

## КОЛЕБАНИЯ ЭМИТТАНСА В ЛОКАЛЬНО ХОЛОДНОМ ПУЧКЕ

Явления, встречающиеся в пучках с преобладанием собственного заряда, достаточно точно описываются моделью локально холодного пучка. В работе рассматривается эта модель для эффектов продольной и поперечной неоднородностей собственного заряда. Обоснован вывод, что явление колебаний эмиттанса в таких пучках, используемое в широко известной технике «emittance compensation», является свойством модели и не зависит явно от свойств электронно-оптического канала. Приведена универсальная формула для оценки эмиттанса в каналах с локально холодным пучком.

*Ключевые слова:* собственный заряд, модель локально холодного пучка, колебания эмиттанса.

## Введение

Один из главных показателей качества пучка – поперечный эмиттанс (обычно прилагательное «поперечный» опускается) – есть мера эффективного объема, занимаемого пучком в поперечной фазовой плоскости (ФП). В последнее время имеется особый спрос на электронные ускорители с предельно малым эмиттансом, 1 мм·мрад (нормализованный) и менее, и большим пиковым током – сотни и тысячи ампер. Такие машины используются в коротковолновых лазерах на свободных электронах [1], линейных коллайдерах [2], комптоновских источниках излучения [3] и источниках синхротронного излучения четвертого поколения на базе ускорителей-рекуператоров [4].

В ряду эффектов собственный заряд превалирует в тех частях машины, где энергия

пучка относительно невелика. Его влияние падает обратно пропорционально энергии и квадрату размера пучка. Таким образом, наиболее сильно эффект собственного заряда проявляется именно в инжекторах. В настоящее время все инжекторы с рекордно малым эмиттансом и большим пиковым током используют технику, известную как «emittance compensation». Она позволяет, при прочих равных условиях, уменьшить эмиттанс машины в десятки раз.

По-видимому, Карлстен впервые упомянул в [5], что нормализованный эмиттанс пучка с превалированием собственного заряда может не только возрастать, но и уменьшаться. Движение пучка рассматривается в следующих предположениях:

- 1) сгусток длинный в сопровождающей системе координат, так что движение каждого его поперечного сечения (слоя) можно рассматривать независимо;
- 2) система аксиально-симметрична;
- 3) внешние фокусирующие силы линейны;
- 4) сгусток моноэнергетичен;
- 5) каждый слой однородно заряжен;
- 6) эмиттанс каждого слоя нулевой.

Суть явления лучше всего объясняет рис. 1, взятый из более поздней работы того же автора [6]. На нем изображено движение двух слоев сгустка с разными токами в канале с одной тонкой линзой. Видно, что поперечные фазовые портреты (ПФП) стартовавших с одними

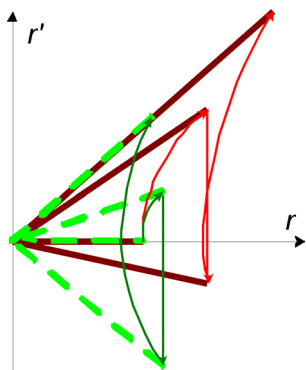


Рис. 1. Движение двух слоев в канале с линзой

и теми же начальными условиями слоев расходятся, а затем опять накладываются друг на друга. Эмиттанс такой системы сначала увеличивается, а затем уменьшается до нуля. Автор утверждает, что, таким образом, «наличие линзы меняет всю физику».

По-видимому, первое аналитическое рассмотрение «emittance compensation» опубликовано Серафини и Розенцвейгом [7]. Авторы, как и Карлстен ранее, рассмотрели движение пучка в тех же предположениях. Они использовали нелинейное уравнение движение слоя, взятое у Лоусона, преобразовали его в удобный для анализа ускоряющей высокочастотной структуры вид и получили для этого случая аналитическое решение, названное инвариантной огибающей. Далее получено линеаризованное уравнение для возмущения инвариантной траектории. Сделан вывод о необходимости согласования пучка в целом с инвариантной огибающей для успешной «компенсации эмиттанса».

