $j(t) = 1 + \omega(t)$  – реджевская траектория глюона,

$$\begin{aligned} \omega(t) &\equiv \omega(\bar{q}) = \frac{g^2 N_c t}{2(2\pi)^{D-1}} \int \frac{d^{D-2} q_1}{\bar{q}_1^2 (\bar{q} - \bar{q}_1)^2} = \\ &= -g^2 \frac{N_c \Gamma(1-\varepsilon) \Gamma^2(\varepsilon)}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(2\varepsilon)} (\bar{q}^2)^\varepsilon. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $D = 4 + 2\varepsilon$  – размерность пространства-времени, взятая отличающейся от 4 для регуляризации инфракрасных расходимостей. Заметим, что расходимость в траектории при  $\varepsilon \rightarrow 0$  аналогична инфракрасной расходимости упругих амплитуд в КЭД. В наблюдаемых физических величинах эти расходимости сокращаются. В (5)  $\bar{q}$  и  $\bar{q}_1$  –  $D-2$ -мерные векторы, ортогональные векторам  $p_A, p_B$ ;  $t = -\bar{q}^2$ .

Для трехпетлевого вычисления упругих амплитуд требуется знание амплитуд  $2 \rightarrow 3$  с учетом первой поправки и  $2 \rightarrow 4$  в борновском приближении. Проведенные вычисления подтвердили реджевскую форму упругих амплитуд и позволили сформулировать гипотезу реджезации для неупругих амплитуд.

Согласно этой гипотезе, амплитуды рождения струй частиц в МРК (рис. 6) имеют вид

$$\begin{aligned} \Re A_{AB}^{J_0^{c_1} \dots J_{n+1}^{c_{n+1}}} &= 2s \Gamma_{J_0 A}^{c_1} \left( \prod_{i=1}^n \gamma_{c_i c_{i+1}}^{J_i}(q_i, q_{i+1}) \left( \frac{s_i}{s_0} \right)^{\omega(t_i)} \frac{1}{t_i} \right) \times \\ &\times \frac{1}{t_{n+1}} \left( \frac{s_{n+1}}{s_0} \right)^{\omega(t_{n+1})} \Gamma_{J_{n+1} B}^{c_{n+1}}, \end{aligned} \quad (6)$$

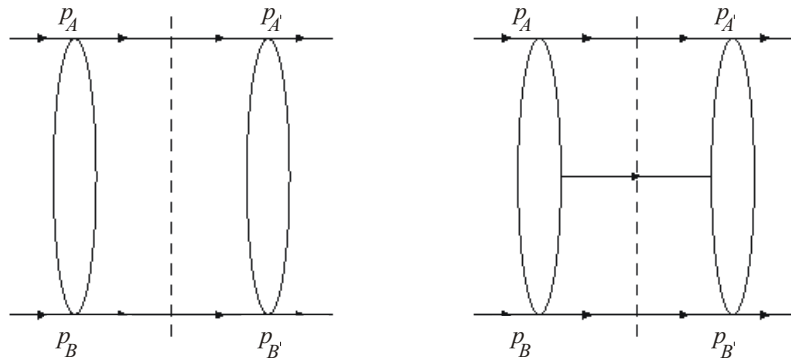


Рис. 5. Схематическое изображение двух- и трехчастичных  $s$ -канальных скачков упругих амплитуд

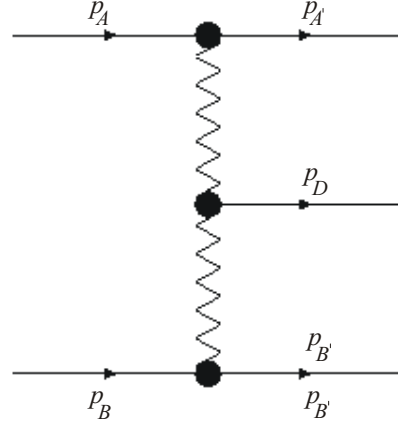


Рис. 4. Амплитуда  $A_{AB}^{A'DB'}$  с реджеонами в  $t_1$ - и  $t_2$ -каналах

где  $t_i = q_i^2$ ,  $s_i = (p_{J_{i-1}} + p_{J_i})^2$ , величина  $s_0$  определяет масштаб энергии. В ГЛП она не играет роли; в СГЛП ее выбор зависит от определения реджеонных вершин; изменение  $s_0$  компенсируется соответствующим изменением вершин. Все реджеонные вершины (см. [27]) и глюонная траектория [28–34] известны в настоящее время в СГЛП. Гипотеза реджезации глюона представляет собой чрезвычайно сильное утверждение: бесконечный набор многочастичных амплитуд выражается через конечное число реджеонных вершин и реджевскую траекторию глюона. К настоящему времени гипотеза реджезации глюона доказана как в ГЛП [35], так и в СГЛП [36]. Доказательство основано на так называемых соотношениях бутстрапа, выражающих условия совместности реджевской формы амплитуды с  $s$ -канальной унитарностью. Соотношения бутстрапа должны выполняться для амплитуд рождения любого числа струй, так что число их бесконечно. Оказывается, однако, что

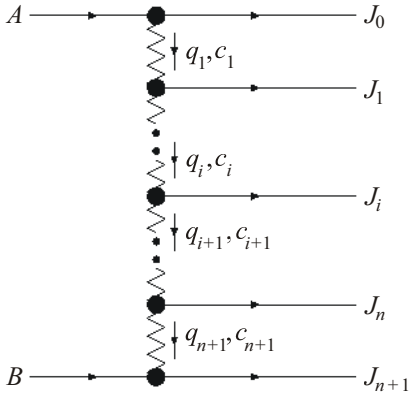


Рис. 6. Схематическое изображение амплитуд  $A+B \rightarrow J_0 + J_1 + \dots + J_n + J_{n+1}$  в МРК

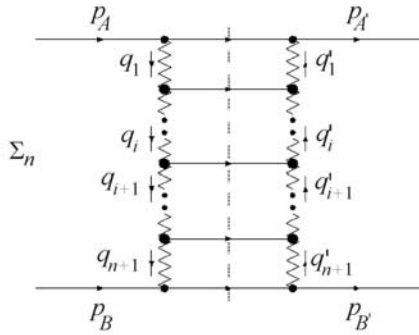


Рис. 7. Схематическое изображение  $s$ -канального скачка упругих амплитуд  $A'AB'$

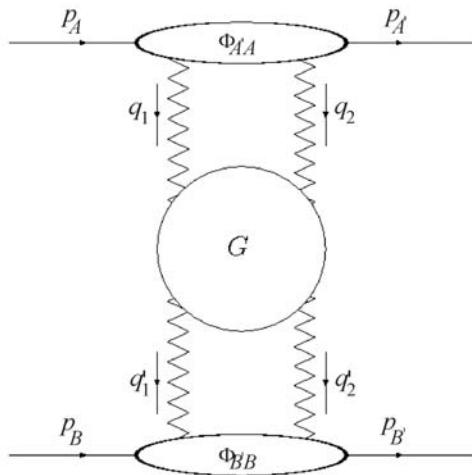


Рис. 8. Схематическое изображение амплитуды упругого рассеяния  $AB \rightarrow A'B'$ :  $G$  – функция Грина,  $\Phi_{A'A}$  и  $\Phi_{B'B}$  – импакт-факторы в импульсном представлении;  $q_i$  и  $q'_i$  – импульсы сталкивающихся реджеонов в  $t$ -канале

все они могут быть удовлетворены, если только выполнено несколько условий бутстрапа, представляющих собой жесткие ограничения на эффективные реджевские вершины и траекторию. К настоящему времени все эти условия проверены, и их выполнение доказано.

*Уравнение BFKL.* Гипотеза реджезации определяет амплитуды процессов с глюонными квантовыми числами в  $t$ -канале. Амплитуды процессов с другими квантовыми числами вычисляются с помощью соотношения унитарности и аналитичности. Для упругих амплитуд  $A'AB'$  со всеми возможными квантовыми числами и любой передачей импульса  $t$  соотношение унитарности позволяет выразить их  $s$ -канальные скачки через сумму произведений амплитуд (6), представленную на рис. 7.

Эти скачки однозначно определяют амплитуды  $A'AB'$ , которые представляются в виде свертки (рис. 8)

$$\Phi_{A'A} \otimes G \otimes \Phi_{B'B},$$

где импакт-факторы  $\Phi_{A'A}$  и  $\Phi_{B'B}$  описывают переходы  $A \rightarrow A'$  и  $B \rightarrow B'$ , а  $G$  – функция Грина двух реджезованных глюонов. Вся зависимость от свойств взаимодействующих частиц заключена в импакт-факторах, а вся энергетическая зависимость в функции Грина.

В операторной форме  $s$ -канальные скачки амплитуд представляются в виде

$$\begin{aligned} \delta(\bar{q}_A - \bar{q}_B) disc_s A'AB' &= \\ &= \frac{i}{4(2\pi)^{D-2}} \langle A'\bar{A} | e^{Y\hat{K}} \frac{1}{\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2} | \bar{B}'B \rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $q_A = p_{A'} - p_A$ ,  $q_B = p_B - p_{B'}$ ,  $\langle A'\bar{A} |$  и  $| \bar{B}'B \rangle$  –  $t$ -канальные состояния, отвечающие импакт-факторам,  $Y = \ln(s/s_0)$ ,  $s_0$  – масштаб энергии, а  $\hat{K}$  – ядро уравнения BFKL. При этом

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}_1, \bar{q}_2 | \bar{B}'B \rangle &= \\ &= 4p_B^- \delta(\bar{q}_B - \bar{q}_1 - \bar{q}_2) \Phi_{B'B}(\bar{q}_1, \bar{q}_2), \\ \langle A'\bar{A} | \bar{q}_1, \bar{q}_2 \rangle &= \\ &= 4p_A^+ \delta(\bar{q}_A - \bar{q}_1 - \bar{q}_2) \Phi_{A'A}(\bar{q}_1, \bar{q}_2), \end{aligned}$$

где импакт-факторы  $\Phi$  выражаются через реджеонные вершины согласно работе [37].



Здесь и в дальнейшем индексы  $\pm$  используются для обозначения так называемых светоконусных компонент:  $p^\pm = (p_0 \pm p_z)/\sqrt{2}$ .

Уравнение BFKL имеет вид

$$\frac{d}{dY} \hat{G} = \hat{K} \hat{G}. \quad (8)$$

Ядро  $\hat{K}$  представляется в виде суммы так называемых «виртуальной» и «реальной» частей:

$$\hat{K} = \hat{\Omega} + \hat{K}_r. \quad (9)$$

«Виртуальная» часть универсальна, т. е. не зависит от представления  $R$  цветовой группы в  $t$ -канале и выражается через траектории двух реджезованных глюонов в  $t$ -канале,

$$\hat{\Omega} = \hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2, \quad (10)$$

причем в импульсном представлении

$$\langle \vec{q}_i | \hat{\omega}_i | \vec{q}_i' \rangle = \delta(\vec{q}_i - \vec{q}_i') \omega(\vec{q}_i), \quad (11)$$

$\omega(\vec{q})$  – глюонная траектория Редже, которая в ГЛП дается формулой (5). В СГЛП траектория была вычислена в работах [28–34]. «Реальная» часть  $\hat{K}_r$  в импульсном представлении записывается в виде

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \hat{K}_r | \vec{q}_1', \vec{q}_2' \rangle &= \delta(\vec{q} - \vec{q}') \frac{1}{\vec{q}_1^2 \vec{q}_2^2} \times \\ &\times K_r(\vec{q}_1, \vec{q}_1'; \vec{q}), \quad \vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_1' = \vec{q}_2 + \vec{q}_2', \end{aligned} \quad (12)$$

где  $K_r(\vec{q}_1, \vec{q}_1'; \vec{q})$  выражается через свертки вершин рождения частиц при взаимодействии реджезованных глюонов согласно работе [37]. В ГЛП возможно только рождение глюона, «реальная» часть представлена на рис. 9. Для представления  $R$  цветовой группы в  $t$ -канале имеем

$$\begin{aligned} K_r^{(R)B}(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{q}) &= \frac{g^2 N_c c_R}{(2\pi)^{D-1}} \times \\ &\times \left( \frac{\vec{q}_1^2 \vec{q}_2^2 + \vec{q}_2^2 \vec{q}_1^2}{(\vec{q}_1 - \vec{q}_1')^2} - \vec{q}^2 \right), \end{aligned} \quad (13)$$

и вся зависимость от цветового представления дается коэффициентом  $c_R$ . Для феноменологических применений наибольшее значение имеет померонный канал, т. е. синглетное представление ( $R=1$ ), для которого  $c_1=1$ . С точки зрения теории не менее

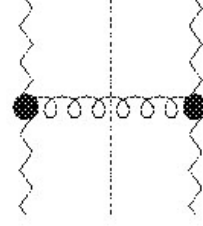


Рис. 9. Одноглюонный вклад в ядро BFKL

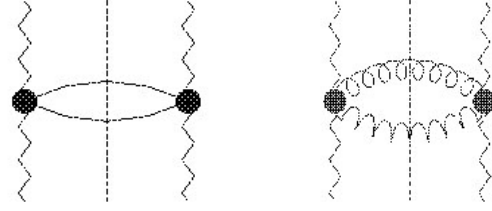


Рис. 10. Двухчастичный вклад в ядро BFKL

важен глюонный канал, т. е. антисимметричный октет ( $R=8_a$ ), для которого  $c_{8_a} = 1/2$ . В КХД первичным реджеоном является реджезованный глюон; померон, определяющий полное сечение рассеяния частицы на какой-либо мишени при высоких энергиях, и оддерон, отвечающий за разность сечений рассеяния частицы и античастицы, являются связанными состояниями двух и трех реджезованных глюонов соответственно.

В СГЛП одна из реджеонных вершин (см. рис. 9) должна быть взята в однопетлевом приближении [38–42]. Кроме рождения одного глюона возможно также рождение кварк-антикварковой пары и двух глюонов. Соответствующие вклады в ядро представлены на рис. 10.

Для рассеяния вперед (т. е. для синглетного представления и передачи импульса равной нулю) эти вклады были вычислены в работах [43; 44]. Ядро для рассеяния вперед играет особую роль, так как оно определяет асимптотику полного сечения. Полностью это ядро было найдено в СГЛП в работах [45; 46].

В главном логарифмическом приближении уравнение BFKL предсказывает степенной рост полных сечений с энергией

$$\sigma_t \propto s^{\omega_p}, \quad (14)$$

где

$$\omega_p^B = 4N_c \frac{\alpha_s}{\pi} \ln 2. \quad (15)$$

Величину  $\omega_p$  обычно называют интерсептом BFKL померона (хотя правильное было бы  $1 + \omega_p$ ). Надо сказать, что уравнение приобрело широкую известность именно благодаря этому предсказанию, после того как рост сечений с энергией был обнаружен в экспериментах по глубоко-неупругому  $e-p$  рассеянию на ускорительном комплексе HERA [47]. В связи с этим подход BFKL ассоциируется с уравнением для «непринтегрированных» функций распределения. Однако подход имеет неизмеримо большую общность. На уровне сечений он применим не только к полным сечениям, но и к эксклюзивным распределениям (неупругие амплитуды, образование струй и т. д.). Он дает также описание процессов не только на уровне сечений, но и на уровне амплитуд, причем как для бесцветных, так и для цветных состояний. Более того, динамика, описываемая этим подходом, наиболее ярко проявляется не в процессах типа глубоко-неупругого рассеяния, т. е. процессов с двумя разными масштабами виртуальностей, где она затемняется эволюцией партонных функций распределения по виртуальности, а в процессах с одним масштабом, таких как  $\gamma^* - \gamma^*$  рассеяние с виртуальностями фотонов одного порядка, в которых эволюция DGLAP отсутствует.

