

УДК 533.951.8

М. С. Чащин, А. Д. Беклемишев

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН  
пр. Акад. Лаврентьева, 11, Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия  
E-mail: m.s.chaschin@gmail.com

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОРОТКОВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ \*

Получено решение начальной задачи для линеаризованного уравнения желобковых колебаний в плазме, испытывающей вращение с проскальзыванием. Показано, что дифференциальное вращение меняет качественные характеристики желобка: его форму и закон роста амплитуды от времени. Неоднородное вращение приводит к уменьшению радиальной длины волны возмущения, а амплитуда со временем меняется не по экспоненциальному закону, как в случае без дифференциального вращения, а по степенному. Сжатие желобка с одной стороны приводит к уменьшению амплитуды смещения плазмы поперек магнитного поля в конвективной ячейке, а с другой – к увеличению амплитуды электрического поля в ней, в следствие чего энергия возмущения растет со временем даже при постоянной амплитуде электрического потенциала. При учете ионной вязкости желобки становятся устойчивыми.

*Ключевые слова:* желобковая неустойчивость, дифференциальное вращение, эффект КЛР.

### Введение

Благоприятное влияние неоднородного электрического поля на желобковую неустойчивость горячей замагниченной плазмы известно уже давно. Например, в экспериментах на установке ОГРА-1 [1] режим пониженной МГД активности был достигнут благодаря потенциалам, приложенным к сеточным торцевым электродам. Аналогичный результат наблюдался в экспериментах на установке «Alice» [2] (см. также [3; 4]). Этому явлению посвящено немало теоретических работ [5; 6; 7; 8].

На качественном уровне понятно, что вращение может оказывать как благоприятное, так и неблагоприятное влияние на устойчивость возмущений желобкового типа. Например, оно является источником центробежной силы, которая в присутствии градиента плотности, как и неблагоприятная кривизна силовых линий магнитного поля, приводит к развитию желобков. С другой стороны, если вращение неоднородно по

радиусу, то оно должно влиять на форму конвективных ячеек, образующих желобки, и, как следствие, замедлять неустойчивость. В представленной работе рассмотрены оба эффекта. Качественный анализ и асимптотики решений уравнения желобковых колебаний были получены в [9]. В данной работе найдены и проанализированы точные решения.

Стоит отметить, что попытки объяснить благоприятное влияние неоднородного вращения плазмы на устойчивость желобков были предприняты также А. В. Тимофеевым [6]. Из работ Тимофеева следует, что течения плазмы, для которых профиль скорости не имеет точек перегиба, устойчивы даже при наличии градиента плотности и неблагоприятной кривизны силовых линий магнитного поля (кроме возмущений, соответствующих смещению плазмы как целого) [6].

Нами рассмотрен случай плазмы низкого давления, помещенной в слабо неоднородное магнитное поле. При этом считается,

\* Работа выполнена при поддержке Рособразования (проект РНП 2.1.1/579).

что плазма испытывает равновесное вращение с неоднородным профилем скорости и частоты. Также, решая задачу, будем подразумевать, что плазма имеет цилиндрически симметричный вид и ограничена вдоль магнитного поля, а длина волны желобковых возмущений много меньше радиуса плазмы. В такой постановке задача имеет прямое отношение к вопросу устойчивости плазмы в ловушках открытого типа. Однако сделанные в работе выводы применимы и к плазме в ловушках с замкнутой конфигурацией магнитного поля, например к системам тороидального типа.

### Уравнение желобковых колебаний

Линейное уравнение желобковых колебаний было получено ранее большим количеством авторов (см., например, [6]). Воспользуемся его представлением, приведенным в [10]:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} S(r) \frac{d}{dr} \frac{\delta\varphi_m}{\omega_0 r} + \frac{1-m^2}{r^4} S(r) \frac{\delta\varphi_m}{\omega_0 r} + (\omega^2 + m^2 \gamma_0^2) \frac{dn_0}{dr} \frac{\delta\varphi_m}{\omega_0 r} = 0, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} S(r) &= \frac{n_0(r)}{B^2} r^3 \omega_0(r) (\omega_0(r) - \omega_*(r)), \\ \omega_* &= \frac{mcT_i}{eBrn_0} \frac{dn_0}{dr}, \\ \omega_0(r) &= \omega - m\omega_E(r), \\ \omega_E(r) &= \frac{c}{Br} \frac{d\varphi_0}{dr}, \\ \gamma_0^2 &= 2\kappa'(T_i + T_e)/m_i. \end{aligned} \quad (2)$$