В дальнейшем опубликовано немало работ по этому вопросу. Тем не менее выводы разных авторов нередко противоречат друг другу, а их необоснованность не позволяет выбрать из них единственно верный.

### Модель длинного локально холодного сгустка

Рассмотрим эффект продольной неоднородности собственного заряда. Будем считать, что шесть предположений Карлстена справедливы. Тогда движение слоя описывается уравнением Капчинского – Владимирского (КВ) [8] без эмиттанса:

$$\begin{cases} x'' = \frac{I}{I_0(\beta\gamma)^3} \frac{1}{x+y} - \frac{e}{p} G_x x, \\ y'' = \frac{I}{I_0(\beta\gamma)^3} \frac{1}{x+y} - \frac{e}{p} G_y y, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x$  и  $y$  – горизонтальный и вертикальный среднеквадратичные поперечные размеры;  $''$  – вторая производная по независимой координате  $z$ , отсчитываемой вдоль траектории центра масс пучка;  $I_0 = 4\pi \cdot mc^2 / Z_0 e$  – ток Альвена,  $\approx 17$  кА для электронов;  $Z_0 \approx 377$  Ом;  $\beta = v/c$  – отношение продольной скорости к скорости света;  $\gamma = \sqrt{1/(1-\beta^2)}$  – релятивистский фактор;  $e$  – заряд частицы;  $p$  – ее импульс;  $G$  –

фокусировка в канале, в нашем аксиально-симметричном случае  $G_x = G_y = eB^2/4p$  для соленоида. Поскольку мы рассматриваем аксиально-симметричные системы, но, в отличие от КВ, энергия пучка может меняться с  $z$ , преобразуем (1) к удобному для нас виду – для этого следует положить  $x = y$  и выразить гамильтониан системы через  $x$  и канонически сопряженный импульс  $\tilde{p} = \beta\gamma x'$ :

$$H = \frac{\tilde{p}^2}{2\beta\gamma} + \beta\gamma \left( \frac{gx^2}{2} - \frac{j}{2} \ln x \right),$$

где  $g = eG_x/p$  – приведенная фокусировка, а  $j = I/I_0(\beta\gamma)^3$  – безразмерный ток. Тогда уравнение движения будет следующим:

$$x'' + \frac{(\beta\gamma)'}{\beta\gamma} x' \equiv x'' + \frac{\gamma'}{\beta^2\gamma} x' = \frac{j}{2x} - gx. \quad (2)$$

Рассмотрим движение произвольного слоя с током  $j_1$  в сгустке – найдем решение (2) для его тока и начальных условий. Назовем это решение *главным*. Рассмотрим теперь какой-либо другой слой с током  $j_2$ . Если мы теперь умножим найденное решение на  $\sqrt{j_2/j_1}$ , это будет решение (2) для тока  $j_2$  (проверяется подстановкой). Назовем его *главным решением* для слоя  $j_2$ . Если все слои сгустка движутся по главным траекториям, их ПФП всегда лежат на одной прямой и эмиттанс такого сгустка всегда равен нулю. Тем не менее, в силу несогласования начального состояния с главной траекторией слой  $j_2$ , вообще говоря, движется по некоторой другой, возмущенной траектории в ФП. Если геометрия эмиттера не зависит от времени, то размеры и наклоны всех слоев на нем одинаковы. Выбрав траекторию некоторого слоя с заданными начальными условиями в качестве главной, найдем главные траектории для других слоев с размерами и наклонами, пропорциональными токам слоев. Но из-за масштабирования главных траекторий их начальные условия не совпадают с реальными на эмиттере, так что все слои с токами, отличными от референсного, движутся по возмущенным траекториям. Пусть  $x_0$  – главная траектория некоторого слоя, а  $x_1$  – возмущенная, т. е. его реальная траектория. Если этот слой расположен вблизи референсного, т. е. движущегося по главной траектории, относительное отклонение  $\delta = x_1/x_0 - 1$