Главное логарифмическое приближение может служить только для качественных предсказаний, так как в нем не фиксирован ни масштаб энергий, ни масштаб виртуальности для бегущей константы связи  $\alpha_s$ . Как и в любой приближенной теории, только знание поправок к главному приближению позволяет понять область применимости теории и получить количественные предсказания. Поэтому вычисление поправок к ГЛП представлялось крайне важным.

Наибольший интерес вызвала поправка к  $\omega_p$ , интерсепту BFKL померона (15). Как и все радиационные поправки, она зависит от схемы перенормировки и выбора масштаба виртуальности для  $\alpha_s$  в главном приближении. Поправка к интерсепту, вычисленная в [45; 46] в  $\overline{MS}$  схеме перенормировки при «естественном» выборе масштаба виртуальности, оказалась обескураживающе большой. Если записать

$$\omega_p = \omega_p^B \left( 1 - r \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \right),$$

то оказывается, что

$$r \approx 6,46 + 0,05 \frac{n_f}{N_c} + 0,96 \frac{n_f}{N_c^3},$$

где  $n_f$  – число кварковых ароматов;  $N_c$  – число цветов. Правда, если выразить поправку через интерсепт в ГЛП,

$$\omega_p = \omega_p^B (1 - \tilde{r} \omega_p^B),$$

то коэффициент  $\tilde{r} \approx 2,4$  уже не так пугающе велик. Тем не менее возможность применения полученных результатов в кинематической области комплекса HERA казалась сомнительной.

В настоящее время развит ряд методов, позволяющих использовать результаты СГЛП для описания экспериментальных данных. В работах [48; 49] было показано, что использование неабелевских физических схем перенормировки и рецепта Бродского – Лепаж – Маккензи [50] для определения аргумента константы связи сильно уменьшает относительную величину радиационных поправок, и продемонстрировано, что полученные таким образом предсказания СГЛП находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными для полного сечения взаимодействия двух глубоко виртуальных фотонов  $\sigma_{\gamma^* \gamma^*}$  с детекторов OPAL и L3 на коллайдере LEP2 в ЦЕРНе. В работах [51–53] было показано, что большие поправки связаны со вкладом, которые можно суммировать с помощью ренормгруппы, и был развит метод суммирования. Аналогичные идеи, только имеющие отправной точкой уравнения DGLAP, были развиты в работах [54–56].

В настоящее время ядро BFKL известно в СГЛП не только для рассеяния вперед, но и для произвольных передач импульса и для всех возможных представлений цветовой группы в  $t$ -канале [57–59], что значительно расширяет круг возможных применений. Кроме того, в области больших передач импульса снимается так называемая проблема диффузии в инфракрасную область. Суть проблемы состоит в следующем.

Для применимости теории возмущений нужна малость константы связи. Она может обеспечиваться, только если существенные (т. е. дающие основной вклад в амплитуду процесса) виртуальности (или поперечные импульсы) внутренних линий на диаграммах Фейнмана велики. Когда мы вычисляем

вклад в амплитуду диаграмм нижних порядков, виртуальности внутренних линий «привязаны» к виртуальностям или массам внешних линий, и большая величина первых обеспечивается соответствующей величиной вторых. Но с ростом энергии становятся более важными процессы с рождением все большего числа частиц (все большее число «перекладин» в «померонной лестнице»). Но чем дальше по энергии (или быстроте) находится рожденная частица от начальных частиц, тем меньше она чувствует их виртуальность. Область существенных поперечных импульсов  $k_{\perp}$  расширяется (идет диффузия). При фиксированной константе связи она расширяется как в сторону больших  $k_{\perp}$ , так и в сторону малых. Уход в сторону малых  $k_{\perp}$  означает нарушение применимости теории возмущений. Учет роста константы связи в области малых  $k_{\perp}$  делает диффузию в область малых  $k_{\perp}$  еще более быстрой.

При отличной от нуля передаче импульса  $t$  существенные  $k_{\perp}$  могут уменьшаться только до  $k_{\perp} \sim \sqrt{-t}$ , так что проблема диффузии в инфракрасную область снимается при больших передачах уже в главном логарифмическом приближении. Что касается рассеяния вперед, то диффузия замедляется при учете суммированных с помощью ренормгруппы поправок [53].

Гораздо более очевидной, чем проблема диффузии, является так называемая проблема унитаризации. Степенной рост полных сечений с энергией (15) в асимптотике противоречит основанной на унитарности и аналитичности теореме Фруассара, согласно которой

$$\sigma_i(s) \leq \sigma_0 \ln^2 s.$$

Другими словами, BFKL померон нарушает унитарный предел. Конечно, в ограни-

ченной области энергий сечения могут расти с энергией степенным образом, что и наблюдается в эксперименте не только для  $\gamma^* p$  взаимодействия, но и для адронных взаимодействий. Однако где-то степенной рост должен прекращаться. При этом ясно, что вычисление радиационных поправок любого конечного порядка к ГЛП не может прекратить этот рост. Для решения проблемы унитаризации требуются другие методы.

В принципе проблема унитаризации не нова. Она интенсивно обсуждалась в рамках реджеонной теории [60]. Существуют и различные методы ее решения, начиная от простейшего – суммирования много-померонных обменов (т. е., если представлять BFKL померон «лестницей» – рис. 11, а, то суммированием вкладов диаграмм с любым числом лестниц в  $t$ -канале) в эйкональном приближении. Более последовательное рассмотрение требует суммирования всех диаграмм с вершинами, представленными на рис. 11.

Определенные шаги в этом направлении сделаны: найдена трехпомеронная вершина (рис. 11, б) и изучены ее свойства [61; 62–64]. Однако не представляется очевидным, что этот путь приведет к правильному решению проблемы. Все-таки КХД – это теория взаимодействия цветных объектов. Как уже говорилось, первичным в КХД является реджезованный глюон, и именно с ним, а не с помероном, следует работать. На этом пути получено уравнение для состояний с несколькими реджезованными глюонами в  $t$ -канале [65; 66; 67] и доказана его интегрируемость в пределе большого числа цветов [68]. Наиболее общий подход к решению проблемы состоит в переформулировке КХД при высоких энергиях в терминах калибровочно-инвариантной эффективной теории поля для взаимодействия реджезованных глюонов [69].

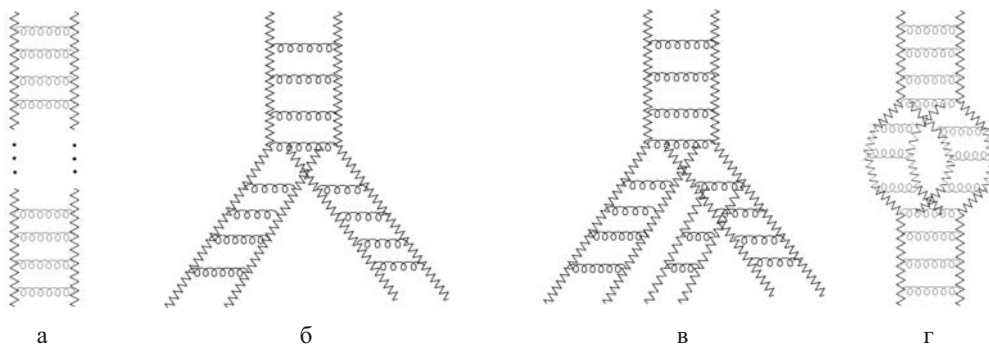


Рис. 11. BFKL померон: а – померонная лестница; б – трехпомеронная вершина; в – всерная диаграмма (расщепление померонных каскадов); г – померонная петля (слияние померонных каскадов)

### Модель цветовых диполей

Другой подход к физике малых  $x$  основан на модели цветовых диполей Николаева – Захарова – Мюллера [70; 71]. В отличие от подхода BFKL он формулируется не в пространстве поперечных импульсов, а в пространстве прицельных параметров. Сечение глубоко неупругого рассеяния в этом подходе выражается через сечение взаимодействия цветового диполя с мишенью, для которого пишется уравнение эволюции по  $x$ . Ядро этого уравнения мы будем называть дипольным ядром. В главном логарифмическом приближении это ядро совпадает со специальной формой ядра BFKL в координатном представлении. В отличие от BFKL в следующем приближении дипольное ядро до сих пор не найдено.

*Дипольная картина Николаева – Захарова – Мюллера.* Теоретическая интерпретация одной и той же физики может меняться при переходе в различные системы отсчета. Система бесконечного импульса адрона-мишени оказалась удобной для описания глубоко-неупругого рассеяния в терминах функций распределения партонов (кварков и глюонов) в адроне.

Виртуальный гамма-квант взаимодействует с кварками в адроне. Согласно уравнениям эволюции DGLAP, при малых  $x$  в адроне преобладают глюоны, так как в процессе расщепления любого партона вероятность их рождения  $\propto dz/z$ , где  $z$  – доля продольного импульса, уносимая глюоном. Поэтому кварк, с которым взаимодействует фотон, с подавляющей вероятностью является образованным одним из глюонов (такие кварки называются «морскими»), а не имеющимся в адроне на начальном этапе эволюции (их называют «валентными»). Оказывается удобным отделить процесс взаимодействия виртуального гамма-кванта с кварком от квантовой эволюции (являющейся BFKL эволюцией), включающей преимущественно излучение глюонов. Это может быть достигнуто путем перехода в систему, где виртуальный гамма-квант имеет большой импульс  $p_{\gamma^*}$  и энергию  $q_0 = \sqrt{p_{\gamma^*}^2 - Q^2} \approx p_{\gamma^*} - Q^2/2p_{\gamma^*}$ . В этой системе гамма-квант рождает кварк-антикварковую пару  $q\bar{q}$  в цветовом синглете, которая в дальнейшем и взаимодействует с адроном-мишенью. Рождение пары происходит на больших (много больших, чем

размер мишени) расстояниях до мишени. Действительно, по соотношению неопределенности, время жизни  $q\bar{q}$  пары

$$\tau \sim \frac{1}{|q_0 - \varepsilon_q - \varepsilon_{\bar{q}}|} \approx \frac{2z(1-z)p_{\gamma^*}}{z(1-z)Q^2 + \vec{p}_\perp^2} \sim \frac{p_{\gamma^*}}{Q^2} \sim \frac{1}{x\varepsilon_h} \gg R_h,$$

где  $\vec{p}_\perp$  – поперечная, а  $zp_{\gamma^*}$  – продольная компоненты импульса рожденного кварка;  $\varepsilon_h$  и  $R_h \sim (1/M_h)(M_h/\varepsilon_h)$  – энергия и размер адрона в этой системе. Поэтому сечение взаимодействия виртуального гамма-кванта  $\gamma^*$  с мишенью представляется в факторизованной форме:

$$\sigma_{\gamma^*}(Y, Q^2) = \int d^2\rho \int_0^1 dz |\Psi_{\gamma^*}(z, \vec{\rho})|^2 \sigma_{dp}(\rho, Y),$$

где  $Y = \ln 1/x$ ,  $\rho = |\vec{x}_{01}|$ ,  $\vec{x}_{01} = \vec{x}_0 - \vec{x}_1$ ,  $\vec{x}_0$  и  $\vec{x}_1$  – поперечные координаты кварка и антикварка;  $\Psi_{\gamma^*}(z, \vec{\rho})$  – амплитуда вероятности найти в виртуальном фотоне в системе его бесконечного импульса «цветовой диполь»  $q\bar{q}$ ;  $\sigma_{dp}(\rho, Y)$  – полное сечение взаимодействия этого диполя с мишенью.

Амплитуда  $\Psi_{\gamma^*}(z, \vec{\rho})$  связана фурье-преобразованием

$$\Psi_{\gamma^*}(z, \vec{\rho}) = \int \frac{d^2\vec{P}}{2\pi} e^{i\vec{P}\vec{\rho}} \Psi_{\gamma^*}(z, \vec{P}),$$

с амплитудой  $\Psi_{\gamma^*}(z, \vec{P})$  в импульсном представлении, которая дается матричным элементом оператора эволюции  $\hat{U}(-\infty, 0)$ , т. е. содержит энергетический знаменатель вместо  $\delta$ -функции, выражающей закон сохранения в  $S$ -матрице:

$$\Psi_{\gamma^*}(z, \vec{P}) = \frac{e Q_q}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \times \sqrt{\frac{z(1-z)}{2}} \frac{\bar{u}(z, \vec{P}) \not{\epsilon}_{\gamma^*} v(1-z, -\vec{P})}{\vec{P}^2 + z(1-z)Q^2},$$

$u(z, \vec{P})$  и  $v(1-z, -\vec{P})$  – дираковские спиноры для кварка и антикварка;  $e_{\gamma^*}$  – вектор поляризации гамма-кванта. Используя оптическую теорему, полное сечение  $\sigma_{dp}(\rho, Y)$  взаимодействия диполя с мишенью можно

выразить через мнимую часть амплитуды рассеяния вперед диполя на мишени:

$$\sigma_{dp}(\rho, Y) = 2 \int d^2 b N(\vec{x}_0, \vec{b}, Y), \quad (16)$$

где интегрирование ведется по всем прицельным параметрам диполя  $\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{x}_0 + \vec{x}_1)$ .

Уравнение эволюции в дипольной картине. Вывод уравнения эволюции по  $x$  [72] основан на двухглюонной природе взаимодействия с мишенью (рис. 12). В первом приближении  $\sigma_{dp}(\rho, Y)$  представляется сечением упругого рассеяния  $\sigma_0(\rho)$  цветового диполя  $q\bar{q}$  на мишени. В следующем рождается дополнительный глюон, при этом система  $q\bar{q}g$  находится в синглете по цвету. При двухглюонном взаимодействии сечение рассеяния  $q\bar{q}g$  состояния можно записать через сечение  $\sigma_0$

$$\sigma_3(r, \rho_1, \rho_2) = \frac{9}{8}(\sigma_0(\rho_1) + \sigma_0(\rho_2)) - \frac{1}{8}\sigma_0(r),$$

где  $\rho_{1,2}$  – расстояния между кварком (антикварком) и глюоном,  $\vec{r} = \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2$ . Коэффициенты перед  $\sigma_0(\rho_1)$ ,  $\sigma_0(\rho_2)$  и  $\sigma_0(r)$  в этой формуле определяются цветовой алгеброй. Их легко найти с учетом того, что  $\sigma_0(\rho) = 0$  (диполь нулевого размера не взаимодействует) из следующих простых соображений. Коэффициенты перед  $\sigma_0(\rho_1)$  и  $\sigma_0(\rho_2)$ , очевидно, должны быть одинаковыми. При  $r \rightarrow 0$  (кварк-антикварковая пара неотличима от глюона) отношение  $\sigma_3(0, \rho, \rho)$  к  $\sigma_0(\rho)$  должно быть равно отношению ок-

тетной и триплетной констант связи  $C_A/C_F = 9/4$  при  $N_c = 3$ . Когда же  $\rho_1 = 0$ , то глюон вместе с кварком неотличимы от одного кварка, и  $\sigma_3(r, 0, r) = \sigma_3(r, r, 0) = \sigma_0(r)$ .

