УДК 535

Е. В. Бакланов

Институт лазерной физики СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 13/2, Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: baklanov@laser.nsc.ru

КОМПЛЕКСНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ [*]

Поле эллиптически поляризованной плоской волны записано в форме, удобной для анализа практических задач. Амплитуда волны выражена через четыре параметра: E – модуль, φ – фаза, ψ – угол, задающий положение плоскости поляризации, ε – эллиптичность ($|\varepsilon|$ – отношение осей эллипса).

Ключевые слова: эллиптическая поляризация, оптическая активность, укороченные уравнения.

При решении задач, связанных с распространением эллиптически поляризованной электромагнитной волны, возникает проблема удобной записи компонент поля. Поясним это более подробно. Электрическое поле монохроматической плоской волны $\mathbf{E}(t)$, распространяющейся вдоль оси z, в фиксированной точке пространства имеет проекции

$$E_x(t) = a_x \cos(\omega t - \varphi_x), \quad E_y(t) = a_y \cos(\omega t - \varphi_y). \tag{1}$$

Кроме частоты ω, поле задается двумя проекциями амплитуд и двумя фазами, т. е. четырьмя параметрами

$$a_x,\ \varphi_x,\ a_y,\ \varphi_y. \tag{2}$$

Однако на практике для описания поля чаще пользуются другими параметрами, а именно

$$E,\ \varphi,\ \psi,\ \varepsilon, \tag{3}$$

где E – модуль поля, φ – фаза, ψ – угол между направлением большой оси эллипса и осью x, ε – эллиптичность. После того как решена задача с использованием поля в форме (1), возникает проблема преобразования параметров (2) к параметрам (3). Эту процедуру бывает трудно выполнить аналитически, что сильно затрудняет анализ полученных результатов. Особенно часто эта ситуация возникает при решении задач нелинейной оптики.

В этой статье получено выражение для поля, где сразу используются параметры (3). Использование комплексной формы записи для поля (1) существенно упрощает переход к параметрам (3). Подробно излагаются вопросы, связанные с поляризацией излучения. Это связано с методологическим характером работы.

Поляризация плоской волны

Найдем уравнение траектории, по которой движется конец вектора $E(t)$ в плоскости xy. Так как поле (1) периодично с периодом $T = 2\pi/\omega$, то траектория является замкнутой кривой. Введем вспомогательную переменную $\xi = \omega t$ и преобразуем (1) к виду

$$E_x(t) = a_x\left(\cos\xi\cos\varphi_x + \sin\xi\sin\varphi_x\right),$$

$$E_y(t) = a_y\left(\cos\xi\cos\varphi_y + \sin\xi\sin\varphi_y\right),$$

Отсюда имеем

$$\frac{E_x}{a_x}\sin\varphi_y - \frac{E_y}{a_y}\sin\varphi_x = -\cos\xi\sin\left(\varphi_x - \varphi_y\right),$$

$$\frac{E_x}{a_x}\cos\varphi_y - \frac{E_y}{a_y}\cos\varphi_x = \sin\xi\sin\left(\varphi_x - \varphi_y\right).$$

[*] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 07-02-01028 и 08-02-00991). Автор благодарит А. В. Тайченачева за полезные обсуждения работы.

© Е. В. Бакланов, 2008

Возведя в квадрат правые и левые части этих уравнений и складывая их, найдем

$$\left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2+\left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2-$$

$$-\frac{2E_xE_y}{a_xa_y}\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi, \qquad (4)$$

где $\Delta\varphi=\varphi_y-\varphi_x$. Уравнение (4) является параметрическим уравнением эллипса, где параметром является время *t*.

Как видно из приведенного ниже рисунка, эллипс вписан в прямоугольник, стороны которого параллельны осям *x*, *y* и имеют длины $2a_x$ и $2a_y$. Ориентация эллипса определяется углом ψ между большой осью эллипса и осью *x*, который определяется выражением

$$\mathrm{tg}2\psi=\frac{2a_xa_y\cos\Delta\varphi}{a_x^2-a_y^2}. \qquad (5)$$

Соотношение (5) можно получить, перейдя в систему координат *x'y'*, которая повернута относительно системы xy на угол ψ (см. прил., формула П5), и потребовав в уравнении (4) обращения в ноль члена с произведением E_xE_y. Так как $\psi=0$, $\Delta\varphi=\pi/2$ в системе координат *x'y'*, то уравнение (4) принимает вид