мало и для него справедливо линеаризованное уравнение

$$\delta'' + \left( 2 \frac{x'_0}{x_0} + \frac{(\beta\gamma)'}{\beta\gamma} \right) \delta' = - \frac{j}{x_0^2} \delta. \quad (3)$$

Это уравнение обладает двумя важными свойствами: оно не зависит явно от фокусировки в канале и коэффициент при  $\delta$  в правой части всегда отрицателен, т. е. его решения всегда носят колебательный характер. Относительная амплитуда колебаний при этом может возрастать или убывать с изменением  $x^2\beta\gamma$ . Назовем возмущенное относительно главной траектории движение *зарядовыми колебаниями*, а (3) – уравнением малых зарядовых колебаний. В силу линейности поведение его решения не зависит от амплитуды, т. е. малые зарядовые колебания когерентны.

На эмиттере (в том числе выпуклом или вогнутом) обычно ПФП всех слоев совпадают и представляют собой отрезки прямой. Далее вследствие зарядовых колебаний ПФП слоев разворачиваются веером, а затем опять собираются в линию дважды за «период», как на рис. 2. В работе [9] показано, что условие наложения ПФП слоев друг на друга и, следовательно, минимума эмиттанса сгустка есть  $\delta' = 0$ . На самом деле движение строго периодически лишь если  $x^2\beta\gamma = \text{const}$  и  $j/x^2 = \text{const}$ .

Таким образом, колебания эмиттанса в локально холодном длинном сгустке есть следствие когерентности зарядовых колебаний – они присутствуют всегда и не зависят явно от оптики в канале. Следовательно, наличие или отсутствие линзы в канале никак не влияет на физику явления.

Из-за нелинейности волновое число зарядовых колебаний зависит от амплитуды. В работах [9; 10] выведена формула для этого нелинейного сдвига в случае постоянных  $x$ ,  $\beta\gamma$  и  $j$ :

$$\frac{\Delta k}{k} \cong \frac{1}{12} a^2, \quad (4)$$

где  $a$  – относительная амплитуда зарядовых колебаний, а  $k$  – волновое число. С использо-

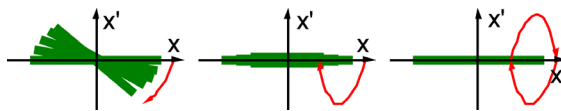


Рис. 2. Фазовые портреты сечений сгустка

ванием (4) в тех же работах получена аналитическая оценка эмиттанса в минимумах:

$$\varepsilon = \varepsilon^c x \sqrt{j}, \quad (5)$$

где  $x$  – среднеквадратичный размер сгустка;  $j$  – его пиковый ток, а  $\varepsilon^c$  – безразмерный коэффициент, зависящий от конфигурации канала и типа эффекта.

Оценка (5) является универсальной для всех каналов с преобладанием собственного заряда. Остановимся подробнее на этом вопросе. Пусть имеется некоторый электронно-оптический канал, причем  $\beta\gamma$  и  $j$  в нем не обязательно постоянны, т. е. могут присутствовать ускорение и / или группировка пучка. Пусть среднеквадратичный размер сгустка на входе канала  $x_0$ , его безразмерный импульс  $(\beta\gamma)_0$ , пиковый ток  $j_0$ , а эмиттанс нулевой. На выходе канала его эмиттанс будет  $\varepsilon_0$  из-за эффекта собственного заряда. Изменим размер пучка в  $\alpha$  раз. Тогда для сохранения геометрического подобия его движения в канале нужно либо, при неизменном канале, изменить ток сгустка в  $\alpha^2$  раз, либо, при неизменном токе, масштабировать длины всех элементов канала в  $\alpha$  раз, а фокусировку в  $\alpha^{-2}$  раз. Тогда просто из соображений геометрического подобия в первом случае эмиттанс на выходе изменится в  $\alpha^2$  раз, а во втором случае – в  $\alpha$  раз (здесь  $x' \propto x/L$ , где  $L$  – длина канала). Отсюда непосредственно получаем  $\varepsilon \propto x \sqrt{j}$ .