Разница сечений рассеяния  $q\bar{q}g$  и  $q\bar{q}$  состояний:

$$\Delta\sigma(r, \rho_1, \rho_2) = \sigma_3(r, \rho_1, \rho_2) - \sigma_0(r) = \frac{9}{8}(\sigma_0(\rho_1) + \sigma_0(\rho_2)) - \sigma_0(r). \quad (17)$$

Если  $\Psi^{(1)}(\vec{r}, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, z, z_g)$  – волновая функция  $q\bar{q}g$  состояния в координатном представлении ( $z_g$  – доля импульса, уносимая глюоном), то число глюонов записывается как

$$n_g = \int dz_g d^2 \rho_1 dz d^2 r |\Psi^{(1)}(\vec{r}, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, z, z_g)|^2.$$

Легко получить (см. ниже), что

$$|\Psi^{(1)}(\vec{r}, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, z, z_g)|^2 = \frac{\alpha_s}{z_g} \frac{4}{3\pi^2} |\Psi^{(0)}(z, \vec{r})|^2 \left( \frac{\vec{\rho}_1}{\rho_1^2} - \frac{\vec{\rho}_2}{\rho_2^2} \right)^2, \quad (18)$$

где  $\Psi^{(0)}(z, r)$  – волновая функция  $q\bar{q}$  диполя. Увеличение сечения за счет  $q\bar{q}g$  состояния

$$\Delta\sigma_{tot}(q\bar{q}g, x, Q^2) = \int dz d^2 r dz_g d^2 \rho_1 \times |\Psi^{(1)}(\vec{r}, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, z, z_g)|^2 \Delta\sigma(r, \rho_1, \rho_2),$$

откуда с учетом (18) получаем:

$$\Delta\sigma_{dp}(r, Y) = \int dz_g d^2 \rho_1 \frac{\alpha_s}{z_g} \frac{4}{3\pi^2} \left( \frac{\vec{\rho}_1}{\rho_1^2} - \frac{\vec{\rho}_2}{\rho_2^2} \right)^2 \times \Delta\sigma(r, \rho_1, \rho_2).$$

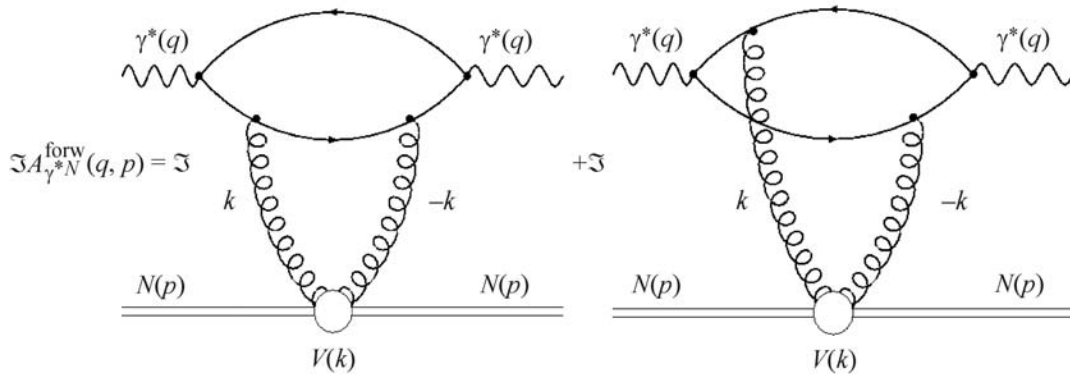


Рис. 12. Мнимая часть амплитуды рассеяния диполя на ядре  $N$

Используя (17), переходя к прицельным параметрам кварка, антикварка и глюона  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  и  $\vec{\rho}$ , так что  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ,  $\vec{\rho}_1 = \vec{r}_1 - \vec{\rho}$ ,  $\vec{\rho}_2 = \vec{r}_2 - \vec{\rho}$ , и учитывая, что интегрирование по  $z_g$  дает  $Y$ , последнее выражение можно представить в виде

$$\Delta\sigma_{dp}(r, Y) = Y \left[ \hat{K}_{dip} \sigma_0 \right](r), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \left[ \hat{K}_{dip} \sigma_0 \right](r) &= \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int d^2\rho \frac{\vec{r}^2}{(\vec{r}_1 - \vec{\rho})^2 (\vec{r}_2 - \vec{\rho})^2} \times \\ &\times (\sigma_0(|\vec{r}_1 - \vec{\rho}|) + \sigma_0(|\vec{r}_2 - \vec{\rho}|) - \sigma_0(r)) \end{aligned} \quad (20)$$

при  $N_c = 3$ .

В более высоких порядках теории возмущений нужно учитывать состояния с произвольным числом глюонов. Основной вклад в ГЛП будут давать глюоны, упорядоченные по продольным импульсам:

$$x \ll z_n \ll \dots \ll z_1 \ll z \ll 1.$$

Отсюда, имея в виду вклад (19) в сечение от излучения дополнительного глюона, можно написать уравнение эволюции по быстроте для дипольного сечения:

$$\frac{\partial \sigma_{dp}(r, Y)}{\partial Y} = \hat{K}_{dip} \sigma_{dp}(r, Y), \quad (21)$$

где  $\hat{K}_{dip}$  представляет дипольное ядро, определенное в (20).

*Производящий функционал для цветowych диполей.* В работе Мюллера [71] вывод дипольного уравнения эволюции основан на анализе волновой функции связанного состояния тяжелой кварк-антикварковой пары («ониума») в системе бесконечного импуль-

са этой пары. Пара бралась тяжелой для обеспечения применимости теории возмущений. Мы будем вместо «ониума» говорить о виртуальном фотоне  $\gamma^*$ . В пределе большого числа цветов для вероятностей найти в виртуальном фотоне кварк-антикварковую пару и произвольное число глюонов с малыми и сильно упорядоченными долями продольных импульсов в представлении прицельных параметров была получена факторизованная форма. Предел большого числа цветов  $N_c \rightarrow \infty$  нужен для того, чтобы каждый из излученных глюонов мог быть представлен в виде кварк-антикварковой пары.

Начнем с древесного (борновского) приближения. Пусть  $\Phi^{(0)}(\vec{x}_1, z_1) = \sum_{\alpha\beta} |\Psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\vec{x}_1, z_1)|^2$  – вероятность найти кварк-антикварковую пару (рис. 13, в);  $z_1$  – доля продольного импульса фотона  $\gamma^*$ , уносимая антикварком диполя, а  $\vec{x}_1$  – поперечная координата этого антикварка (поперечная координата кварка считается равной нулю). В импульсном представлении для амплитуды вероятности найти пару и глюон с долей продольного импульса  $z_2 \ll z_1, z_2 \ll 1 - z_1$  имеем (рис. 13, а, б)

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha\beta}^{(1)a}(\vec{k}_1, \vec{k}_2; z_1, z_2) &= -2gt^a \left[ \Psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\vec{k}_1, z_1) - \right. \\ &\left. - \Psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2, z_1) \right] \frac{\vec{k}_2 \cdot \vec{\epsilon}_2^\lambda}{k_2^2} \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\vec{k}_1$  и  $\vec{k}_2$  – поперечные импульсы антикварка и глюона;  $\vec{\epsilon}_2^\lambda$  – физический вектор поляризации глюона. Заметим, что поперечный импульс глюона не предполагается малым (в соответствии с BFKL подходом).

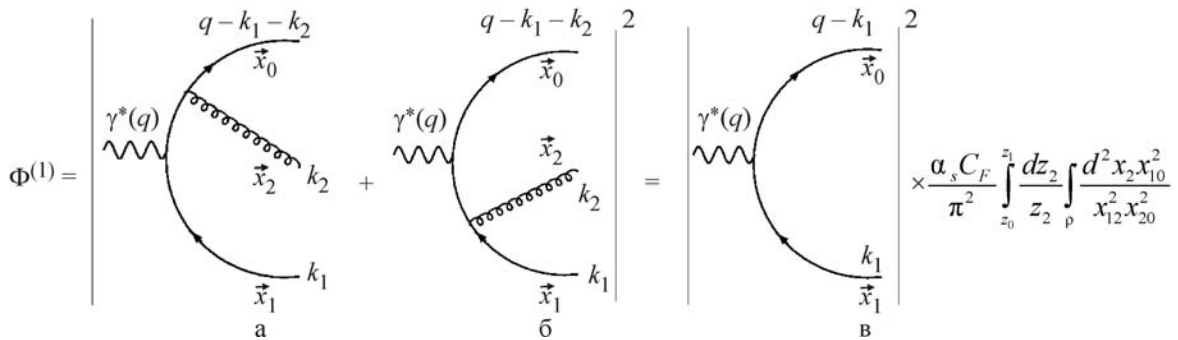


Рис. 13. Одноглюонное излучение кварком и антикварком диполя (а, б) факторизуется в борновскую часть (в) и фактор излучения. Здесь рассматривается квадрированный матричный элемент оператора эволюции  $\hat{U}(-\infty, 0)$

Квадрат величины  $\Psi_{\alpha\beta}^{(1)a}(\vec{k}_1, \vec{k}_2; z_1, z_2)$ , проинтегрированный по фазовому объему глюона, дает

$$\Phi^{(1)}(\vec{k}_1, z_1) = \int \frac{d^2 k_2}{(2\pi)^3} \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz_2}{2z_2} \times \\ \times \sum_{\alpha, \beta} |\Psi_{\alpha\beta}^{(1)a}(\vec{k}_1, \vec{k}_2; z_1, z_2)|^2.$$

Интегрирование по продольной координате  $z_2$  производится с логарифмической точностью от параметра коллинеарного обреза  $z_0$  до  $z_1$ . Интегрирование по  $k_2$  содержит ультрафиолетовую расходимость, для которой ниже вводится параметр обреза в координатном представлении.

Легко проверить, что в координатном представлении амплитуда (22) приобретает факторизованный вид:

$$\Psi_{\alpha\beta}^{(1)a}(\vec{x}_1, \vec{x}_2; z_1, z_2) = \\ = -\frac{igt^a}{\pi} \Psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\vec{x}_1, z_1) \left( \frac{\vec{x}_{20}}{x_{20}^2} - \frac{\vec{x}_{21}}{x_{21}^2} \right) \cdot \vec{\epsilon}_2^\lambda \quad (23)$$

Соответственно после квадрирования (23) в координатном представлении получаем факторизованный вид вероятности

$$\Phi^{(1)}(\vec{x}_1, z_1) = \int \frac{d^2 x_2}{(2\pi)^3} \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz_2}{2z_2} \times \\ \times \sum_{\alpha, \beta, \lambda, a} |\Psi_{\alpha\beta}^{(1)a}(\vec{x}_1, \vec{x}_2; z_1, z_2)|^2 = \\ = \Phi^{(0)}(\vec{x}_1, z_1) \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz_2}{2z_2} \int_{\rho} d^2 x_2 \frac{\alpha_s C_F}{\pi^2} \frac{x_{10}^2}{x_{20}^2 x_{21}^2}; \\ C_F \equiv \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \approx \frac{N_c}{2}; x_{ij} = \vec{x}_i - \vec{x}_j.$$

Перейдем к вероятности найти кварк-антикварковую пару и два глюона. Напомним, что в ГЛП глюоны должны быть сильно упорядочены по скорости, так что каждый следующий глюон имеет долю продольного импульса много меньшую, чем предыдущий. Предел  $N_c \rightarrow \infty$  позволяет сделать одинаковым цветовой коэффициент от различных присоединений линии дополнительного глюона, поскольку в этом пределе только планарные диаграммы дают вклад в вероятность. Поэтому следующий глюон, например глюон с импульсом  $k_3$ , при рассмотрении величины  $\Phi^{(2)}(\vec{x}_1, z_1) \sim \sum_{a, b, \alpha, \beta} |\Psi_{\alpha\beta}^{(2)a, b}|^2$ , будучи при-

соединенным к кварковой линии исходного диполя или к антикварковой линии глюона  $k_2$  в диаграмме для  $\Psi^{(2)}$ , должен в диаграмме для  $\Psi^{(2)*}$  быть присоединенным к этим же линиям. При сильном упорядочении по быстротам такое присоединение даст множитель

$$dw_{02}^3 = \frac{\alpha_s C_F}{\pi^2} \frac{x_{20}^2 d^2 x_3 dz_3}{x_{30}^2 x_{32}^2 z_3}.$$

Аналогично присоединение линии глюона с импульсом  $k_3$  к антикварковой линии исходного диполя или к кварковой линии глюона  $k_2$  даст множитель  $dw_{12}^3$ . В результате

$$\Phi^{(2)}(\vec{x}_1, z_1) = \Phi^{(0)}(\vec{x}_1, z_1) \left( \frac{4\alpha C_F}{\pi} \right)^2 \times \\ \times \frac{\ln^2(z_1/z_0)}{2} \int \frac{x_{01}^2 d^2 x_2}{x_{20}^2 x_{21}^2} \left[ \int \frac{x_{20}^2 d^2 x_3}{x_{30}^2 x_{32}^2} + \int \frac{x_{21}^2 d^2 x_3}{x_{32}^2 x_{31}^2} \right],$$

где квадрат большого логарифма возник от интегрирования по продольным импульсам.

Переход к вероятности найти диполь и  $n$  глюонов может быть сделан с помощью формализма производящего функционала. Роль этого функционала заключается в рекурсивном воспроизведении диаграммной процедуры перехода от  $n-1$  глюона к  $n$  глюонам, когда  $n$ -й глюон дает множитель  $dw_{ij}^n$ , прицепляясь между кварком  $i$ -го глюона (при  $i=0$  это исходный кварк) и антикварком  $j$ -го глюона (при  $j=1$  это исходный антикварк). Это позволяет [71] получить для непроинтегрированной вероятности  $\phi^{(n)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n+1}; z_1, z_2, \dots, z_{n+1})$  – т. е. вероятности нахождения в диполе кроме кварка и антикварка  $n$  глюонов с поперечными координатами  $\vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n+1}$  и продольными импульсами  $z_2 \gg z_3 \gg \dots \gg z_{n+1}$  – следующее выражение:

$$\phi^{(n)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n+1}; z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) = \\ = \Phi^{(0)}(\vec{x}_1, z_1) \left( \frac{\delta}{\delta u(\vec{x}_2, z_2)} \frac{\delta}{\delta u(\vec{x}_3, z_3)} \dots \right. \\ \left. \dots \frac{\delta}{\delta u(\vec{x}_{n+1}, z_{n+1})} Z^{(0)}(\vec{x}_1, \vec{x}_0, z_1, u) \right) \Bigg|_{u=0}, \quad (24)$$

где производящий функционал  $Z^{(0)}(\vec{x}_1, \vec{x}_0, z_1, u)$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{aligned}
Z^{(0)}(\vec{x}_1, \vec{x}_0, z_1, u) &= 1 + \frac{\alpha_s C_F}{\pi^2} \int_{\rho} \frac{d^2 x'_2}{x_{2'0}^2 x_{2'1}^2} \times \\
&\times \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz'_2}{z'_2} u(\vec{x}_2, z'_2) Z^{(0)}(\vec{x}_2, \vec{x}_1, z'_2, u) \times \\
&\times Z^{(0)}(\vec{x}_2, \vec{x}_0, z'_2, u).
\end{aligned} \quad (25)$$

Заметим, что в целях регуляризации расходимости интеграла по  $\vec{x}'_2$  необходимо ввести параметр обрезания  $\rho$ , например, ограничив область интегрирования в (25) условиями  $x_{2'0}^2 \geq \rho^2$  и  $x_{2'1}^2 \geq \rho^2$ .