$\kappa = -\kappa'r$  – кривизна силовых линий магнитного поля;  $m_i$  и  $e$  – масса и заряд иона;  $T_e$  и  $T_i$  – температура электронов и ионов, которые считаются величинами постоянными;  $\varphi_0$  и  $n_0$  – равновесное распределение потенциала и плотности ионов в плазме;  $\delta\varphi_m$  – величина амплитуды  $m$ -й азимутальной Фурье-гармоники возмущения потенциала;  $\omega$  – частота колебаний.

Уравнение (2) может быть использовано для описания эффектов, связанных с вращением плазмы. Частота  $\omega_*$  пропорциональна градиенту давления ионов и описывает диамагнитные эффекты. Она также может быть распределена неоднородно по

радиусу. Каждое из слагаемых уравнения (2) имеет простую физическую интерпретацию. Первое и второе описывают инерцию плазмы. Слагаемое, пропорциональное квадрату частоты, описывает центробежный эффект, а последнее является источником желобковой неустойчивости и пропорционально кривизне силовых линий магнитного поля.

### Устойчивость желобков в плазме с твердотельным вращением

Всюду в этом разделе считаем, что  $\omega_E$  слабо зависит от  $r$  или выполнено условие  $\omega_E = \text{const}$ . Слабая зависимость подразумевает то, что характерный масштаб изменения частоты вращения существенно больше длины волны желобка. В таком случае желобок вращается вместе с плазмой с заданной частотой. Как правило, характерный масштаб изменения частоты вращения – порядка радиуса плазмы, поэтому выводы, которые будут сделаны ниже, справедливы только для желобков с длиной волны, существенно меньшей радиуса плазмы. Будем также рассматривать желобки, для которых  $m \gg 1$ . В таком приближении уравнение (1) упрощается:

$$\frac{d^2}{dr^2} \delta\varphi_m + \left( -\frac{m^2}{r^2} + \frac{\omega^2 + m^2 \gamma_0^2}{\omega_0(\omega_0 - \omega_*)} \frac{dn_0/dr}{n_0 r} \right)_{r=r_s} \delta\varphi_m = 0,$$

где  $r_s$  – радиус локализации желобка. Если искать решение в виде

$$\delta\varphi_m(r, \omega) = \delta\varphi_m(k, \omega) e^{ik(r-r_s)/r_s},$$

то частота и волновое число  $k$  должны быть связаны дисперсионным уравнением

$$\begin{aligned} \left( \omega_0 - \frac{\omega_*}{2} \right)^2 &= \\ &= \left( \frac{\omega_*}{2} \right)^2 - \frac{m^2 \omega_E^2 + m^2 \gamma_0^2}{k^2 + m^2} \left| \frac{r}{n_0} \frac{dn_0}{dr} \right|_{r=r_s}, \end{aligned} \quad (3)$$

где считается, что плотность плазмы монотонно уменьшается к краю, а порог неустойчивости, в свою очередь, определяется условием

$$\left( \omega_E^2 + \gamma_0^2 \right) \left| \frac{r}{n_0} \frac{dn_0}{dr} \right|_{r=r_s} = \left( \frac{\omega_*}{2} \right)^2. \quad (4)$$

Каждое из слагаемых дисперсионного уравнения имеет прозрачную физическую

интерпретацию. Слагаемое, пропорциональное  $\omega_*^2$ , описывает эффект конечного лармовского радиуса (КЛР) ионов,  $\omega_E^2$  – центробежный эффект, а  $\gamma_0^2$  – неоднородность магнитного поля. Желобковые возмущения устойчивы, если правая часть в (3) неотрицательна.