Таким образом, если для пучка с  $x = 1$  и  $j = 1$  мы нашли оптимальный канал, дающий на выходе эмиттанс  $\varepsilon^c$ , то для пучка с некоторыми  $x$  и  $j$  оптимальным будет канал, отличающийся длиной в  $x/\sqrt{j}$  раз и фокусировкой в  $j/x^2$  раз. При этом эмиттанс на его выходе определяется формулой (5).

Рассмотрим теперь вопрос о согласовании пучка в целом с инвариантной огибающей. Для простейшего случая канала с однородной фокусировкой, без ускорения или группировки инвариантная огибающая для слоя есть

$$x = \sqrt{j/2g}.$$

Инвариантная огибающая является частным случаем главной траектории, так что все рассуждения выше о последней справедливы и для первой. В частности, невозможно согласовать все слои с инвариантной огибающей. Однако можно говорить

о согласовании «в среднем». Например, можно потребовать, чтобы биения среднеквадратичного размера гауссова сгустка в согласованном канале были оптимальны. Это условие выполняется при  $g \approx 0,38j / x^2$ , где  $j$  – пиковый ток. Размер и эмиттанс гауссова сгустка в таком канале (при  $x = 1, x' = 0$  и  $j = 1$ ) показаны на рис. 3, а. Данные получены решением нелинейного уравнения (2). Как показано в [9; 10], такой канал не является оптимальным – эмиттанс в глобальном минимуме в нем примерно в 3,5 раза больше, чем в оптимальном канале с  $g \approx 0,09j / x^2$ . Размер и эмиттанс гауссова сгустка в таком канале показаны на рис. 3, б. Как видно, биения среднеквадратичного размера достигают 3,25 – канал сильно несогласован.

Наконец, посмотрим, как происходит «компенсация эмиттанса» в свободном пространстве, вовсе без фокусировки (рис. 3, в). Опять  $x = 1, x' = 0$  и  $j = 1$ . При  $z \approx 12,55x / \sqrt{j}$  происходит наложение ПФП слоев сгустка друг на друга и эмиттанс достигает минимума. Наличие фокусировки для этого вовсе не обязательно. Разумеется, значение эмиттанса в минимуме здесь значительно выше, чем в оптимальном канале, поскольку участок свободного пространства не является оптимальным каналом.

**Модель ламинарного локально холодного слоя**

Выше мы рассматривали однородно заряженные слои без эмиттанса, однако плотность тока эмиттера может быть неоднородной. Будем считать, что справедливы первые четыре предположения Карлстена. Тогда движение частицы в слое подчиняется следующему уравнению:

$$x'' + \frac{(\beta\gamma)'}{\beta\gamma} x' = \frac{2\tilde{j}}{x} - gx, \tag{6}$$

где  $\tilde{j}$  – безразмерный ток через круг с радиусом  $x$ . Отличие от (2), записанного для среднеквадратичного размера, состоит в том, что рассматривается частица, ограничивающая часть слоя с радиусом  $x$ , т. е. движущаяся по огибающей этой части. Таким образом, (6) – это классическое уравнение КВ для огибающей в аксиально-симметричной системе с добавленным членом  $x'$  для корректного учета ускорения.

Вообще говоря,  $\tilde{j}$  зависит от  $z$ . Если же  $\tilde{j} = \text{const}(z)$ , такой пучок называется ламинарным. Условие ламинарности: если для некоторых двух частиц в некоторый момент их расстояния от оси  $x_1$  и  $x_2$ , причем  $x_1 > x_2$ , то это соотношение сохраняется всегда. Для успешного анализа (6) нам понадобится это условие. Итак, уравнение движения частицы в ламинарном локально холодном слое получается из уравнения движения слоя в длинном локально холодном сгустке простой заменой  $j \rightarrow 4\tilde{j}$ . Следовательно, все рассуждения о главной траектории, зарядовых колебаниях и колебаниях эмиттанса также справедливы. Линеаризованное уравнение малых зарядовых колебаний получается из (3) той же самой заменой. Эмиттанс можно оценить по той же формуле (5), но коэффициент будет другой.