Функционал  $Z^{(0)}$  дает распределение вероятностей для глюонов в древесном приближении, без учета виртуальных поправок. Кроме того, он не дает вероятности найти один диполь. Пусть  $Z$  – функционал, дающий распределение всех вероятностей с учетом виртуальных поправок. Заметим, что тогда при  $u=1$  он, как видно из (24), дает вероятность найти диполь с любым числом глюонов, т. е. должен быть равен 1. Используя еще тот факт, что вероятность найти один диполь дается судаковским формфактором, можно прийти к следующему уравнению для него [73]:

$$\begin{aligned}
Z(\vec{b}_0, \vec{x}_{01}, Y, u) &= u(\vec{b}_0, \vec{x}_{01}) \exp \left[ -\frac{4\alpha_s C_F}{\pi} \times \right. \\
&\times \ln \left( \frac{x_{01}}{\rho} \right) Y \left. \right] + \frac{\alpha_s C_F}{\pi^2} \int_0^Y dy \int_{\rho} d^2 x'_2 \frac{x_{01}^2}{x_{02'}^2 x_{12'}^2} \times \\
&\times \exp \left[ -\frac{4\alpha_s C_F}{\pi} \ln \left( \frac{x_{01}}{\rho} \right) (Y-y) \right] \times \\
&\times Z(\vec{b}_0 + \frac{1}{2} \vec{x}_{12'}, \vec{x}_{02'}, y, u) \times \\
&\times Z(\vec{b}_0 - \frac{1}{2} \vec{x}_{2'0}, \vec{x}_{12'}, y, u).
\end{aligned} \quad (26)$$

Здесь мы несколько изменили обозначения: от координаты кварка ( $\vec{x}_0$ ) и антикварка диполя ( $\vec{x}_1$ ) мы перешли к прицельному параметру диполя  $\vec{b}_0 = \frac{1}{2}(\vec{x}_0 + \vec{x}_1)$  и к относительному поперечному размеру  $\vec{x}_{01} = \vec{x}_0 - \vec{x}_1$ . Вместо доли продольного импульса  $z$  в уравнении (26) использована быстрота  $y$ ;  $Y = \ln(1/x)$ , где  $x = \frac{Q^2}{s}$  имеет обычный смысл бьёркеновской переменной для процесса рассеяния виртуального гамма-кванта на мишени. Напомним,  $\rho$  имеет все тот же смысл ультрафиолетового обрезания, сокращающегося при рассмотрении физически наблюдаемых величин.

В работе [73] этот функционал использовался для вывода дипольного уравнения эволюции (20), (21).

### Дипольная форма ядра VFKL

Изначально подход VFKL формулировался в импульсном представлении. Импульс-факторы и ядро уравнения VFKL для функций Грина были определены в пространстве поперечных импульсов. Ядро известно сейчас для произвольных передач импульса и всех возможных цветовых состояний в  $t$ -канале [57–59]. Для феноменологических применений наиболее важно бесцветное состояние – померонный канал. Отличительной чертой ядра в померонном канале является сокращение инфракрасных расходимостей. В дальнейшем только этот канал и рассматривается.

Для рассеяния бесцветных объектов уравнение VFKL можно использовать в специальном представлении, в котором ядро уравнения в ГЛП обладает замечательным свойством: оно инвариантно относительно конформных преобразований в пространстве прицельных параметров [74]. Конформная инвариантность ядра в этом представлении делается очевидной при переходе из импульсного в координатное пространство. Мы будем называть форму ядра в координатном пространстве в этом представлении дипольной формой ядра VFKL, поскольку она совпадает в ГЛП с ядром модели цветных диполей [72; 75; 76]. Эти обстоятельства делают очень интересной задачу нахождения дипольной формы ядра в СГЛП. Конечно, в КХД конформная инвариантность нарушается перенормировкой. Но если перенормировки являются единственным источником нарушения, то можно рассчитывать на конформную инвариантность ядра в суперсимметричных обобщениях КХД. Дипольная форма ядра очень полезна для лучшего понимания связи подхода VFKL с моделью цветных диполей, что важно для дальнейшего развития теоретического описания полужестких процессов.

*Координатное представление ядра VFKL в ГЛП.* В главном логарифмическом приближении ядро VFKL дается формулами (8)–(13). Прямое преобразование Фурье дает



$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{K} | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle &= \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{K}_{dip} | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle - \\ &- \frac{g^2 N_c \Gamma^2 (1 + \varepsilon)}{8\pi^{3+2\varepsilon}} \left[ \frac{\delta(\vec{r}_{11'})}{\vec{r}_{12'}^{2(1+2\varepsilon)}} + \frac{\delta(\vec{r}_{22'})}{\vec{r}_{21'}^{2(1+2\varepsilon)}} - \right. \\ &\left. - 2 \frac{\delta(\vec{r}_{12'}) (\vec{r}_{11'} \vec{r}_{22'})}{\vec{r}_{11'}^{2(1+\varepsilon)} \vec{r}_{22'}^{2(1+\varepsilon)}} \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{K}_{dip} | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle &= \frac{g^2 N_c \Gamma^2 (1 + \varepsilon)}{8\pi^{3+2\varepsilon}} \times \\ &\times \int d^{2+2\varepsilon} \rho \left( \frac{\vec{r}_{1p}}{\vec{r}_{1p}^{2(1+\varepsilon)}} - \frac{\vec{r}_{2p}}{\vec{r}_{2p}^{2(1+\varepsilon)}} \right)^2 \times \\ &\times (\delta(\vec{r}_{11'}) \delta(\vec{r}_{2p}) + \delta(\vec{r}_{22'}) \delta(\vec{r}_{1p}) - \delta(\vec{r}_{11'}) \delta(\vec{r}_{22'})) \end{aligned}$$

есть ядро модели цветowych диполей в  $(D-2)$ -мерном пространстве. Здесь и ниже  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ ,  $\vec{r}_{i'j'} = \vec{r}'_i - \vec{r}'_j$ ,  $\vec{r}_{ij'} = \vec{r}_i - \vec{r}'_j$ ,  $\vec{r}_{ip} = \vec{r}_i - \vec{p}$ .

При  $D=4$   $\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{K}_{dip} | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle$  приобретает хорошо известную форму:

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{K}_{dip} | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle &= \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int d^2 \rho \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{1p}^2 \vec{r}_{2p}^2} \times \\ &\times (\delta(\vec{r}_{11'}) \delta(\vec{r}_{2p}) + \delta(\vec{r}_{22'}) \delta(\vec{r}_{1p}) - \\ &- \delta(\vec{r}_{11'}) \delta(\vec{r}_{22'})). \end{aligned}$$

Видно, что ядро BFKL не эквивалентно ядру модели цветowych диполей, а является более общим, чем последнее. На самом деле это ясно изначально, поскольку ядро BFKL может использоваться для рассеяния не только для бесцветных, но и для цветных объектов.

Однако, когда оно применяется для рассеяния бесцветных объектов, можно взять импакт-фактор мишени в «дипольной» форме и использовать «калибровочную инвариантность» импакт-фактора налетающей частицы [74], что позволяет опустить в ядре члены, пропорциональные  $\delta(\vec{r}_{12'})$ , так же как изменить члены, не зависящие либо от  $\vec{r}_1$ , либо от  $\vec{r}_2$  таким образом, что получившееся в результате ядро сохраняет свойство дипольности.

В самом деле, для бесцветных объектов импакт-факторы в представлении (7) «калибровочно инвариантны»:

$$\langle A' \bar{A} | \vec{q}, 0 \rangle = \langle A' \bar{A} | 0, \vec{q} \rangle = 0.$$

Поэтому  $\langle A' \bar{A} | \Psi \rangle = 0$ , если  $\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \Psi \rangle$  не зависят либо от  $\vec{r}_1$ , либо от  $\vec{r}_2$ . Так как

$\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \hat{K}_r | \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle$  исчезает при  $\vec{q}_1 = 0$  или  $\vec{q}_2 = 0$ ,  $\langle A' \bar{A} | \hat{K}$  также «калибровочно инвариантны». Это значит, что мы можем заменить  $|In\rangle \equiv (\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2)^{-1} |\bar{B}'B\rangle$  на  $|In_d\rangle$ , где  $|In_d\rangle$  обладает свойством дипольности:  $\langle \vec{r}, \vec{r}' | In_d \rangle = 0$ . После этого можно опустить члены пропорциональные  $\delta(\vec{r}_{12'})$ , а члены, не зависящие либо от  $\vec{r}_1$ , либо от  $\vec{r}_2$ , изменить так, что  $\hat{K} \rightarrow \hat{K}_{dip}$  со свойством  $\langle \vec{r}, \vec{r}' | \hat{K}_{dip} | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle = 0$ .

Дипольная форма ядра BFKL в СГЛП может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{K}_d^{NLO} | \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 \rangle &= \frac{\alpha_s^2(\mu) N_c^2}{4\pi^3} \times \\ &\times [\delta(\vec{r}_{11'}) \delta(\vec{r}_{22'}) \int d^2 \rho g^0(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{p}) + \\ &+ \delta(\vec{r}_{11'}) g(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}'_2) + \delta(\vec{r}_{22'}) g(\vec{r}_2, \vec{r}_1; \vec{r}'_1) + \\ &+ \frac{1}{\pi} g(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}'_1, \vec{r}'_2)] \end{aligned} \quad (27)$$

с функцией  $g$ , обращающейся в нуль при совпадении ее первых двух аргументов. Первые три члена содержат ультрафиолетовые расходимости, которые сокращаются между собой так же, как и в ГЛП, с учетом свойства дипольности импакт-факторов мишени. Коэффициент при  $\delta(\vec{r}_{11'}) \delta(\vec{r}_{22'})$  записан в интегральной форме для того, чтобы сделать это сокращение явным. Слагаемое с  $g(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}'_1, \vec{r}'_2)$  отсутствует в ГЛП, так как в импульсном пространстве ядро не содержит членов, зависящих одновременно от трех независимых импульсов.

Скачки (7) инвариантны относительно операторного преобразования

$$\begin{aligned} \hat{K} &\rightarrow \hat{O}^{-1} \hat{K} \hat{O}, \quad \langle A' \bar{A} | \rightarrow \langle A' \bar{A} | \hat{O}, \\ \frac{1}{\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2} |\bar{B}'B\rangle &\rightarrow \hat{O}^{-1} \frac{1}{\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2} |\bar{B}'B\rangle. \end{aligned}$$

Это свойство позволяет использовать ядро в разных формах. В ГЛП форма ядра фиксировалась требованием конформной инвариантности. Но в СГЛП и после этого еще возможны преобразования с  $\hat{O} = 1 + \hat{\Theta}$ , где  $\hat{\Theta} \sim g^2$ . При этом

$$\hat{K} \rightarrow \hat{K} - [\hat{K}^B, \hat{\Theta}], \quad (28)$$

где  $\hat{K}^B$  – ядро ГЛП. Эти преобразования перераспределяют поправки к ядру и им-

пакт-факторам и могут быть использованы для упрощения дипольной формы ядра.

Простейшая часть ядра ВФКЛ в СГЛП – «неабелевская» (главная по  $N_c$ ) часть кваркового вклада в ядро. Она известна при произвольных  $D$  [57]. Ее дипольная форма найдена также при произвольных  $D$  [77]. Оказывается, что дипольная форма исходной «неабелевской» части [77] содержит члены  $g(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}'_1, \vec{r}'_2)$  и не очень проста. Но операторное преобразование (28) с

$$\hat{\Theta}_Q = \frac{\alpha_s(\mu)}{8\pi} \frac{2}{3} n_f \ln(\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2) \quad (29)$$

удаляет эти члены и значительно упрощает дипольную форму, которая при  $D = 4$  приобретает вид (27) с

$$\begin{aligned} g_Q(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{\rho}) &= -g_Q^0(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{\rho}) = \\ &= \frac{n_f}{3N_c} \left( \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{1\rho}^2 \vec{r}_{2\rho}^2} \ln \frac{\vec{r}_Q^2}{\vec{r}_{12}^2} + \frac{\vec{r}_{1\rho}^2 - \vec{r}_{2\rho}^2}{\vec{r}_{1\rho}^2 \vec{r}_{2\rho}^2} \ln \frac{\vec{r}_{1\rho}^2}{\vec{r}_{2\rho}^2} \right), \end{aligned}$$

где

$$\ln \vec{r}_Q^2 = -\frac{5}{3} + 2\psi(1) - \ln \frac{\mu^2}{4}.$$

Этот результат согласуется с кварковым вкладом в ядро в модели цветовых диполей [78].

«Абелевская» часть кваркового вклада в импульсном представлении с точностью до коэффициента совпадает с вычисленной много лет назад в КЭД [79; 80] и очень сложна. Оказывается, однако, что ее дипольная форма чрезвычайно проста. Она содержит только  $g(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}'_1, \vec{r}'_2)$ :

$$\begin{aligned} g_Q(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}'_1, \vec{r}'_2) &= \frac{n_f}{N_c^3} \frac{1}{\vec{r}_{12}^4} \times \\ &\times \left( \frac{\vec{r}_{12}^2 \vec{r}'_{12}^2 + \vec{r}_{11}^2 \vec{r}'_{22}^2 - \vec{r}_{12}^2 \vec{r}'_{12}^2}{2(\vec{r}_{12}^2 \vec{r}'_{12}^2 - \vec{r}_{11}^2 \vec{r}'_{22}^2)} \ln \frac{\vec{r}_{12}^2 \vec{r}'_{12}^2}{\vec{r}_{11}^2 \vec{r}'_{22}^2} - 1 \right), \end{aligned}$$

совпадает с соответствующей частью кваркового вклада в ядро в модели цветовых диполей [78] и конформно инвариантна. Последнее обстоятельство особенно интересно для померона в КЭД.

Преобразование (28) с  $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}_Q$  (29) удаляет кварковую часть СГЛП поправок из импакт-факторов, так что все кварковые поправки оказываются включенными в ядро. Для глюонного вклада преобразование с

таким свойством не найдено. Было бы чудом, если бы оно вообще существовало.