Воспользовавшись определениями (2), получаем оценки

$$\frac{\omega_*}{\gamma_0} \sim m \left( \frac{\rho_{L_i} L}{r_s^2} \right) \sqrt{\frac{T_i}{T_e + T_i}},$$

$$\frac{\omega_E}{\gamma_0} \sim U \left( \frac{\rho_{L_i} L}{r_s^2} \right) \frac{T_e}{\sqrt{T_i(T_e + T_i)}},$$

где считается, что  $d\phi_0/dr \sim UT_e/er_s$ . Смысл коэффициента  $U$  следующий: если потенциал плазмы порядка величины дебаевского скачка, тогда  $U = \ln(v_{T_e}/v_{T_i})$ . Так как  $U$  слабо зависит от температуры, считаем, что  $U = \text{const}$ . На рис. 1 изображена область параметров, для которых доминирует одно из слагаемых дисперсионного уравнения (3). Желобки устойчивы там, где диамагнитная частота  $\omega_*$  больше частоты электрического дрейфа  $\omega_E$  и частоты  $\gamma_0$  (эта область закрашена в серый цвет). В случае  $T_e = 0$  желобки устойчивы, если

$$\frac{\rho_{L_i} L}{r_s^2} > 1.$$

В диапазоне  $0 < T_e/T_i < U^{-1}$  критерий устойчивости становится более жестким:

$$\frac{\rho_{L_i} L}{r_s^2} > \sqrt{1 + \frac{T_e}{T_i}}.$$

В случае если  $T_e/T_i > U^{-1}$ , желобки становятся неустойчивыми. Стоит также отметить, что желобковые моды с большим азимутальным номером более устойчивы, поскольку  $\omega_* \propto m$ .

### Влияние дифференциального вращения на устойчивость желобков в плазме низкого ионного давления

Не всегда можно считать, что  $\omega_E = \text{const}$  (например, в тех случаях, когда длина волны желобка сравнима с градиентным размером частоты вращения). Заметим, что

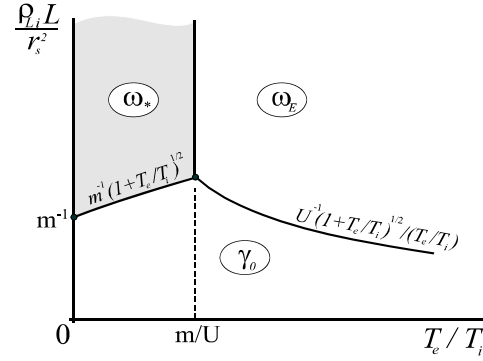


Рис. 1. Область параметров, для которых доминирует одно из слагаемых дисперсионного уравнения (3). Закрашенная область соответствует случаю, когда коротковолновые возмущения устойчивы. Буквами  $\gamma_0$ ,  $\omega_E$  и  $\omega_*$  условно обозначены слагаемые, которые в (3) описывают влияние кривизны, вращения и диамагнитного дрейфа на инкремент неустойчивости соответственно;  $\rho_{L_i}$  – лармовский радиус иона

в плазме некоторых установок профиль скорости электрического дрейфа сильно меняется на размере много меньшем, чем радиус плазмы. Такая ситуация наблюдается, в частности, на установке ГДП в режимах с улучшенным удержанием [11].

Перепишем уравнение (1) в виде

$$\omega_0^2 \frac{d^2 \delta\phi_m}{dr^2} + \omega_0^2 A(r) \frac{d\delta\phi_m}{dr^2} + \omega_0^2 B(r) \delta\phi_m + \frac{1-m^2}{r^2} \omega_0^2 \delta\phi_m + (\omega^2 + m^2 \gamma_0^2) \frac{dn_0/dr}{n_0 r} \delta\phi_m = 0, \quad (5)$$

где

$$A(r) = \left[ \frac{d}{dr} \ln(rn_0) \right],$$

$$B(r) = \frac{1}{n_0 r^2 \omega_0} \frac{d}{dr} \left[ r^3 n_0 \omega_0^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\omega_0 r} \right) \right],$$

где считается, что  $\omega_* = 0$ . Это соответствует случаю плазмы низкого ионного давления. Будем также искать решения, для которых  $\Re(\omega) \approx m\omega_{Es}$ , где оператор  $\Re$  выделяет вещественную часть частоты, а  $\omega_{Es} \equiv \omega_E(r_s)$ . Такие желобки, по-видимому, будут наиболее неустойчивы, поскольку вращаются вместе с плазмой.