Условие ламинарности выполняется для всех частиц только в однородно заряженном слое без эмиттанса. Однако в холодных пучках оно нарушается лишь для малой доли частиц в разреженном гало. Сформулируем условие ламинарности движения в слое, пользуясь уравнением малых зарядовых колебаний. Рассмотрим две соседние частицы в слое с

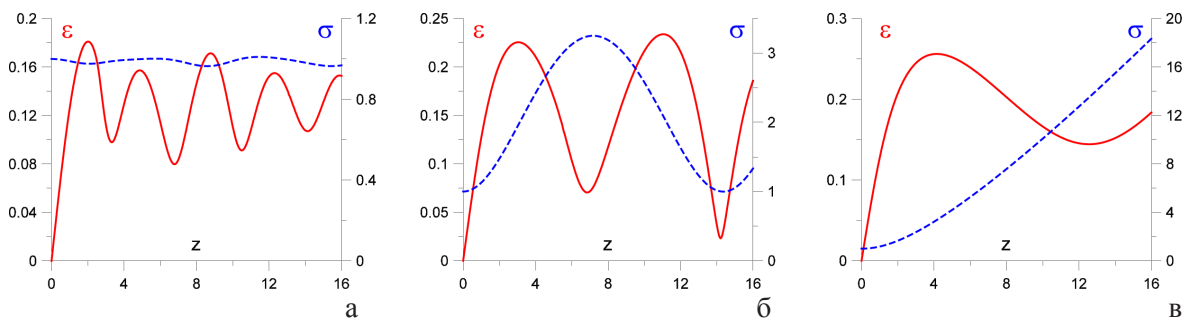


Рис. 3. Эмиттанс (сплошная линия) и среднеквадратичный размер (пунктир) гауссова сгустка в канале с  $g = 0,38$  (а); с  $g = 0,09$  (б); в свободном пространстве (в)

расстояниями до оси  $x$  и  $x + \delta x$ . Пусть первая частица движется по главной траектории. Тогда, если  $\delta x \geq 2ax$ , где  $a$  – амплитуда колебаний второй частицы, траектории частиц не пересекутся. Отсюда получаем:

$$a = \sqrt{\delta^2 + \frac{x^2}{4\tilde{j}^2} \delta'^2},$$

$$\delta = \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2\tilde{j}} \cdot \frac{d\tilde{j}}{dx} \right) \delta x,$$

$$\delta' = \left( \frac{dx'}{dx} - \frac{x'}{x} \right) \frac{\delta x}{x},$$

$$\left( 1 - \frac{x}{2\tilde{j}} \cdot \frac{d\tilde{j}}{dx} \right)^2 + \frac{x^2}{4\tilde{j}^2} \left( \frac{dx'}{dx} - \frac{x'}{x} \right)^2 =$$

$$= \left( 1 - \frac{x}{2\tilde{j}} \cdot \frac{d\tilde{j}}{dx} \right)^2 + \frac{x^2}{4\tilde{j}^2} \left( \frac{dx'}{d\tilde{j}} \cdot \frac{d\tilde{j}}{dx} - \frac{x'}{x} \right)^2 < \frac{1}{2}.$$

Для гауссова слоя на эмиттере, где  $\delta' = 0$ , это условие выполняется вплоть до  $x \cong 2,05\sigma$ , где  $\sigma$  – среднеквадратичный размер слоя. Плотность тока в этом месте составляет  $\cong 0,12$  от максимальной, а за пределами этой границы