Преобразование для кваркового вклада связано с перенормировкой заряда. Представляется разумным использовать для глюонного вклада аналогичное преобразование, т. е. (28) с

$$\hat{\Theta}_G = \frac{\alpha_s(\mu)}{8\pi} \left( -\frac{11}{3} N_c \right) \ln(\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2).$$

При этом результат [81] имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} g_G^0(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \rho) &= \frac{3}{2} \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{1\rho}^2 \vec{r}_{2\rho}^2} \ln \left( \frac{\vec{r}_{1\rho}^2}{\vec{r}_{12}^2} \right) \ln \left( \frac{\vec{r}_{2\rho}^2}{\vec{r}_{12}^2} \right) - \\ &- \frac{11}{12} \left[ \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{1\rho}^2 \vec{r}_{2\rho}^2} \ln \left( \frac{\vec{r}_{1\rho}^2 \vec{r}_{2\rho}^2}{r_G^4} \right) + \left( \frac{1}{\vec{r}_{2\rho}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{1\rho}^2} \right) \ln \left( \frac{\vec{r}_{2\rho}^2}{\vec{r}_{1\rho}^2} \right) \right], \\ g_G(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}'_2) &= \frac{11}{6} \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{22}^2 \vec{r}'_{12}^2} \ln \left( \frac{\vec{r}_{12}^2}{r_G^2} \right) + \\ &+ \frac{11}{6} \left( \frac{1}{\vec{r}_{22}^2} - \frac{1}{\vec{r}'_{12}^2} \right) \ln \left( \frac{\vec{r}_{22}^2}{\vec{r}'_{12}^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2\vec{r}'_{22}^2} \ln \left( \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}'_{22}^2} \right) \ln \left( \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}'_{12}^2} \right) - \\ &- \frac{\vec{r}_{12}^2}{2\vec{r}'_{22}^2 \vec{r}'_{12}^2} \ln \left( \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}'_{22}^2} \right) \ln \left( \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}'_{12}^2} \right), \end{aligned}$$

где

$$\ln r_G^2 = 2\psi(1) - \ln \frac{\mu^2}{4} - \frac{3}{11} \left( \frac{67}{9} - 2\zeta(2) \right).$$

Как  $g_Q^0(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{\rho})$ , так и  $g_G(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{\rho})$  исчезают при  $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ . Они также стремятся к нулю при  $\vec{\rho}^2 \rightarrow \infty$  быстрее, чем  $(\vec{\rho}^2)^{-1}$ , что обеспечивает отсутствие инфракрасных расходимостей. Ультрафиолетовые сингулярности при  $\vec{\rho} = \vec{r}_2$  и  $\vec{\rho} = \vec{r}_1$  сокращаются с учетом дипольности импакт-факторов мишени.

Наиболее сложной является структура, отсутствующая в ГЛП:

$$\begin{aligned} g_G(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}'_1, \vec{r}'_2) &= \left[ \frac{(\vec{r}_{22}^2 \vec{r}_{12}^2)}{\vec{r}_{11}^2 \vec{r}_{22}^2 \vec{r}'_{12}^2} - \frac{2(\vec{r}_{22}^2 \vec{r}_{11}^2)}{\vec{r}_{11}^2 \vec{r}_{22}^2 \vec{r}'_{12}^2} \right. \\ &+ \left. \frac{2(\vec{r}_{22}^2 \vec{r}_{12}^2)(\vec{r}_{11}^2 \vec{r}'_{12}^2)}{\vec{r}_{11}^2 \vec{r}_{22}^2 \vec{r}'_{12}^2 \vec{r}'_{12}^2} \right] \ln \left( \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}'_{12}^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2\vec{r}'_{12}^2} \left[ \frac{(\vec{r}_{11}^2 \vec{r}_{22}^2)}{\vec{r}_{11}^2 \vec{r}_{22}^2} + \frac{(\vec{r}_{21}^2 \vec{r}_{12}^2)}{\vec{r}_{21}^2 \vec{r}_{12}^2} - \frac{2(\vec{r}_{22}^2 \vec{r}_{21}^2)}{\vec{r}_{22}^2 \vec{r}_{21}^2} \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \ln \left( \frac{\vec{r}_{11'}^2 \vec{r}_{22'}^2}{\vec{r}_{12'}^2 \vec{r}_{12}^2} \right) + \frac{(\vec{r}_{11'} \vec{r}_{22'})}{2\vec{r}_{11'}^2 \vec{r}_{22'}^2 \vec{r}_{12'}^2} \ln \left( \frac{\vec{r}_{21'}^2 \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{11'}^2 \vec{r}_{22'}^2} \right) + \\
 & + \frac{1}{d\vec{r}_{12'}^2} \left[ \frac{(\vec{r}_{12'} \vec{r}_{12}) \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{11'}^2} + \frac{2(\vec{r}_{22'} \vec{r}_{21'}) (\vec{r}_{12} \vec{r}_{21'})}{\vec{r}_{21'}^2} + \right. \\
 & + \left. \frac{(\vec{r}_{22'} \vec{r}_{12'}) (\vec{r}_{11'} \vec{r}_{21'})}{\vec{r}_{11'}^2 \vec{r}_{22'}^2} \vec{r}_{12'}^2 - \vec{r}_{12}^2 \right] \ln \left( \frac{\vec{r}_{12'}^2 \vec{r}_{21'}^2}{\vec{r}_{11'}^2 \vec{r}_{22'}^2} \right) + \\
 & + \frac{1}{2\vec{r}_{12'}^4} \left( \frac{\vec{r}_{11'}^2 \vec{r}_{22'}^2}{d} \ln \left( \frac{\vec{r}_{12'}^2 \vec{r}_{21'}^2}{\vec{r}_{11'}^2 \vec{r}_{22'}^2} \right) - 1 \right) + \\
 & + \frac{1}{\vec{r}_{11'}^2} \left( \frac{(\vec{r}_{12} \vec{r}_{21'})}{\vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{21'}^2} - \frac{(\vec{r}_{11'} \vec{r}_{12})}{\vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{22'}^2} - \frac{(\vec{r}_{11'} \vec{r}_{21'})}{\vec{r}_{22}^2 \vec{r}_{21'}^2} \right) \ln \left( \frac{\vec{r}_{12'}^2}{\vec{r}_{11'}^2} \right) - \\
 & - \frac{(\vec{r}_{12} \vec{r}_{22'})}{\vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{22}^2 \vec{r}_{12}^2} \ln \left( \frac{\vec{r}_{11'}^2}{\vec{r}_{12'}^2} \right) + (1 \leftrightarrow 2), \quad (30)
 \end{aligned}$$

где

$$d = \vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{21}^2 - \vec{r}_{11}^2 \vec{r}_{22}^2.$$

Этот член также стремится к нулю при  $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ , так что обладает свойством дипольности. Он имеет ультрафиолетовую сингулярность только при  $\vec{r}_{12} = 0$  и стремится к нулю при больших  $\vec{r}_1'^2$  и  $\vec{r}_2'^2$  достаточно быстро, чтобы обеспечить отсутствие инфракрасных расходимостей.

Член (30) нарушает конформную инвариантность, хотя и не имеет отношения к перенормировкам. Напомним, однако, возможность операторных преобразований (28). Остается до сих пор неясным, можно ли найти такое преобразование, которое устранило бы нарушающие конформную инвариантность члены.

*BFKL в суперсимметричных обобщениях КХД.* Суперсимметричные обобщения КХД содержат глюоны и майорановские фермионы в присоединенном представлении цветовой группы. Глюонный вклад в ядро BFKL остается таким же, как и в КХД. Фермионный вклад может быть получен заменами групповых коэффициентов:

$$n_f \rightarrow n_M N_c$$

для «неабелевской» части, и

$$n_f \rightarrow -n_M N_c^3$$

для «абелевской»;  $n_M$  — число ароматов майорановских фермионов. Для расширенной  $N$ -суперсимметрии  $n_M = N$ .

При  $N > 1$  кроме кварков имеется  $n_s$  скалярных частиц;  $n_s = 2$  при  $N = 2$  и  $n_s = 6$  при  $N = 4$ .

Аналогично кварковому случаю, удобно разделить вклад скалярных частиц на две части, с теми же групповыми коэффициентами. После преобразования (28) с

$$\hat{\Theta} = -\frac{\alpha_s(\mu) N_c}{8\pi} \left( \frac{11}{3} - \frac{2}{3} n_M - \frac{1}{6} n_s \right) \ln(\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2),$$

«неабелевская» часть дает вклад только в  $g_S(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{\rho})$  и  $g_S^0(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{\rho})$ . При этом

$$\begin{aligned}
 g_S(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{\rho}) &= -g_S^0(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{\rho}) = \\
 &= \frac{n_s}{12} \left( \frac{\vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{1\rho}^2 \vec{r}_{2\rho}^2} \ln \frac{\vec{r}_S^2}{\vec{r}_{12}^2} + \frac{\vec{r}_{1\rho}^2 - \vec{r}_{2\rho}^2}{\vec{r}_{1\rho}^2 \vec{r}_{2\rho}^2} \ln \frac{\vec{r}_{1\rho}^2}{\vec{r}_{2\rho}^2} \right),
 \end{aligned}$$

где  $\ln \vec{r}_S^2 = -\frac{8}{3} + 2\psi(1) - \ln \frac{\mu^2}{4}$ . «Абелевская часть» дает вклад только в  $g(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}_1', \vec{r}_2')$ :

$$\begin{aligned}
 g_S(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}_1', \vec{r}_2') &= \frac{n_s}{2} \frac{1}{\vec{r}_{12'}^4} \times \\
 &\times \left( \frac{\vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{12}^2}{(\vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{12}^2 - \vec{r}_{11'}^2 \vec{r}_{22}^2)} \ln \frac{\vec{r}_{12}^2 \vec{r}_{12}^2}{\vec{r}_{11'}^2 \vec{r}_{22}^2} - 1 \right).
 \end{aligned}$$

Она явно конформно инвариантна.

При  $N = 4$

$$\frac{11}{3} - \frac{2}{3} n_M - \frac{1}{6} n_s = 0,$$

$\alpha_s$  не зависит от  $\mu$  и

$$\hat{\Theta} = -\frac{\alpha_s(\mu) N_c}{8\pi} \left( \frac{11}{3} - \frac{2}{3} n_M - \frac{1}{6} n_s \right) \ln(\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2) = 0.$$

К сожалению, полного сокращения членов, нарушающих конформную инвариантность, не происходит. Однако надежда добиться его с помощью преобразования (28) остается.

### Уравнения эволюции при высокой плотности

Нарушение унитарного предела, обсуждавшееся выше, с учетом глюонной плотности означает слишком быстрый ее рост при малых  $x$ . Величина  $F(x, \vec{q})$ , определенная соотношением

$$\begin{aligned}
 \delta(\vec{q}_B) F(x, \vec{q}^2) &= \frac{\vec{q}^4 (N_c^2 - 1)}{4 p_B^- (2\pi)^2} \times \\
 &\times \langle \vec{q}, -\vec{q} | e^{Y\hat{K}} \frac{1}{\hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2} | \vec{B}\vec{B} \rangle
 \end{aligned} \quad (31)$$

и являющаяся (с точностью до коэффициента) в подходе BFKL мнимой частью амплитуды рассеяния реджезованного глюона на мишени  $B$ , в пределе больших  $\bar{q}^2$  может быть выражена через глюонную функцию распределения глюона в мишени  $B$   $G(x, Q^2) \equiv f_B^g(x, Q^2)$ :

$$F(x, Q^2) = x \frac{\partial G(x, Q^2)}{\partial Q^2} \quad (32)$$

(коэффициенты в (31) легко получить, сравнивая левую и правую части (32) в борновском приближении и взяв в качестве мишени кварк). Поэтому функцию  $F(x, \bar{q}^2)$  называют непроинтегрированным глюонным распределением. При малых  $x$  она растет; согласно (14)

$$F(x, Q^2) \propto \left(\frac{1}{x}\right)^{\omega_p},$$

где  $\omega_p$  – так называемый интерсепт BFKL померона, так что плотность глюонов растет как обратная степень  $x$ . При каких-то значениях  $x$  (зависящих от  $Q^2$ ) этот рост должен остановиться (наступить насыщение глюонной плотности). Следует заметить что  $\omega_p$  зависит от  $Q^2$ , так как выражается через бегущую константу связи. В ГЛП эта зависимость не фиксируется.

*Нелинейные эффекты и уравнение GLR.* Значительный вклад в понимание явлений, связанных с большой плотностью, внесла работа [82]. Если рассматривать эволюцию глюонной плотности по  $x$  при фиксированных  $Q^2$ , то насыщение наступает при некоторых  $x_s(Q^2)$ . Можно, наоборот, при фиксированных  $x$  двигаться по  $Q^2$  начиная с больших значений, где плотность не велика из-за малости константы связи, и говорить о кривой насыщения  $Q_s^2(x)$ . Именно эта терминология и используется начиная с работы [82]. В ней рассмотрение велось в системе бесконечного импульса мишени, и  $Q_s^2(x)$  оценивалась как значения  $Q^2$ , при которых они начинают «перекрываться», т. е. сечение их взаимодействия  $\sim \alpha_s/Q^2$ , умноженное на число глюонов, становится сравнимым с поперечным сечением мишени:

$$\frac{\alpha_s(Q_s^2)xG(x, Q_s^2)}{Q_s^2} \sim \pi R_t^2,$$

где  $R_t$  – радиус мишени. При этом становится существенным их взаимодействие («слипание»), которое и останавливает рост глюонной плотности. В настоящее время часто используют несколько другую интерпретацию насыщения и несколько иное определение  $Q_s^2(x)$ , а именно

$$\frac{F(x, Q_s^2)}{\pi R_t^2} \sim \frac{1}{\alpha_s(Q_s^2)}. \quad (33)$$

Здесь левая часть представляет плотность глюонов в фазовом пространстве (числа заполнения) на масштабе насыщения; большая ( $\sim 1/\alpha_s$ ) величина чисел заполнения допускает классическое описание глюонного поля. Качественно оба определения приводят к одинаковым результатам. Надо иметь в виду, что при этом предполагается, что насыщение достигается в области применимости теории возмущений, т. е. при  $\alpha_s(Q_s^2) \ll 1$ .

Масштаб насыщения  $Q_s^2$  и характер его зависимости от  $x$  определяются мишенью. Для ядра с достаточно большим числом нуклонов  $A \gg 1$   $Q_s^2$  может вообще не зависеть от  $x$ . В модели независимых источников в первом приближении по константе связи имеем

$$F(x, Q^2) = AN_c \frac{\alpha_s C_f}{\pi} \frac{1}{Q^2}.$$

Подставляя эту  $F$  в (33) и используя то, что  $R_A \sim A^{1/3}/M_N^2$ , получаем

$$Q_s^2 \sim A^{1/3} \left( \frac{\alpha_s(Q_s^2) N_c}{\pi} \right)^2 M_N^2.$$

При достаточно большом  $A$  масштаб насыщения  $Q_s^2$  лежит в области применимости теории возмущений, и наши оценки справедливы при не очень малых  $x$ , когда нет необходимости суммировать члены со степенями  $\ln(1/x)$ , т. е. учитывать BFKL эволюцию. Ее учет приведет к множителю  $(1/x)^{\omega_p(Q_s^2)}$ .