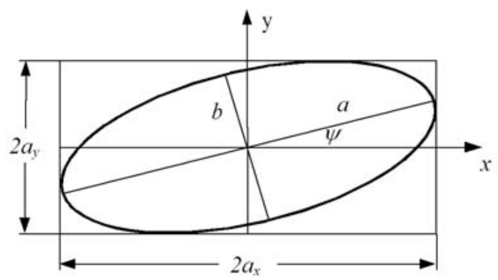
$$\left(\frac{E_x}{a}\right)^2+\left(\frac{E_y}{b}\right)^2=1, \qquad (6)$$

а поле (1) записывается как

$$E_x(t)=a\cos(\omega t-\varphi),$$
$$E_y(t)=b\sin(\omega t-\varphi), \qquad (7)$$

где $a\equiv a_x$, $b\equiv a_y$, $\varphi\equiv\varphi_x$; амплитуду a считаем положительной величиной, величина b может быть в пределах $-a\le b\le a$. Очевидно, *a* – большая полуось эллипса, $|b|$ – малая. Нетрудно видеть, что поле (7) удовлетворяет уравнению (6).

Таким образом, при распространении плоской монохроматической электромагнитной волны вектор $\mathbf{E}(t)$ в плоскости $z=\mathrm{const}$ описывает эллипс. Такая волна называется *эллиптически поляризованной*. Плоскость, проходящая через направление большой оси эллипса и ось *z*, называется *плоскостью поляризации*. Двигаясь по эллипсу, конец вектора **E** может вращаться по



часовой стрелке ($b>0$) или против часовой стрелки ($b<0$) для наблюдателя, смотрящего вдоль направления распространения волны (так называемое правило буравчика). В зависимости от направления вращения различают *правую эллиптическую поляризацию* ($b>0$) либо *левую эллиптическую поляризацию* ($b<0$). Рассмотрим частные случаи.

Линейная поляризация. Если $b=0$ то эллипс переходит в прямую. В этом случае волна называется *линейно поляризованной*.

Круговая поляризация. При $|b|=a$ вместо уравнения (6) имеем $E_x^2+E_y^2=a^2$, т. е. вектор $\mathbf{E}(t)$ движется по окружности. Пусть $\varphi=0$. Для *правой круговой поляризации*:

$$E_x^{(+)}(t)=a\cos\omega t,$$
$$E_y^{(+)}(t)=a\sin\omega t.$$

Для *левой круговой поляризации*:

$$E_x^{(-)}(t)=a\cos\omega t,$$
$$E_y^{(-)}(t)=-a\sin\omega t.$$

Суммарный вектор $\mathbf{E}(t)=\mathbf{E}^{(+)}(t)+\mathbf{E}^{(-)}(t)$ имеет компоненты

$$E_x(t)=2a\cos\omega t,$$
$$E_y(t)=0.$$

Мы видим, что сумма волн правой и левой круговых поляризаций с одинаковыми амплитудами дает линейную поляризацию.

Далее продолжим рассмотрение поляризационных свойств плоской монохроматической волны. Будет использоваться комплексная форма записи поля, которая более удобна для практических вычислений.

Комплексная форма записи поля

Компактное и более удобное для практических вычислений представление волновых полей основано на применении комплексной формы записи. Используя формулу Эйлера

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \qquad (8)$$

перепишем поле (1) в виде

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{A}\,e^{-i\omega t} + \text{к. с.}, \qquad (9)$$

$$\mathbf{A} = \sum_{n=x,y} A_n \mathbf{e}_n , \qquad (10)$$

где $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ – единичные векторы вдоль осей x и y, которые называются *ортами линейных поляризаций*, комплексный вектор $\mathbf{A}$ имеет проекции

$$A_x = a_x e^{i\varphi_x}, \quad A_y = a_y e^{i\varphi_y}, \qquad (11)$$

сокращение к. с. означает «комплексно-сопряженное выражение». Очевидно,

$$\mathbf{E}(t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}\,e^{-i\omega t}\right\}, \qquad (12)$$

где Re – знак действительной части комплексного выражения. Во многих случаях для упрощения записи знак Re опускают, т. е. пишут

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{A}\,e^{-i\omega t}. \qquad (13)$$

Форма записи (13) удобна, когда для нахождения полей используются линейные уравнения. Однако надо помнить, что сама по себе она бессмысленна, так как в левой части стоит действительная величина, а в правой – комплексная. Для нелинейных задач, когда возникают члены типа $\mathbf{E}(t)^2$, удобно использовать форму (9) [1–3]. Здесь мы будем использовать форму записи (13), а вектор $\mathbf{A}$ будем называть комплексной амплитудой.