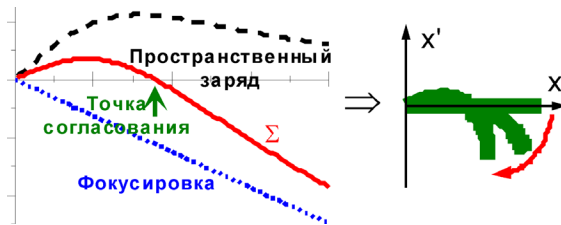


Рис. 4. Движение гауссова слоя

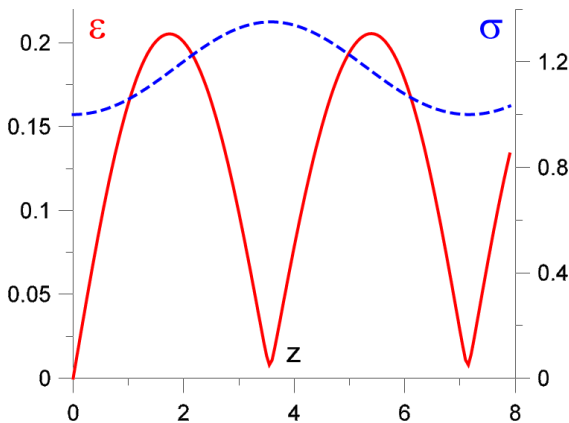


Рис. 5. Эмиттанс (сплошная линия) и среднеквадратичный размер (пунктир) гауссова слоя в канале с  $g = 0,38$

находится  $\cong 0,12$  доли частиц. Для более «прямоугольных» распределений ситуация еще точнее соответствует ламинарной модели.

Кроме того, для малой доли частиц в гало периодическое изменение  $\tilde{j}$  в меньшую сторону не меняет сути явления, а лишь сдвигает волновое число зарядовых колебаний в меньшую сторону. Из-за нелинейности (4) это число всегда растет с увеличением относительной амплитуды, так что неламинарность частиц с большими амплитудами лишь улучшает «компенсацию». Влияние же периферийных частиц на центральные мало в силу незначительного количества первых.

Несмотря на идентичность уравнений, картина движения слоя в ФП выглядит совсем не так, как сгустка. Из-за движения частиц слоя по возмущенным траекториям его ПФП периодически искривляется и выпрямляется (рис. 4). Это приводит к колебаниям эмиттанса – точно так же, как и в холодном сгустке. Из-за нелинейности зарядовых колебаний ПФП распрямляется не полностью и эмиттанс в минимумах не равен нулю.

Точно так же, как и для сгустка, для слоя можно подобрать оптимальный канал, минимизирующий эмиттанс. Фокусировка в таком канале  $g \cong 0,38\tilde{j} / x^2$  [9; 10]. Размер и эмиттанс гауссова слоя в оптимальном канале (при  $x = 1$ ,  $x' = 0$  и  $\tilde{j} = 1$ ) показаны на рис. 5, а его ПФП вблизи первого максимума, а также первого и второго минимумов эмиттанса – на рис. 6. Данные получены решением нелинейного уравнения (6).

Так же, как и для сгустка, оптимальный канал не согласован со слоем – согласованный канал обладает фокусировкой  $g \cong 0,55\tilde{j} / x^2$ . Можно отметить, что ПФП основной части слоя распрямляется в минимумах эмиттанса почти идеально, а вот ПФП гало всегда искривлен значительно.

Аналитические и численные оценки эффектов продольной, поперечной неоднородности заряда, а также комбинированного для различных типов каналов, в том числе с учетом ускорения и группировки, полученные на основе модели локально холодного пучка, можно найти в [9; 10]. Оценки для электронных пушек с оптимальными каналами представлены в [9; 11].

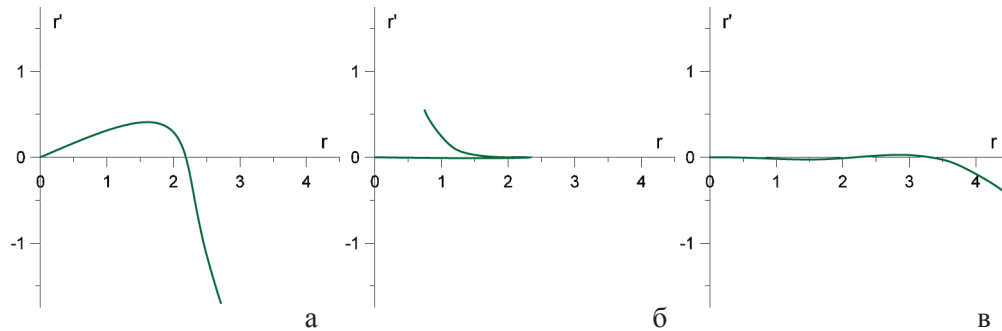


Рис. 6. Фазовые портреты гауссова слоя в канале с  $g = 0,38$ :  $z = 1,8$  (а);  $z = 3,6$  (б);  $z = 7,1$  (в)

## Выводы

1. Модель локально холодного пучка адекватна пучку с превалярованием собственного заряда. Она удобна для аналитических и численных оценок движения пучка в сильноточных инжекторах.