Уравнение эволюции Грибова – Левина – Рыскина (GLR), полученное в [82] в дважды логарифмическом пределе (т. е. при суммиро-

вании членов вида  $(\alpha_s \ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2) \ln(1/x))^n$  в диаграммах глюонной лестницы, см. рис.11, а), но с учетом «слипания», имеет вид

$$\frac{\partial^2(xG(x, Q^2))}{\partial \ln(1/x) \partial \ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2)} = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} xG(x, Q^2) - \frac{4\alpha_s^2 N_c}{3C_F R^2} \frac{1}{Q^2} [xG(x, Q^2)]^2. \quad (34)$$

Уравнение (34) написано для глюонной функции распределения в сферическом протоне с радиусом  $R$ . Первый член в этом уравнении отвечает обычной «лестничной» эволюции (см. рис. 11, а). Нелинейный член, подавленный по  $Q^2$ , соответствует учету веерных диаграмм (см. рис. 11, б, в). Вершина расщепления померона (см. рис. 11, б) подавлена как  $1/Q^2$ . Однако в области очень малых  $x$  второй член в правой части (34) становится доминирующим за счет большой величины  $xG(x, Q^2)$  и останавливает дальнейший рост глюонной плотности.

В [82] была дана лишь грубая оценка трехпомеронной вершины и не были учтены другие нелинейные эффекты, например слияние померонных каскадов (см. рис. 11, з). Однако уравнение GLR явилось одним из первых нелинейных обобщений подхода BFKL, за которым последовало систематическое развитие нелинейных уравнений эволюции.

*Высокоэнергетическое операторное разложение.* В работе [83] для описания процессов с малыми  $x$  был предложен подход, основанный на применении операторного разложения при высоких энергиях.

В главном логарифмическом приближении все поперечные импульсы одного порядка, а быстроты сильно упорядочены, так что амплитуды в этом подходе факторизуются в пространстве быстрот. Это означает, что амплитуды представляются в виде свертки вкладов от быстрых и медленных полей. Для разделения выбирается быстрота  $\eta_0$ , которая лежит между быстротой налетающей частицы  $A$  и быстротой мишени  $B$ . Поля с  $\eta > \eta_0$  называют быстрыми, а с  $\eta < \eta_0$  медленными (интерпретация этих полей как быстрое и медленное верна только в покоящейся системе отсчета мишени). Вклады быстрых полей дают коэффициентную функцию перед соответствующим оператором, а вклады медленных полей выражаются через матричные элементы от

операторов. Амплитуда процесса  $A + B \rightarrow A' + B'$  представляется в виде

$$A_{AB}^{A'B'}(s, t) = \sum \int d^2x_{1\perp} \dots d^2x_{n\perp} C^{i_1 \dots i_n} \times \langle x_{1\perp}, \dots, x_{n\perp}, \eta_0 | B | Tr \{ U_{i_1}(x_{1\perp}) \dots U_{i_n}(x_{n\perp}) \} | B' \rangle,$$

где  $x_{k\perp}$  – поперечные координаты;  $i_k = 1, 2$ ,  $C(x_{1\perp}, \dots, x_{n\perp}, \eta_0)$  – коэффициентные функции,

$$U_i^n(x_\perp) = U_i^{n\dagger}(x_\perp) \frac{i}{g} \frac{\partial}{\partial x_{i\perp}} U_i^n(x_\perp),$$

где операторы

$$U^n(x_\perp) = P \exp \left( ig \int_{-\infty}^{\infty} du p_\mu^n A^\mu(u p^n + x_\perp) \right),$$

$$p^n = p_1 + e^{-\eta} p_2,$$

называются операторами линий Вильсона. Здесь  $p_1, p_2$  – светоконусные импульсы, близкие к импульсам  $p_A$  и  $p_B$  соответственно,  $p_1^2 = p_2^2 = 0$ ;  $2p_1 p_2 = s$ ;  $P$  означает упорядочение операторов глюонного поля  $A^\mu$  вдоль пути интегрирования; скобки  $\langle \dots \rangle$  показывают усреднение по состоянию мишени,  $Tr$  – след матрицы в цветовом пространстве. Здесь и далее используется разложение  $p = \alpha p_1 + \beta p_2 + p_\perp$ , называемое судаковским, и обозначения  $x_- = x p_1, x_+ = x p_2$ .

В [83] была получена бесконечная иерархия связанных уравнений для произведений операторов линий Вильсона. В случае, когда мишенью является большое ядро, в пределе большого числа цветов из этой иерархии отщепляется уравнение для среднего значения оператора, представляющего цветовой диполь. В результате получается уравнение на амплитуду рассеяния диполя, являющееся нелинейным обобщением дипольного уравнения (21), (20).

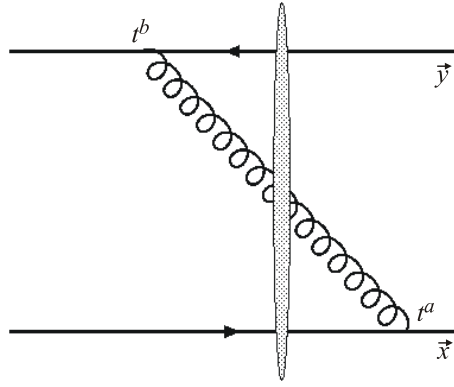
В пространстве прицельных параметров  $S$ -матрица для рассеяния цветového диполя с быстротой  $\eta$  на мишени  $B$  получается усреднением по состоянию мишени оператора

$$S^\eta(x_\perp, y_\perp) = \frac{1}{N_c} Tr [U^\eta(x_\perp) U^{\eta\dagger}(y_\perp)]. \quad (35)$$

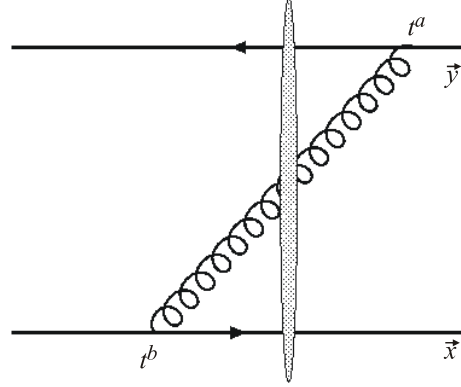
Входящая в (16) мнимая часть  $N$  амплитуды рассеяния вперед диполя на мишени представляется в виде  $N^\eta(x_\perp, y_\perp) = 1 - S^\eta(x_\perp, y_\perp)$ . Здесь использовано, что в амплитуде рассеяния вперед доминирует

мнимая часть. Чтобы найти уравнение эволюции оператора цветового диполя (35) по  $\eta$  в ГЛП, мы должны рассмотреть его матричный элемент между произвольными состояниями мишени и учесть вклад «быстрых» глюонов (с быстротами  $\eta_1 > \eta > \eta_2 = \eta_1 - \Delta\eta$ ), рассматривая «медленные» глюоны (с  $\eta < \eta_2$ ) как фоновое поле. Ввиду сильной упорядоченности с кварками диполя взаимодействуют только «быстрые» глюоны; при этом для них поле «медленных» сжимается в «ударную волну» (рис. 14). Вклады всех диаграмм выражаются через пропагатор глюона во внешнем поле в виде «ударной волны» [83; 84]:

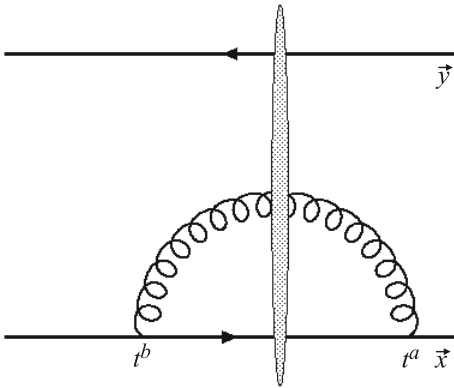
$$\begin{aligned} \langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle &= \theta(x_+ y_+) \langle x | \frac{g_{\mu\nu}}{i(p^2 + i\epsilon)} | y \rangle - \\ &- \theta(x_+) \theta(-y_+) \int_0^\infty \frac{d\alpha}{2\pi} \frac{e^{-i\alpha(x-y)_-}}{4\alpha^2} \times \\ &\times \langle x_\perp | e^{-i\frac{p_\perp^2}{\alpha s} x_+} [2\alpha g_{\mu\nu} U + \frac{4}{s} (i\partial_\mu p_{2\nu} U - p_{2\mu} i\partial_\nu U) - \\ &- \frac{4p_{2\mu} p_{2\nu}}{\alpha s^2} \partial_\perp^2 U] e^{i\frac{p_\perp^2}{\alpha s} y_+} | y_\perp \rangle^{ab} - \end{aligned}$$



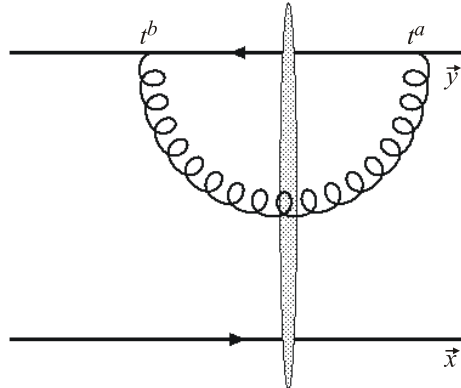
a



б



в



г

$$\begin{aligned} &- \theta(-x_+) \theta(y_+) \int_0^\infty \frac{d\alpha}{2\pi} \frac{e^{-i\alpha(x-y)_-}}{4\alpha^2} \times \\ &\times \langle x_\perp | e^{-i\frac{p_\perp^2}{\alpha s} x_+} [2\alpha g_{\mu\nu} U^\dagger + \frac{4}{s} (i\partial_\mu p_{2\nu} U^\dagger - p_{2\mu} i\partial_\nu U^\dagger) - \\ &- \frac{4p_{2\mu} p_{2\nu}}{\alpha s^2} \partial_\perp^2 U^\dagger] e^{i\frac{p_\perp^2}{\alpha s} y_+} | y_\perp \rangle^{ab}, \end{aligned}$$

где  $\partial_\perp^2 \equiv -\partial_i \partial^i$ ;  $U^{ab}$  – оператор линии Вильсона в присоединенном представлении. Здесь и далее мы используем швингеровские обозначения:

$$\langle x | F(p) | y \rangle \equiv \int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D/2}} F(p) e^{-ip(x-y)};$$

$$\langle x_\perp | F(p_\perp) | y_\perp \rangle \equiv \int \frac{d^{D-2} p}{(2\pi)^{(D-2)/2}} F(p_\perp) e^{i(p, x-y)_\perp}.$$

Диаграмма (рис. 14, а) дает вклад

$$\begin{aligned} &g^2 \left\{ \int_0^\infty du \int_{-\infty}^0 dv A^a(up^{\eta_1} + x_\perp) A^b(vp^{\eta_1} + y_\perp) \right\}_{\text{рис.14, а}} = \\ &= -2\alpha_s \int_{e^{-\eta_2}}^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \langle x_\perp | \frac{1}{p_\perp^2 + \alpha^2 e^{-2\eta_1 s}} \partial_\perp^2 U^{ab} \frac{1}{p_\perp^2 + \alpha^2 e^{-2\eta_2 s}} | y_\perp \rangle \end{aligned}$$

Рис. 14. Ведущие диаграммы для эволюции цветового диполя по быстрой (темный овал обозначает классическое глюонное поле мишени)

Формально интеграл по  $\alpha$  расходится на нижнем пределе, но так как мы интегрируем по быстротам  $\eta > \eta_2$ , то в ГЛП получаем:

$$\begin{aligned} & g^2 \left\{ \int_0^\infty du \int_{-\infty}^0 dv A_-^a (up^{\eta_1} + x_\perp) A_-^b (vp^{\eta_1} + y_\perp) \right\}_{\text{рис.14, а}} = \\ & = -2\alpha_s \Delta \eta (x_\perp | \frac{1}{p_\perp^2} \partial_\perp^2 U^{ab} | \frac{1}{p_\perp^2} | y_\perp) = \\ & = -2\alpha_s \Delta \eta \int d^2 z_\perp (x_\perp | \frac{p_i}{p_\perp^2} | z_\perp) \times \\ & \times (2U_z - U_x - U_y)^{ab} (z_\perp | \frac{p_i}{p_\perp^2} | y_\perp) \end{aligned} \quad (36)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} [U_x \otimes U_y^\dagger]^{\eta_1}_{\text{рис.14, а}} & = -\frac{\alpha_s}{2\pi^2} [t^a U_x \otimes t^b U_y^\dagger]^{\eta_2} \times \\ & \times \int d^2 z_\perp \frac{(x-z)_\perp (y-z)_\perp}{(x-z)_\perp^2 (y-z)_\perp^2} (2U_z^{\eta_2} - U_x^{\eta_2} - U_y^{\eta_2})^{ab} \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь  $U(x_\perp) \equiv U_x$  и  $[U_x \otimes U_y^\dagger]$  обозначает прямое произведение операторов в цветовом пространстве. Вклад диаграммы, изображенной на рис. 14, б, получается из (37) заменой  $t^a U_x \otimes t^b U_y^\dagger \rightarrow U_x t^b \otimes U_y^\dagger t^a$  и  $x \leftrightarrow y$ .

Вклад следующих двух диаграмм получается из (36), если положить  $y = x$  (рис. 14, в) и  $x = y$  (рис. 14, г). Окончательный ответ следующий:

$$\begin{aligned} [U_x \otimes U_y^\dagger]^{\eta_1} & = -\frac{\alpha_s \Delta \eta}{2\pi^2} [t^a U_x \otimes t^b U_y^\dagger + \\ & + U_x t^b \otimes U_y^\dagger t^a]^{\eta_2} \int d^2 z_\perp \frac{(x-z)_\perp (y-z)_\perp}{(x-z)_\perp^2 (y-z)_\perp^2} \times \\ & \times (2U_z^{\eta_2} - U_x^{\eta_2} - U_y^{\eta_2})^{ab} + \frac{\alpha_s \Delta \eta}{\pi^2} [t^a U_x t^b \otimes U_y^\dagger]^{\eta_2} \times \\ & \times \int \frac{d^2 z_\perp}{(x-z)_\perp^2} (U_z^{\eta_2} - U_x^{\eta_2})^{ab} + \frac{\alpha_s \Delta \eta}{\pi^2} [U_x \otimes t^b U_y^\dagger t^a]^{\eta_2} \times \\ & \times \int \frac{d^2 z_\perp}{(y-z)_\perp^2} (U_z^{\eta_2} - U_y^{\eta_2})^{ab}. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью цветовой алгебры для оператора цветового диполя (35) получается уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xy}}{\partial \eta} & = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int d^2 z_\perp \frac{(x-y)_\perp^2}{(x-z)_\perp^2 (z-y)_\perp^2} \times \\ & \times [N_{xz} + N_{zy} - N_{xy} + N_{xz} N_{zy}], \end{aligned} \quad (37)$$

где  $N_{xy} \equiv N^\eta(x_\perp, y_\perp) = 1 - S^\eta(x_\perp, y_\perp)$ . Если при усреднении (37) по состоянию мишени заменить среднее значение от произведения операторов  $N_{xz} N_{zy}$  на произведение средних значений операторов  $N_{xz}$  и  $N_{zy}$ , то получаем замкнутое уравнение для амплитуды рас-

сеяния диполя в пространстве прицельных параметров. Это уравнение называется уравнением ВК (Балицкого – Ковчегова).