Вместо орт линейных поляризаций часто используют *орты круговых поляризаций*, которые определяются как циклические орты для координат x и y (A1):

$$\mathbf{e}_{+1} = -(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}, \qquad (14)$$
$$\mathbf{e}_{-1} = (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}.$$

Разложение вектора $\mathbf{A}$ по этим ортам есть

$$\mathbf{A} = \sum_{q=\pm1} A_q \mathbf{e}_q , \qquad (15)$$

где

$$A_{+1} = -(A_x - iA_y)/\sqrt{2}, \qquad (16)$$
$$A_{-1} = (A_x + iA_y)/\sqrt{2}.$$

Нетрудно проверить, что при $A_{-1} = 0$ мы имеем правую круговую поляризацию, а при $A_{+1} = 0$ – левую. В системе координат $x'y'$, повернутой относительно системы xy на угол ψ, декартовы компоненты вектора (10), согласно (7), равны

$$A'_x = ae^{i\varphi}, \qquad (17)$$
$$A'_y = ib^{i\varphi}.$$

Для циклических компонент

$$A'_{+1} = -(A'_x - iA'_y)/\sqrt{2}, \qquad (18)$$
$$A'_{-1} = (A'_x + iA'_y)/\sqrt{2}$$

имеем

$$A'_q = -\frac{(b+qa)}{\sqrt{2}}e^{i\varphi}. \qquad (19)$$

Выразив a и b через *модуль амплитуды электрического поля* $E = \sqrt{a^2+b^2}$ и *параметр эллиптичности* $\varepsilon = b/a$, получим

$$A'_q = -\frac{E(q+\varepsilon)}{\sqrt{2(1+\varepsilon^2)}}e^{i\varphi}. \qquad (20)$$

Выполнив преобразование A'_q в систему координат xy согласно (П8), получим

$$A_q = -\frac{E(q+\varepsilon)}{\sqrt{2(1+\varepsilon^2)}}e^{i(\varphi-q\psi)}. \qquad (21)$$

Таким образом, плоская волна задается двумя комплексными величинами $A_{\pm1}$, которые выражаются через четыре действительных параметра: E – модуль поля, φ – фаза, ψ – угол между направлением большой оси эллипса и осью x, ε – эллиптичность ($-1 \le \varepsilon \le 1$, $|\varepsilon|$ – отношение полуосей эллипса). При $\varepsilon > 0$ вектор $\mathbf{E}(t)$ вращается по часовой стрелке, а при $\varepsilon < 0$ – против. В следующем параграфе мы приведем пример использования поля в форме (21).

Электрическое поле (13), согласно (15), (21), можно представить в виде

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{e}A\,e^{-i\omega t}, \qquad (22)$$

где $A = E\exp(i\varphi)$ – комплексная амплитуда, $\mathbf{e}$ – единичный вектор поляризации

$$\mathbf{e} = -\sum_{q=\pm1}\frac{q+\varepsilon}{\sqrt{2(1+\varepsilon^2)}}\mathrm{e}^{-iq\psi}\mathbf{e}_q, \qquad (23)$$

нормированный условием $\mathbf{e}\mathbf{e}^* = 1$. При $\varepsilon = 1$ мы имеем правую круговую поляризацию:

$$\mathbf{e} = -e^{-i\psi}\mathbf{e}_{+1}, \qquad (24)$$

а при $\varepsilon=-1$ – левую. В этих случаях говорить об угле ψ как об угле плоскости поляризации не имеет смысла, так как эллипс вырождается в круг; фазу $\psi+\pi$ в (24) можно включить в комплексную амплитуду A. При $\varepsilon=0$ реализуется линейная поляризация, так как эллипс становится отрезком линии. Действительно, из выражения (23) следует, что

$$\mathbf{e}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\psi}\mathbf{e}_{+1}-e^{i\psi}\mathbf{e}_{-1}\right)= \\ =\cos\psi\mathbf{e}_x+\sin\psi\mathbf{e}_y \qquad (25)$$

есть единичный вектор под углом ψ к оси x.