Представим частоту в виде

$$\omega = \gamma + m\omega_{Es},$$

где  $\gamma \sim \omega_{Es}$ . Также считаем, что

$$\frac{d\delta\varphi_m}{dr} \sim \frac{m}{r}\delta\varphi_m.$$

Эти условия позволяют упростить уравнение (5). Как видно из (5), самое большое слагаемое в нем имеет порядок  $m^2$ . В силу условия  $m \gg 1$  будем пренебрегать в уравнении членами порядка  $m$  и меньше. Поскольку  $\omega_0 \sim \omega_{Es}$ , а коэффициент  $A(r) \sim r_s^{-1}$ , слагаемым с первой производной можно пренебречь. Коэффициент  $B(r)$  имеет порядок  $m/r_s^2$ . Отсюда следует, что и этим слагаемым можно пренебречь. Тогда переписем уравнение (5) в виде

$$\omega_0^2 \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) \delta\varphi_m + m^2 (\omega_{Es}^2 + \gamma_0^2) \frac{dn_0/dr}{n_0 r} \delta\varphi_m = 0$$

где частоту в слагаемом, которое описывает центробежный эффект, мы заменили на  $m\omega_{Es}$ . Воспользовавшись условием локальности возмущения, аппроксимируем профиль скорости вращения линейной функцией:

$$\omega_E(r) = \omega_{Es} + \omega'_{Es} \xi, \quad (6)$$

при этом считаем, что  $\omega'_{Es} \sim \omega_{Es}$ . Подставим в получившееся уравнение выражение для частоты электрического дрейфа, согласно (6). Пренебрегая малыми поправками, получаем

$$(\Gamma - m\xi)^2 \left( \frac{d^2}{d\xi^2} - m^2 \right) \delta\varphi_m - m^2 \Lambda^2 \delta\varphi_m = 0, \quad (7)$$

где введена новая переменная  $\xi = (r - r_s)/r_s$ , а также использованы обозначения

$$\Lambda^2 = \frac{(\omega_{Es}^2 + \gamma_0^2)}{(\omega'_{Es})^2} \left| \frac{d \ln n_0}{dr/r_s} \right|_{r=r_s}, \quad \Gamma = \frac{\gamma}{\omega'_{Es}}.$$

Согласно [6], решение линейной задачи на собственные моды дает только сингулярные решения. Поэтому будем решать начальную задачу, полагая, что начальное пространственное распределение потенциала и его производной по времени задано.

Проинтегрируем уравнение (7) по частоте  $\Gamma$  и координате  $\xi$  в бесконечном ин-

тервале с весом  $\exp(-i\Gamma\tau - ik\xi)$ , после чего приходим к уравнению

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} - m \frac{\partial}{\partial k} \right)^2 (k^2 + m^2) \delta\varphi_m - m^2 \Lambda^2 \delta\varphi_m = 0,$$

где  $\tau = \omega'_{Es} t$ .

Замена переменных  $s = (k + m\tau)/2$ ,  $q = k$  приводит к уравнению, содержащему только производные по  $q$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2} (q^2 + m^2) \delta\varphi_m - \Lambda^2 \delta\varphi_m = 0. \quad (8)$$

Общее решение этого уравнения запишем в виде

$$\delta\varphi_m(s, q) = C_1(s) \varphi_{m1}(q) + C_2(s) \varphi_{m2}(q), \quad (9)$$

где  $\varphi_{m1}$  и  $\varphi_{m2}$  – линейно независимые частные решения уравнения (8). Коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  находятся из начальных условий (формулы для их вычисления получены в прил. 1).

Из определения переменной  $s$  видно, что с ростом времени решение смещается по спектру в область больших  $|k|$ . Это означает, что если в начальный момент времени  $\tau = 0$  волновой пакет был локализован в окрестности  $k = -k_0$ , то через время  $\tau$  он сместится в область  $k = -k_0 - m\tau$ .