*Эффекты большой плотности в дипольной картине.* Уравнение ВК было получено Ю. Ковчеговым [85] в дипольной картине с использованием производящего функционала для цветовых диполей (26). В работе рассматривалась амплитуда рассеяния диполя на большом ( $A \gg 1$ ) ядре. Полное выражение для нее определяется сверткой по прицельному параметру и размеру каждого из «вторичных» диполей:

$$\begin{aligned} N(\vec{x}_{01}, \vec{b}_0, Y) & = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \int \Phi^{(k)}(\vec{x}_{01}, Y, \vec{b}_1, \vec{x}_1, \dots, \vec{b}_k, \vec{x}_k) \times \right. \\ & \left. \times \prod_{j=1}^k \gamma(\vec{x}_j, \vec{b}_j) d^2 x_j d^2 b_j \right], \end{aligned} \quad (38)$$

где дифференциальное число «вторичных» диполей связано с производящим функционалом

$$\begin{aligned} \Phi^{(k)}(\vec{x}_{01}, Y, \vec{b}_1 - \vec{b}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{b}_k - \vec{b}_0, \vec{x}_k) & = \\ & = \prod_{j=1}^k \frac{\delta}{\delta u(\vec{b}_j, \vec{x}_j)} Z(\vec{b}_0, \vec{x}_{01}, Y, u) |_{u=1}. \end{aligned}$$

Факториал в формуле (38) связан с тождественностью диполей. Свертка дифференциального числа диполей с пропагаторами  $\gamma(\vec{x}_j, \vec{b}_j)$  диполя в ядре описывает механизм взаимодействия диполя с ядром. При выводе уравнения эволюции для  $N$  конкретный вид этого взаимодействия (т. е. форма пропагатора [86]  $\gamma(\vec{x}_{01}, \vec{b}_0)$  пары  $q\bar{q}$  в ядре) не существен. Его можно представить как обмен двумя глюонами (рис. 15, а).

Дальнейший вывод основан на преобразовании уравнения (26) к уравнению на дифференциальное число диполей  $\Phi^{(k)}$  и, в конечном счете, на  $N(\vec{x}_{01}, \vec{b}_0, Y)$ . В результате получается уравнение:

$$\begin{aligned} N(\vec{x}_{01}, \vec{b}_0, Y) & = -\gamma(\vec{x}_{01}, \vec{b}_0) \exp \left[ -\frac{4\alpha_s C_F}{\pi} \ln \left( \frac{x_{01}}{\rho} \right) Y \right] + \\ & + \frac{\alpha_s C_F}{\pi^2} \int_0^Y dy \int_\rho d^2 x_2 \frac{x_{01}^2}{x_{02}^2 x_{12}^2} \times \\ & \times \exp \left[ -\frac{4\alpha_s C_F}{\pi} \ln \left( \frac{x_{01}}{\rho} \right) (Y - y) \right] \times \\ & \times \left( 2N(\vec{x}_{02}, \vec{b}_0 + \frac{1}{2} \vec{x}_{12}, y) - N(\vec{x}_{02}, \vec{b}_0 + \frac{1}{2} \vec{x}_{12}, y) \times \right. \\ & \left. \times N(\vec{x}_{12}, \vec{b}_0 - \frac{1}{2} \vec{x}_{20}, y) \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Из этого уравнения видно, что пропагатор диполя в ядре  $\gamma(\vec{x}_{01}, \vec{b}_0)$  имеет смысл начального условия для  $N$  при  $Y=0$ . При выводе (39) предполагалась независимость взаимодействия каждого из диполей с ядром. Она обеспечивается большим числом нуклонов  $A$  в ядре. Большое значение  $A$  позволяет учитывать только веерные диаграммы (рис. 15, б), пренебрегая подавленными по  $A$  вкладами «померонных петель» (рис. 15, в).

В работе [85] показано, что уравнение (39) в дважды логарифмическом пределе совпадает с уравнением GLR. При большом размере ядра  $R$  и малых  $\ll R$  характерных размерах диполей можно в (39) пренебречь  $\vec{x}_{12}$  и  $\vec{x}_{02}$  по сравнению с  $b_0$ . После этого, дифференцируя по  $Y$  и опуская зависимость от  $b_0$ , приходим к уравнению ВК:

$$\frac{\partial N(\vec{x}_{01}, Y)}{\partial Y} = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int d^2x_2 \frac{x_{01}^2}{x_{02}^2 x_{12}^2} (N(\vec{x}_{02}, Y) + N(\vec{x}_{21}, Y) - N(\vec{x}_{01}, Y) - N(\vec{x}_{02}, Y)N(\vec{x}_{21}, Y)).$$

*Эффективное действие и подход ЛМВЛК.* В настоящее время интенсивно развивается подход, получивший название конденсата цветового стекла (CGC, от англ. Colour Glass Condensate). Он был инициирован работой Венугопалана и Мак-Леррана [87], получив продолжение и развитие в работах Джалилиан-Мартина, Ковнера, Вегерта [88], Леонидова и Янку [90; 91]. Общий обзор можно найти в работах [89; 92; 93].

В подходе CGC партонные составляющие быстрого налетающего адрона (ядра)

делятся по скорости на жесткие и мягкие моды. Это достигается введением параметра  $\Lambda$  разделения по скорости. Короткоживущие мягкие глюоны (по соотношению неопределенности  $\tau \sim 1/\delta E \propto x$ ) испускаются «замороженными» (что и оправдывает термин «стекло») конфигурациями долгоживущих быстрых партонов квазиклассически, т. е. для их описания используются приближение Вайцзеккера – Вильямса и неабелев аналог уравнений Максвелла с классическими источниками:

$$\partial^\mu F_{\mu,\nu}^a + g f^{abc} A^{b\mu} F_{\mu,\nu}^c = J_\nu^a. \quad (40)$$

При этом предполагается, что цветовой ток  $J_\nu^a$  жестких мод, стоящий в правой части уравнения (40), имеет только продольную светоконусную компоненту:  $J_\nu^a(x) = \delta_{+\nu} \rho^a(x^-, \vec{x})$ , при этом  $\rho^a$  не зависит от светоконусного «времени»  $x^+$ . Распределение источников  $\rho^a$  описывается функционалом  $W_Y[\rho]$ , уравнение эволюции по скорости  $Y$  для которого называется ЛМВЛК уравнением. Впервые оно было выведено в работе [94].

В модели Мак-Леррана и Венугопалана [87] в качестве источников рассматривались валентные кварки налетающего ядра без учета корреляций между ними, т. е.

$$\langle \rho^a(\vec{x}) \rho^b(\vec{y}) \rangle = \delta^{ab} \delta^{(2)}(\vec{x} - \vec{y}) \frac{g^2 A}{2\pi R_A^2}.$$

При этом функционал  $W[\rho]$  является гауссовским и не зависит от  $Y$ .

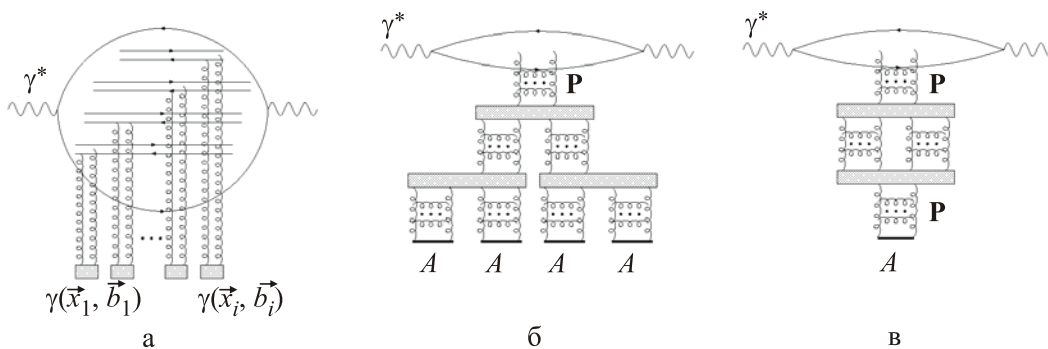


Рис. 15. Механизм взаимодействия диполя с ядром: а – глауберовский тип рассеяния диполей на ядре; б – веерные диаграммы, учитываемые уравнением ВК; в – подавленная по  $A$  диаграмма «померонной петли»



Модель с эйкональной формой квазиупругой  $S$ -матрицы

$$\hat{S} = P \exp \left[ ig \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_a(\vec{x}, x^+) \hat{\rho}^a(\vec{x}) dx^+ d^2x \right],$$

где  $\alpha_a(\vec{x}, x^+) = A_{T,a}^-(\vec{x}, x^+) -$  эффективное поле партонов мишени  $T$ , является достаточно простой и в то же время позволяет получить JIMWLK уравнение. Вклад во взаимодействие между мишенью  $T$  и налетающей на нее частицей  $P$  дает только компонента  $A^-$ , поскольку, как уже упоминалось, цветовой ток партонов частицы  $P$  имеет только компоненту  $J_+^a = \rho^a(\vec{x}, x^-)$ . Поле  $\alpha_a$  не зависит от продольной координаты  $x^-$  и отлично от нуля лишь в малом «временном» интервале около  $x^+ = 0$  (поле ударной волны). Одним из главных допущений модели является замена квантового поля мишени на классическое поле  $\alpha_a(\vec{x}, x^+)$ , характеризуемое статистическим весом  $W[\alpha]$ . Соответственно усреднение при вычислении элементов  $S$ -матрицы по квантовому состоянию мишени  $|T\rangle$  заменяется на усреднение по всем классическим полевым конфигурациям с весом  $W[\alpha]$ :

$$\begin{aligned} & \langle (T | \otimes \langle P |) \hat{S} (| P \rangle \otimes | T \rangle) \rightarrow \\ & \rightarrow \int D\alpha W[\alpha] S[Y, \alpha], \quad S[Y, \alpha] = \langle P | \hat{S} | P \rangle. \end{aligned}$$

Основанием для классического рассмотрения поля мишени  $T$  служат большие квантовые числа заполнения при высоких энергиях и малых  $x$ , например для мишени  $T$ , представляющей собой ядро с большим  $A \gg 1$  числом нуклонов. Величина  $\rho^a(\vec{x}) = \rho^a(\vec{x}, x^- = 0) = \int \rho^a(\vec{x}, k^+) dk^+$  является оператором цветового тока партонов частицы  $P$ :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^a(\vec{x}, k^+) &= \hat{a}_{\vec{x}, k^+, b}^+ T_{bc}^a \hat{a}_{\vec{x}, k^+, c} + \hat{b}_{\vec{x}, k^+, i}^+ t_{ij}^a \hat{b}_{\vec{x}, k^+, j} - \\ &- \hat{c}_{\vec{x}, k^+, j}^+ t_{ji}^a \hat{c}_{\vec{x}, k^+, i} \end{aligned}$$

где  $\hat{a}^+$ ,  $\hat{b}^+$  и  $\hat{c}^+$  – операторы рождения глюонов, кварков и антикварков в частице  $P$  соответственно;  $T_{bc}^a = -if^{abc}$  и  $t_{ij}^a$  – генераторы группы цветовой группы  $SU(N_c)$ . Эти операторы  $\rho^a$  удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям алгебры токов:

$$[\hat{\rho}^a(\vec{x}), \hat{\rho}^b(\vec{y})] = if^{abc} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \hat{\rho}^c(\vec{x}).$$

Изменение быстроты с  $Y$  до  $Y + \delta Y$  можно рассматривать как образование интервала быстрот, в который быстрые партоны частицы  $P$  испускают медленные глюоны. Изменение  $S[Y, \alpha] = \langle P | \hat{S} | P \rangle$  происходит за счет поправки к вектору состояния частицы  $P$ . Уравнение эволюции

$$\frac{dS[Y, \alpha]}{dY} = \hat{H}S[Y, \alpha]$$

записывается через JIMWLK гамильтониан:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2x d^2y d^2z K_{zxy} \frac{\delta}{\delta \alpha^a(\vec{x})} [1 + \\ &+ V(\vec{x})V^+(\vec{y}) - V(\vec{x})V^+(\vec{z}) - V(\vec{z})V^+(\vec{y})]_{ab} \frac{\delta}{\delta \alpha^b(\vec{y})}, \end{aligned} \quad (41)$$

в котором ядро

$$K_{zxy} = \frac{(\vec{z} - \vec{y})(\vec{z} - \vec{x})}{(\vec{z} - \vec{y})^2 (\vec{z} - \vec{x})^2},$$

а  $V(\vec{x})$  – оператор линии Вильсона. Для рассеянием синглетных по цвету объектов на величину  $S[\alpha, Y]$  налагаются дополнительные ограничения

$$\int \frac{\delta S[Y, \alpha]}{\delta \alpha^a(\vec{x})} d^2x = 0, \quad \int V_{ba}^+(\vec{x}) \frac{\delta S[Y, \alpha]}{\delta \alpha^a(\vec{x})} d^2x = 0, \quad (42)$$

выражающие инвариантность  $S[\alpha, Y]$  относительно вращений в цветовом пространстве. При условиях (42) гамильтониан (41) можно записать как

$$\begin{aligned} \hat{H}_d &= -\frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^2x d^2y d^2z K_{zxy}^d [1 + V(\vec{x})V^+(\vec{y}) - \\ &- V(\vec{x})V^+(\vec{z}) - V(\vec{z})V^+(\vec{y})]_{ab} \frac{\delta^2}{\delta \alpha^a(\vec{x}) \delta \alpha^b(\vec{y})}, \end{aligned}$$

где величина  $K_{zxy}^d$  представляет собой дипольное ядро:

$$K_{zxy}^d = \frac{(\vec{x} - \vec{y})^2}{(\vec{z} - \vec{x})^2 (\vec{z} - \vec{y})^2}.$$

Для оператора  $\hat{S} = 1 - N(\vec{x}, \vec{y}, Y) = \frac{1}{N_c} \text{Tr}(U^\dagger(\vec{y})U(\vec{x}))$ , представляющего цветовой диполь, это дает уравнение ВК.

### Заключение

Приведенный обзор является довольно поверхностным и далеко не полным. Он может служить лишь введением в большой и интересный раздел физики больших энергий, называемый физикой малых  $x$ . Этот раздел приобретает все большее значение в связи с его применением как для описания результатов экспериментов по лептон-адронным (HERA), адрон-адронным (TEVATRON) и ядер-ядерным (RHIC) столкновениям, так и для составления физической программы и получения предсказаний для Большого адронного коллайдера (LHC).