Оптическая активность

При распространении плоской монохроматической волны в среде параметры E, φ, ψ, ε меняются. Чтобы найти изменение этих параметров, естественно задать поле в форме (21). Для пояснения рассмотрим простой пример. Некоторые вещества (например, кварц, раствор сахара в воде) при прохождении через них поляризованного света поворачивают его плоскость поляризации. О таких веществах говорят, что они обладают *оптической активностью*. Для существования оптической активности необходимо, чтобы $n_{\pm1}$ – показатели преломления для правой и левой круговых поляризаций были различны. В этом случае амплитуда (21) изменяется по закону

$$A_q(z)=A_q e^{ik_q z}, \qquad (26)$$

где $k_{\pm1}=n_{\pm1}\omega/c$. Если ввести величины $k=(k_++k_-)/2$, $\alpha=(k_+-k_-)/2$, то поле (26) переписывается в виде

$$A_q(z)=-\frac{E(q+\varepsilon)}{\sqrt{2(1+\varepsilon^2)}}e^{i\varphi(z)-iq\psi(z)},$$

где $\psi(z)=\psi+\alpha z$, $\varphi(z)=\varphi+kz$. Видно, что при распространении волны параметры эллипса не меняются, однако, плоскость его поляризации поворачивается на угол $\Delta\psi=\alpha z$. Поле в целом приобретает добавку к фазе $\Delta\varphi=kz$.

Заключение

Задача об оптической активности – это простой случай применения параметров E, φ, ψ, ε. Форму записи компонент поля (21) можно использовать при решении практических задач в различных средах (поглощающих, анизотропных, нелинейных). Уравнения Максвелла обычно удается свести к системе укороченных уравнений – в нашем случае для параметров E, φ, ψ, ε, непосредственно измеряемых в эксперименте. Важно отметить, что при анализе решения не возникает проблема разделения оптических явлений: амплитуде E соответствует коэффициент поглощения (усиления), фазе φ – показатель преломления, повороту плоскости поляризации ψ – оптическая активность, эллиптичности ε – отношение осей эллипса.

Список литературы

1. *Ахманов С. А., Никитин С. Ю.* Физическая оптика. М.: Наука, 2004.

2. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков Ф. П.* Теория волн. М.: Наука, 1979.

3. *Дмитриев В. Г., Тарасов Л. В.* Прикладная нелинейная оптика. М.: Физматлит, 2004.

4. *Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.

Материал поступил в редколлегию 10.12.2007

The field of an elliptically polarized wave is written down in the form of, convenient for the analysis of practical problems. The amplitude of the wave is expressed through four parameters: module, phase, angle of polarization plane, and ellipticity (a ratio of the ellipse axes).

Keywords: elliptically polarization, optical activity, shortened equations.

Приложение

Циклические координаты

Мы пользуемся распространенным определением циклических координат [4]. *Циклические орты* $\mathbf{e}_q$ ($q = 0, \pm 1$) определяются соотношениями

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z,$$
$$\mathbf{e}_{+1} = -(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}, \qquad (\text{П}1)$$
$$\mathbf{e}_{-1} = (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2},$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – декартовы орты. Орты $\mathbf{e}_q$ образуют ортонормированный базис:

$$\mathbf{e}_q \mathbf{e}^*_{q'} = \delta_{qq'}.$$

Разложение вектора $\mathbf{a}$ по ортам $\mathbf{e}_q$ имеет вид

$$\mathbf{a} = \sum_{q=0,\pm 1} a_q \mathbf{e}_q, \qquad (\text{П}2)$$

где

$$a_0 = a_z,$$
$$a_{+1} = -(a_x - ia_y)/\sqrt{2}, \qquad (\text{П}3)$$
$$a_{-1} = (a_x + ia_y)/\sqrt{2}.$$

Обратные соотношения

$$a_z = a_0,$$
$$a_x = -(a_{+1} - a_{-1})/\sqrt{2}, \qquad (\text{П}4)$$
$$a_y = -i(a_{+1} + a_{-1})/\sqrt{2}.$$

Рассмотрим преобразование циклических координат при повороте системы координат. Пусть $x'y'z$ – система координат, которая повернута относительно системы xyz на угол ψ вокруг оси z. Для декартовых компонент

$$a'_z = a_z,$$
$$a'_x = a_x \cos\psi + a_y \sin\psi, \qquad (\text{П}5)$$
$$a'_y = -a_x \sin\psi + a_y \cos\psi.$$

Воспользовавшись определением (П3), имеем

$$a'_q = a_q e^{iq\psi}, \qquad (\text{П}6)$$

где a'_q – циклические компоненты вектора $\mathbf{a}$ в системе $x'y'z$:

$$a'_0 = a'_z,$$
$$a'_{+1} = -(a'_x - ia'_y)/\sqrt{2}, \qquad (\text{П}7)$$
$$a'_{-1} = (a'_x + ia'_y)/\sqrt{2}.$$

Обратное преобразование из системы координат $x'y'z$ в систему xyz дается формулой

$$a_q = a'_q e^{-iq\psi}. \qquad (\text{П}8)$$