Для подробного анализа устойчивости необходимо знать явный вид функций  $\varphi_{m1}$  и  $\varphi_{m2}$ . Для произвольного значения параметра  $\Lambda^2$  не удастся выразить решение уравнения (8) через элементарные функции. Все же оно существует в классе гипергеометрических функций [12]. Действительно, раскрыв производные в (8), приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2} \delta\varphi_m + \frac{4q}{q^2 + m^2} \frac{\partial}{\partial q} \delta\varphi_m + \frac{2 - \Lambda^2}{q^2 + m^2} \delta\varphi_m = 0. \quad (10)$$

Оно имеет три особые точки, которые лежат в комплексной плоскости:  $\pm im$  и  $\infty$ . Точки  $\pm im$  являются полюсами первого порядка как для коэффициента при первой производной, так и для коэффициента при  $\delta\varphi_m$ . Характер особой точки  $q = \infty$  можно определить, сделав замену  $q' = 1/q$ , откуда следует, что  $q = \infty$  является регулярной особой точкой. Значит уравнение (10) имеет

три регулярные особые точки. Из теории дифференциальных уравнений следует, что решение уравнения (10) может быть найдено в классе гипергеометрических функций. Для перехода к стандартному гипергеометрическому виду сделаем замену переменной  $z = (iq/m + 1)/2$ . Тогда из (10) получаем

$$z(1-z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\delta\varphi_m + 2(1-2z)\frac{\partial}{\partial z}\delta\varphi_m - (2-\Lambda^2)\delta\varphi_m = 0. \quad (11)$$

Частным решением этого уравнения является гипергеометрический ряд

$$\varphi_{m1}(z) = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\beta z}{\gamma 1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)z^2}{\gamma(\gamma+1)2!} + \dots \quad (12)$$

который абсолютно сходится в круге  $|z| < 1$ . В нашем случае

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3}{2} + \sqrt{\Lambda^2 + \frac{1}{4}}, \\ \beta &= \frac{3}{2} - \sqrt{\Lambda^2 + \frac{1}{4}}, \\ \gamma &= 2. \end{aligned} \quad (13)$$

Второе линейно независимое решение имеет вид

$$\varphi_{m2}(z) = \varphi_{m1}(z) \int \frac{dz'}{z'^2(z'-1)^2 \varphi_{m1}^2(z')}.$$

Из определения коэффициента  $\beta$  следует, что при

$$\Lambda^2 = \left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

для целых значений  $n$  гипергеометрический ряд (12) обрывается, а решение выражается через элементарные функции. В прил. 2 подробно рассмотрен случай  $\Lambda^2 = 2$  (или  $n = 0$ ).

Для анализа устойчивости исследуем асимптотики решений для больших  $q$ . Это позволит нам понять, как ведет себя амплитуда возмущения потенциала на больших временах, т. е. при  $\tau \gg 1$  (что соответствует пределу  $t \gg 1/\omega'_{Es}$ ).

Гипергеометрический ряд (12) не годится для исследования асимптотики при больших  $q$  или  $|z|$ . Поэтому необходимо найти решение, которое существовало бы во внешности круга  $|z| < 1$ . Для этого сделаем

замену переменных  $w = 1/z$ , а также перейдем к новой функции

$$u_m(w) = \delta\varphi_m(w)/w^\sigma,$$

где  $\sigma$  удовлетворяет квадратному уравнению

$$\sigma^2 - 3\sigma + 2 - \Lambda^2 = 0. \quad (14)$$

Тогда из (11) приходим к гипергеометрическому уравнению

$$w(1-w)\frac{\partial^2 u_m}{\partial w^2} + [2(\sigma-1) - 2\sigma w]\frac{\partial u_m}{\partial w} - \sigma(\sigma-1)u_m = 0,$$

частным решением которого является гипергеометрический ряд

$$u_m(w) = {}_2F_1(\sigma, \sigma-1; 2(\sigma-1); w),$$

абсолютно сходящийся в круге  $|w| < 1$ .

Значит, частным решением уравнения (11) в области круга  $|z| > 1$  будет ряд

$$\varphi_{m1}(z) = z^{-\sigma} {}_2F_1(\sigma, \sigma-1; 2(\sigma-1); 1/z).$$

Заметим, что  $\alpha$  и  $\beta$ , определенные в (13), удовлетворяют квадратному уравнению (14). Тогда получаем

$$\begin{aligned} \varphi_{m1}(z) &= z^{-\alpha} {}_2F_1(\alpha, \alpha-1; 2(\alpha-1); 1/z), \\ \varphi_{m2}(z) &= z^{-\beta} {}_2F_1(\beta, \beta-1; 2(\beta-1); 1/z). \end{aligned} \quad (15)$$