### Список литературы

1. *Bogolyubov N. N., Struminsky B. V., Tavkhelidze A. N.* On the Composite Models in Theories of Elementary Particles. Preprint JINR, Dubna. 1965. Vol. D-1968.
2. *Tavkhelidze A. N.* Higher symmetries and composite models of elementary particles // High Energy Physics and Elementary Particles, Lectures presented at Seminar Trieste, May 3 – June 30, 1965. Vienna, 1965. P. 753–762.
3. *Bogolyubov N. N., Matveev V. A., Nguen Van Hieu et al.* Relativistic invariant equations for the composite particles and form factors // JINR preprint, Dubna. 1965. Vol. D-2075.
4. *Han M., Nambu Y.* Three Triplet Model with Double SU(3) Symmetry // Phys. Rev. B. 1965. Vol. 139.
5. *Gell-Mann M.* Quarks // Acta Phys. Austriaca Suppl. Phys. 1972. Vol. 9.
6. *Adler S. L.* Axial-vector vertex in spinor electrodynamics // Phys. Rev. 1969. Vol. 177.
7. *Bell J. S., Jackiw R.* A PCAC puzzle: in the sigma model // Nuovo Cim. A. 1969. Vol. 60.
8. *Gross D. J., Wilczek F.* Asymptotically Free Gauge Theories // Phys. Rev. D. 1973. Vol. 8.
9. *Politzer H. D.* Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? // Phys. Rev. Lett. 1973. Vol. 30.
10. *Bjorken J. D., Paschos E. A.* Inelastic Electron Proton and gamma Proton Scattering, and the Structure of the Nucleon // Phys. Rev. 1969. Vol. 185.
11. *Belavin A. et al.* Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations // Phys. Lett. B. 1975. Vol. 59.
12. *Polyakov A. M.* Quark Confinement and Topology of Gauge Groups // Nucl. Phys. B. 1977. Vol. 120.
13. *Gribov V. N., Lipatov V. N.* Deep inelastic  $e p$  scattering in perturbation theory // Sov. J. Nucl. Phys. 1972. Vol. 15.
14. *Lipatov L. N.* The parton model and perturbation theory // Sov. J. Nucl. Phys. 1975. Vol. 20.
15. *Altarelli G., Parisi G.* Asymptotic Freedom in Parton Language // Nucl. Phys. B. 1977. Vol. 126.
16. *Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С.* Излучение релятивистских электронов // М.: Атомиздат, 1973.
17. *Fadin V. S., Kuraev E. A., Lipatov L. N.* On the Pommeranchuk Singularity in Asymptotically Free Theories // Phys. Lett. B. 1975. Vol. 60.
18. *Kuraev E. A., Lipatov L. N., Fadin V. S.* Multi-Reggeon Processes in the Yang-Mills Theory // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1976. Vol. 71.
19. *Balitskii Ya. Ya., Lipatov L. N.* The Pommeranchuk Singularity in Quantum Chromodynamics // Sov. J. Nucl. Phys. 1978. Vol. 28.
20. *Gell-Mann M., Goldberger M. L., Low F. E. et al.* Elementary Particles of Conventional Field Theory as Regge Poles. III // Phys. Rev. B. 1964. Vol. 133.
21. *Gribov V. N.* Partial waves with complex orbital angular momenta and the asymptotic behavior of the scattering amplitude // Sov. Phys. JETP. 1962. Vol. 14.
22. *Chew G. F., Frautschi S. C.* Principle of Equivalence for all Strongly Interacting Particles within the S-Matrix Framework // Phys. Rev. Lett. 1961. Vol. 7.
23. *Gribov V. N., Mur V. D., Kobzarev I. Y. et al.* On the properties of amplitudes with logarithmically increasing interaction radius // Sov. J. Nucl. Phys. 1971. Vol. 13.
24. *Lukaszuk L., Nicolescu B.* Possible interpretation of pp rising total cross sections // Lett. Nuovo Cim. 1973. Vol. 8.
25. *Лунатов Л. Н.* Реджезация векторного мезона и вакуумная особенность в неабелевых калибровочных теориях // Ядерная физика. 1976. Т. 23.
26. *Ter-Martirosyan K. A.* Asymptotic behaviour of essentially inelastic collisions // Nucl. Phys. 1965. Vol. 68.
27. *Fadin V. S.* Multi-Reggeon Processes In QCD // Phys. Atom. Nucl. 2003. Vol. 66.

28. Фадин В. С. Реджевская траектория глюона в двухпетлевом приближении // *Zh. Eksp. Teor. Fiz. Pis'ma*. 1995. Vol. 61.
29. Fadin V. S., Fiore R., Quartarolo A. Reggeization of the quark-quark scattering amplitude in QCD // *Phys. Rev. D*. 1996. Vol. 53.
30. Kotsky M. I., Fadin V. S. Reggeization of the amplitude of gluon-gluon scattering // *Yad. Fiz.* 1996. Vol. 59.
31. Fadin V. S., Fiore R., Kotsky M. I. Gluon Reggeization in QCD in the next-to-leading order // *Phys. Lett. B*. 1995. Vol. 359.
32. Fadin V. S., Fiore R., Kotsky M. I. Gluon Regge trajectory in the two loop approximation // *Phys. Lett. B*. 1996. Vol. 387.
33. Blumlein J., Ravindran V., Neerven W. L. van On the Gluon Regge Trajectory in // *Phys. Rev. D*. 1998. Vol. 58.
34. Del Duca V., Glover E. W. N. The High-energy limit of QCD at two loops // *JHEP*. 2001. Vol. 0110.
35. Балицкий Я. Я., Липатов Л. Н., Фадин В. С. Реджевские процессы в неабелевых калибровочных теориях // *Материалы IV зимней школы ЛИЯФ*. Л., 1979.
36. Fadin V. S., Fiore R., Kozlov M. G. et al. Proof of the multi-Regge form of QCD amplitudes with gluon exchanges in the NLA // *Phys. Lett. B*. 2006. Vol. 639.
37. Fadin V. S., Fiore R. The Generalized nonforward BFKL equation and the 'bootstrap' condition for the gluon Reggeization in the NLLA // *Phys. Lett. B*. 1998. Vol. 440.
38. Fadin V. S., Lipatov L. N. Radiative corrections to QCD scattering amplitudes in a multi-Regge kinematics // *Nucl. Phys. B*. 1993. Vol. 406.
39. Fadin V. S., Fiore R., Quartarolo A. Quark contribution to the reggeon-reggeon-gluon vertex in QCD // *Phys. Rev. D*. 1994. Vol. 50.
40. Fadin V. S., Fiore R., Kotsky M. I. Gribov's theorem on soft emission and the reggeon-reggeon-gluon vertex at small transverse momentum // *Phys. Lett. B*. 1996. Vol. 389.
41. Del Duca V., Schmidt C. R. Virtual next-to-leading corrections to the Lipatov vertex // *Phys. Rev. D*. 1999. Vol. 59.
42. Fadin V. S., Fiore R., Papa A. One loop Reggeon-Reggeon gluon vertex at arbitrary space-time dimension // *Phys. Rev. D*. 2001. Vol. 63.
43. Fadin V. S., Fiore R., Flachi A., Kotsky M. I. Quark-antiquark contribution to the BFKL kernel // *Phys. Lett. B*. 1998. Vol. 422.
44. Fadin V. S., Kotsky M. I., Lipatov L. N. One-loop correction to the BFKL kernel from two gluon production // *Phys. Lett. B*. 1997. Vol. 415.
45. Fadin V. S., Lipatov L. N. BFKL pomeron in the next-to-leading approximation // *Phys. Lett. B*. 1998. Vol. 429.
46. Ciafaloni M., Camici G. Energy scale(s) and next-to-leading BFKL equation // *Phys. Lett. B*. 1998. Vol. 430.
47. Abt I. et al. Measurement of the proton structure function  $F_2(x, Q^2)$  in the low  $x$  region at HERA // *Nucl. Phys. B*. 1993. Vol. 407.
48. Brodsky S. J., Fadin V. S., Kim V. T. et al. The QCD pomeron with optimal renormalization // *JETP Lett.* 1999. Vol. 70.
49. Brodsky S. J., Fadin V. S., Kim V. T. et al. High-energy QCD asymptotics of photon-photon collisions // *JETP Lett.* 2002. Vol. 76.
50. Brodsky S. J., Lepage G. P., Mackenzie P. B. On The Elimination Of Scale Ambiguities In Perturbative Quantum Chromodynamics // *Phys. Rev. D*. 1983. Vol. 28.
51. Ciafaloni M., Colferai D., Salam G. P. Renormalization group improved small  $x$  equation // *Phys. Rev. D*. 1999. Vol. 60.
52. Ciafaloni M., Colferai D. The BFKL equation at next-to-leading level and beyond // *Phys. Lett. B*. 1999. Vol. 452.
53. Ciafaloni M., Colferai D., Salam G. P., Stasto A. M. Renormalization group improved small  $x$  Green's function // *Phys. Rev. D*. 2003. Vol. 68.
54. Altarelli G., Ball R. D., Forte S. Resummation of singlet parton evolution at small  $x$  // *Nucl. Phys. B*. 2000. Vol. 575.
55. Altarelli G., Ball R. D., Forte S. Small  $x$  resummation and HERA structure function data // *Nucl. Phys. B*. 2001. Vol. 599.
56. Altarelli G., Ball R. D., Forte S. Factorization and resummation of small  $x$  scaling violations with running coupling // *Nucl. Phys. B*. 2002. Vol. 621.
57. Fadin V. S., Fiore R., Papa A. The Quark part of the nonforward BFKL kernel and the «bootstrap» for the gluon Reggeization // *Phys. Rev. D*. 1999. Vol. 60.

58. *Fadin V. S., Gorbachev D. A.* Non-forward colour octet BFKL kernel // *Pis'ma v Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 2000. Vol. 71.
59. *Fadin V. S., Fiore R.* Non-forward BFKL pomeron at next-to-leading order // *Phys. Lett. B.* 2005. Vol. 610.
60. *Gribov V. N.* The theory of complex angular momenta: Gribov lectures on theoretical physics / Ed. by P. Landshoff. Cambridge University Press, 2003.
61. *Bartels J., Wusthoff M.* The Triple Regge limit of diffractive dissociation in deep inelastic scattering // *Z. Phys. C.* 1995. Vol. 66.
62. *Bartels J., Lipatov L. N., Wusthoff M.* Conformal Invariance of the Transition Vertex  $2 \rightarrow 4$  gluons // *Nucl. Phys. B.* 1996. Vol. 464.
63. *Bartels J., Lipatov L. N., Vacca G. P.* Interactions of reggeized gluons in the Mobius representation // *Nucl. Phys. B.* 2005. Vol. 706.
64. *Bartels J., Lipatov L. N., Salvadore M. et al.* Deformed spectral representation of the BFKL kernel and the bootstrap for gluon reggeization // *Nucl. Phys. B.* 2005. Vol. 726.
65. *Bartels J.* High-Energy Behavior in a Nonabelian Gauge Theory. 2. First Corrections to Beyond the Leading LNS Approximation // *Nucl. Phys. B.* 1980. Vol. 175.
66. *Kwiecinski J., Praszalowicz M.* Three Gluon Integral Equation And Odd C Singlet Regge Singularities In QCD // *Phys. Lett. B.* 1980. Vol. 94.
67. *Jaroszewicz T.* Infrared Divergences and Regge Behavior in QCD // *Acta Phys. Polon. B.* 1980. Vol. 11.
68. *Lipatov L. N.* High-energy asymptotics of multicolor QCD and exactly solvable lattice models // *JETP. Lett.* 1994. Vol. 59.
69. *Lipatov L. N.* Gauge invariant effective action for high-energy processes in QCD // *Nucl. Phys. B.* 1995. Vol. 452.
70. *Nikolaev N. N., Zakharov B. G.* Colour Transparency and Scaling Properties of Nuclear Shadowing in Deep Inelastic Scattering // *Z. Phys. C.* 1991. Vol. 49.
71. *Mueller A. H.* Soft gluons in the infinite momentum wave function and the BFKL pomeron // *Nucl. Phys. B.* 1994. Vol. 415.
72. *Nikolaev N. N., Zakharov B. G.* The triple-pomeron regime and structure function of the pomeron in diffractive deep inelastic scattering at very small  $x$  // *Z. Phys. C.* 1994. Vol. 64.
73. *Mueller A. H.* Unitarity and the BFKL pomeron // *Nucl. Phys. B.* 1995. Vol. 437.
74. *Lipatov L. N.* The Bare Pomeron In Quantum Chromodynamics // *Sov. Phys. JETP.* 1986. Vol. 63.
75. *Nikolaev N. N., Zakharov B. G., Zoller V. R.* The  $s$  channel approach to Lipatov's pomeron and hadronic cross-sections // *JETP Lett.* 1994. Vol. 59.
76. *Mueller A. H., Patel B.* Single and double BFKL pomeron exchange and a dipole picture of high-energy hard processes // *Nucl. Phys. B.* 1994. Vol. 425.
77. *Fadin V. S., Fiore R., Papa A.* On the coordinate representation of NLO BFKL // *Nucl. Phys. B.* 2007. Vol. 769.
78. *Balitsky I.* Quark contribution to the small- $x$  evolution of color dipole // *Phys. Rev. D.* 2007. Vol. 75.
79. *Cheng H., Wu T. T.* Logarithmic factors in the high-energy behavior of quantum electrodynamics // *Phys. Rev. D.* 1970. Vol. 10.
80. *Gribov V. N., Lipatov L. N., Frolov G. V.* The leading singularity in the  $j$  plane in quantum electrodynamics // *Sov. J. Nucl. Phys.* 1971. Vol. 12.
81. *Fadin V. S., Fiore R., Grabovsky A. V. et al.* The dipole form of the gluon part of the BFKL kernel // *arXiv:0705.1885/hep-ph.*
82. *Gribov L. V., Levin E. M., Ryskin M. G.* Semihard Processes in QCD // *Phys. Rep.* 1983. Vol. 100.
83. *Balitsky I.* Operator expansion for high-energy scattering // *Nucl. Phys. B.* 1996. Vol. 463.
84. *Balitsky I.* High-Energy QCD and Wilson Lines // *arXiv:hep-ph/0101042*
85. *Kovchegov Y. V.* Small  $xF_2$  structure function of a nucleus including multiple pomeron exchanges // *Phys. Rev. D.* 1999. Vol. 60.
86. *Kovchegov Y. V., Mueller A. H.* Gluon production in current nucleus and nucleon-nucleus collisions in a quasiclassical approximation // *Nucl. Phys. B.* 1998. Vol. 529.
87. *McLerran L., Venugopalan R.* Gluon distribution functions for very large nuclei at small transverse momentum // *Phys. Rev. D.* 1994. Vol. 49.
88. *Jalilian-Martin J., Kovner A., Wegert H.* The Wilson renormalization group for low  $x$

physics: Gluon evolution at finite parton density // *Phys. Rev. D*. 1999. Vol. 59.

89. Леонидов А. В. Плотная глюонная материя в соударениях ядер // *УФН*. 2005. Т. 175, вып. 4.

90. Iancu E., Leonidov A., McLerran L. The Renormalization group equation for the color glass condensate // *Phys. Let. B*. 2001. Vol. 510.

91. Iancu E., Leonidov A., McLerran L. Nonlinear gluon evolution in the color glass condensate. 1 // *Nucl. Phys. A*. 2001. Vol. 692.

92. Iancu E., Venugopalan R. The Color Glass Condensate and High Energy Scattering in QCD // *Review for QGP3* / Eds. R. C. Hwa, X.-N. Wang. World Scientific, 2003.

93. Iancu E., Leonidov A., McLerran L. The Colour Glass Condensate: An Introduction // *QCD Perspectives on Hot and Dense Matter*, NATO Science Series, Kluwer. 2002.

94. Jalilian-Martin J., Kovner A., Leonidov A. et al. Wilson renormalization group for low  $x$  physics: Towards the high density regime // *Phys. Rev. D*. 1999. Vol. 59.

*Материал поступил в редколлегию 08.10.2007*