2. Колебания эмиттанса пучка, используемые в известной технике «emittance compensation», есть свойство самого локально холодного пучка – они являются следствием когерентности зарядовых колебаний. Суть явления не зависит ни от фокусировки в канале, ни от согласования пучка с какой-либо наперед заданной траекторией в фазовом пространстве.

3. В длинном локально холодном сгустке и в ламинарном локально холодном слое все явления аналогичны, а уравнения, их описывающие, идентичны с точностью до коэффициентов. Параметры же оптимальных каналов и оценки эмиттанса разные из-за различной геометрии объектов.

4. Основная формула для оценки эмиттанса в локально холодном пучке  $\varepsilon = \varepsilon^c x \sqrt{j}$  возникает из соображений геометрического подобия и универсальна для всех типов каналов и эффектов.

## Список литературы

1. *Feldhaus J., Arthur J., Hastings J. B.* X-ray free-electron lasers // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 2005. Vol. 38. P. S799–S819.
2. *Behnke T.* Linear electron positron colliders // *NIM.* 2002. Vol. A494. P. 22–28.
3. *Yang J., Washio M., Endo A., Hori T.* Evaluation of femtosecond X-rays produced by

Thomson scattering under linear and nonlinear interactions between a low-emittance electron beam and an intense polarized laser light // *NIM.* 1999. Vol. A428. P. 556–569.

4. *Quinn F. M., Seddon E. A., Flavell W. F. et al.* The 4GLS project: update and technological challenges // *AIP Conf. Proc.*, May 12, 2004. Vol. 705. P. 93–96.

5. *Carlsten B. E.* New photoelectric injector design for the Los Alamos National Laboratory XUV FEL accelerator // *NIM.* 1989. Vol. A 285. P. 313–319.

6. *Carlsten B. E.* Space-charge-induced emittance compensation in high-brightness photoinjectors // *Particle Accelerators.* 1995. Vol. 49. P. 27–65.

7. *Serafini L., Rosenzweig J.* Relativistic quasilaminar beams in RF photoinjectors: A theory of emittance compensation // *Phys. Rev.* 1997. Vol. E 55. P. 7565–7590.

8. *Капчинский И. М.* Теория линейных резонансных ускорителей. М.: Энергоиздат, 1982. 240 с.

9. *Miginsky S. V.* Space charge effect, coherence of charge vibration and emittance. Prepr. Budker INP № 2007-11. Novosibirsk, 2007. 60 с. ([http://www.inp.nsk.su/activity/preprints/files/2007\\_011.pdf](http://www.inp.nsk.su/activity/preprints/files/2007_011.pdf)).

10. *Miginsky S. V.* Minimization of space charge effect // *NIM.* 2007. Vol. A575. P. 234–237.

11. *Мигинский С. В.* Когерентность колебаний пучка в поле собственного заряда и параметры электронных пушек // *Вестн. Новосиб. гос. ун-та.* 2007. Т. 2, вып. 4. С. 132–144.

**S. V. Miginsky**

### **EMITTANCE OSCILLATION IN LOCALLY COLD BEAM**

Phenomena in space charge dominated beams are described by the locally cold beam model precisely enough. The model is applied to the effects of longitudinal and transverse inhomogeneities of space charge. It was validated that the phenomenon of emittance oscillation in these beams, which is used in well known technique emittance compensation, is the property of the model and does not depend explicitly on the properties of a beamline. A universal formula for emittance estimation of locally cold beams in beamlines is presented.

*Keywords:* space charge effect, locally cold beam model, emittance oscillation.