Из (15) сразу следуют асимптотики для частных решений  $\varphi_{m1}$  и  $\varphi_{m2}$  в пределе  $|z| \rightarrow \infty$

$$\varphi_{m1}(z)|_{|z| \rightarrow \infty} \propto z^{-\alpha},$$

$$\varphi_{m2}(z)|_{|z| \rightarrow \infty} \propto z^{-\beta}.$$

Поскольку  $z \propto q$ , при  $q \rightarrow \infty$  получаем, что максимум амплитуды Фурье-гармоники со временем растет степенным образом

$$\delta\varphi_{\max}|_{\tau \rightarrow \infty} \sim \tilde{C}_1 \tau^{-\alpha} + \tilde{C}_2 \tau^{-\beta}, \quad (16)$$

где  $\tilde{C}_1$  и  $\tilde{C}_2$  – коэффициенты, не зависящие от времени.

Получим условие на параметр  $\Lambda^2$ , при выполнении которого возмущения желобкового типа будут устойчивы, т. е. энергия возмущения не будет расти со временем. Так как желобки не возмущают магнитное поле, энергия возмущения определяется энергией электрического поля. При этом важную роль играет не только то, как меняется со временем амплитуда потенциала  $\delta\varphi_m$ , но и форма конвективной ячейки, образующей желобок. Изменение формы желобка связано с наличием сдвигового течения, которое «размазывает» его по азимуту, уменьшая радиальный размер желобка (это соответствует смещению

волнового пакета в область больших радиальных длин волн). Как следствие, даже если амплитуда потенциала не меняется со временем, электрическое поле будет увеличиваться, приводя к соответствующему увеличению энергии возмущения. Так энергия вращения перекачивается в энергию желобковой неустойчивости. Выражение для плотности энергии возмущения имеет вид

$$\delta W = \int_S dS \frac{|\delta \mathbf{E}|^2}{8\pi} = \int_S \frac{dS}{8\pi} \left[ \left| \frac{\partial \delta \varphi}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial \delta \varphi}{\partial \phi} \right|^2 \right],$$

где  $\phi$  – азимутальный угол;  $S$  – элемент площади в поперечном сечении желобка. Принимая во внимание то, что мы рассматриваем возмущения, локализованные в окрестности  $r = r_s$ , получаем

$$\delta W = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left[ \left| \frac{\partial \delta \varphi}{\partial \xi} \right|^2 + \left| \frac{\partial \delta \varphi}{\partial \phi} \right|^2 \right].$$

Воспользовавшись Фурье-представлением возмущения потенциала, которое приведено в прил. 1, получаем

$$\left| \frac{\partial \delta \varphi}{\partial \xi} \right|^2 = \left( \frac{\omega'_{Es}}{r_s} \right)^2 \times \\ \times \sum_{m, m'} e^{i(m-m')(\phi - \omega_{Es}t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk dk'}{2\pi} e^{i(k\xi - k'\xi')} k k' \delta \varphi_m(k, \tau) \delta \varphi_{m'}^*(k', \tau'),$$

где знак «звездочка» указывает на комплексное сопряжение, а суммирование ведется по всем целым  $m$  и  $m'$ . Аналогично получаем

$$\frac{1}{r_s^2} \left| \frac{\partial \delta \varphi}{\partial \phi} \right|^2 = \left( \frac{\omega'_{Es}}{r_s} \right)^2 \times \\ \times \sum_{m, m'} e^{i(m-m')(\phi - \omega_{Es}t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk dk'}{2\pi} e^{i(k\xi - k'\xi')} m m' \delta \varphi_m(k, \tau) \delta \varphi_{m'}^*(k', \tau'),$$

Подставим результат в выражение для возмущения энергии. Интегрирование по углу позволяет избавиться от суммирования по  $m'$ , а интегрирование по смещению  $\xi$  позволяет избавиться от интеграла по  $k'$ . В результате получаем

$$\delta W = \left( \frac{\omega'_{Es}}{2r_s} \right)^2 \times \\ \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk (k^2 + m^2) \left| \delta \varphi_m(k, \tau) \right|^2. \quad (17)$$

Из (16) следует, что

$$\left| \delta \varphi_{\max} \right|_{\tau \rightarrow \infty}^2 \rightarrow \left| \tilde{C}_1 \right|^2 \tau^{-2\alpha} + \\ + \left| \tilde{C}_2 \right|^2 \tau^{-2\beta} + 2\Re(\tilde{C}_1 \tilde{C}_2^*) \tau^{-3}, \quad (18)$$

где учтено, что  $\alpha + \beta = 3$ . Из (17) и (18) получаем, что

$$\delta W \propto t^{2-2\beta}, \text{ если } \beta \leq 3/2; \\ \delta W \propto t^{-1}, \text{ в остальных случаях.} \quad (19)$$

При получении (19) учтено, что  $\beta < \alpha$ . Значит, энергия возмущения не будет расти со временем, если выполнено условие  $\beta \geq 1$ , или

$$\Lambda^2 \leq 0. \quad (20)$$

Из (20) следует, что порог неустойчивости остается тем же, что и в случае отсутствия сдвигового вращения (ср. с (4), при  $\omega_* = 0$ ). Таким образом сдвиговое вращение, хотя и не смещает порог устойчивости, меняет закон роста амплитуды возмущения. На временах, превышающих время проскальзывания слоев плазмы относительно друг друга ( $t > 1/\omega'_{Es}$ ), амплитуда желобка растет степенным образом. Найденные решения справедливы до тех пор, пока в силу не вступит истинная (столкновительная) вязкость.

### Влияние ионной вязкости на желобки в плазме с дифференциальным вращением

Откажемся теперь от предположения  $\omega_* = 0$ . Так мы сможем учесть эффект КЛР. В случае, когда  $\omega_E = \text{const}$  и  $\omega_* = \text{const}$ , эффект КЛР оказывает стабилизирующую роль на желобки. Аналогичный результат можем ожидать в случае, когда  $\omega_E \neq \text{const}$ . Далее будем рассматривать именно его. Как и всюду в статье, считаем, что

$$m \gg 1, \quad r_s \frac{d}{dr} \gg 1, \quad \text{при этом } \frac{r_s}{m} \frac{d}{dr} \sim 1.$$

Пренебрегая единицей по сравнению с  $m^2$ , запишем уравнение (1) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} n_0 r^3 \left[ \left( \omega_0 - \frac{\omega_*}{2} \right)^2 - \frac{\omega_*^2}{4} \right] \frac{d\psi_m}{dr} - \\ & - \frac{m^2}{r^2} n_0 r^3 \left[ \left( \omega_0 - \frac{\omega_*}{2} \right)^2 - \frac{\omega_*^2}{4} \right] \psi_m + \\ & + \left( \omega^2 + m^2 \gamma_0^2 \right) r^2 \left( \frac{dn_0}{dr} \right) \psi_m = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\psi_m = \delta\phi_m / \omega_0 r$ . Представим частоту волны в виде суммы

$$\omega = m\omega_{Es} + \frac{\omega_*}{2} + \gamma,$$

где  $\gamma \sim \omega_{Es}$ . Будем также считать, что частота диамагнитного дрейфа  $\omega_* \sim \omega_{Es}$ . Сделав такое предположение, мы попадаем в область параметров, где слагаемые, которые описывают стабилизацию эффектами КЛР, того же порядка, что и дестабилизирующие члены, например центробежная сила.

Заметим, что в рамках сделанных предположений самое большое слагаемое в (21) имеет порядок  $m^2$ . Пренебрегая слагаемыми, которые имеют порядок  $m$  и ниже, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left[ \left( \frac{\Gamma}{m} - \xi \right)^2 - \frac{\Omega_*^2}{4m^2} \right] \frac{d\psi_m}{d\xi} - \\ & - \left[ \left( \frac{\Gamma}{m} - \xi \right)^2 - \frac{\Omega_*^2}{4m^2} \right] \psi_m - \Lambda^2 \psi_m = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\Omega_* = \omega_* / \omega'_{Es}$ . Остальные обозначения те же, что и в предыдущем разделе, а частота электрического дрейфа разложена в ряд Тейлора, согласно (6). Проинтегрируем уравнение (22) по  $\Gamma$  и  $\xi$  с весом  $\exp[-i\Gamma\tau - ik\xi]$ . Тогда оно будет содержать производные по времени и радиальному волновому числу  $k$ . В результате получаем

$$\begin{aligned} & \frac{k}{m} \left( \frac{\partial}{\partial\tau} - m \frac{\partial}{\partial k} \right)^2 \frac{k}{m} \psi_m + \left( \frac{\partial}{\partial\tau} - m \frac{\partial}{\partial k} \right)^2 \psi_m + \\ & + \left( -\Lambda^2 + \frac{\Omega_*^2}{4m^2} (k^2 + m^2) \right) \psi_m = 0. \end{aligned}$$

Сделав замену переменных

$$s = (k + m\tau) / 2, \quad q = k,$$

и введя новую функцию

$$\tilde{\psi}_m = \sqrt{q^2 + 1} \psi_m,$$

получаем уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_m}{\partial q^2} - \\ & - \left[ \frac{\Lambda^2}{q^2 + m^2} + \frac{m^2}{(q^2 + m^2)^2} - \frac{\Omega_*^2}{4m^2} \right] \tilde{\psi}_m = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

Заметим, что коэффициенты этого уравнения не зависят от  $s$ , поэтому его решение можно представить в виде

$$\tilde{\psi}_m(s, q) = C_1(s) \tilde{\psi}_{m1}(q) + C_2(s) \tilde{\psi}_{m2}(q). \quad (24)$$

Коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  находятся из начальных условий. Из общего вида решения следует, что оно представляет собой волновой пакет, который смещается в область больших значений  $|k|$ .

Из вида уравнения (23) можно сделать качественные выводы о поведении решений  $\tilde{\psi}_{m1}$  и  $\tilde{\psi}_{m2}$ . Для этого воспользуемся аналогией из квантовой механики и заметим, что уравнение (23) является уравнением Шрёдингера для эффективного потенциала

$$U_{\text{eff}} = \frac{\Lambda^2}{q^2 + m^2} + \frac{m^2}{(q^2 + m^2)^2}$$

и эффективной энергии

$$E_{\text{eff}} = \frac{\Omega_*^2}{4m^2}.$$

На рис. 2 изображен вид потенциала  $U_{\text{eff}}$ . Пользуясь терминами квантовой механики, можно сказать, что мы имеем дело с потенциальным «горбом». При этом возможны

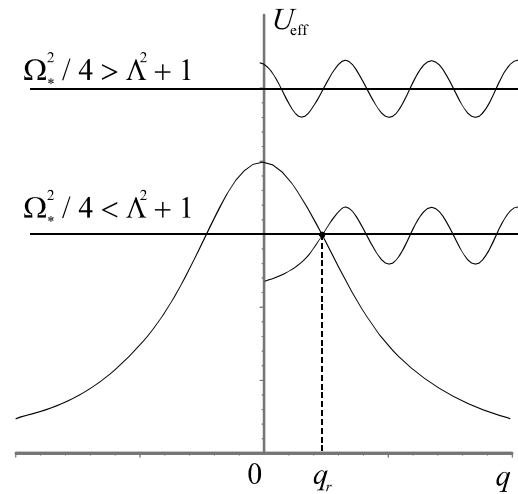


Рис. 2. Вид эффективного потенциала уравнения (23). Решения, для которых выполнено условие  $\Omega_*^2 / 4 > \Lambda^2 + 1$ , всюду осциллирующие

две ситуации. Первая соответствует случаю, когда выполнено условие

$$\max_q U_{\text{eff}} < E_{\text{eff}},$$

или

$$\Lambda^2 < \frac{\Omega_*^2}{4} - 1. \quad (25)$$

В таком случае решение уравнения (23) будет всюду осциллирующим (см. рис. 2). Решение иначе ведет себя, когда условие (25) нарушается. В «подбарьерной» области решение не осциллирует. Однако, как упомянуто выше, с увеличением времени желобок смещается по спектру в область больших  $|q|$  и может все же оказаться в области, где амплитуда потенциала возмущения будет осциллировать. Значение  $q_r$ , при котором происходит этот переход, определяется уравнением  $U_{\text{eff}}(q_r) = E_{\text{eff}}$ . Отсюда получаем

$$\frac{q_r}{m} = \frac{2\Lambda^2}{\Omega_*} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{\Omega_*^2}{\Lambda^4}} \right) - \frac{\Omega_*^2}{4\Lambda^2} \right]^{1/2}.$$

Получим асимптотическое выражение для решений уравнения (23) в пределе  $q \gg q_r$ . Для этого разложим эффективный потенциал по степеням  $1/q$ :

$$U_{\text{eff}} = \frac{\Lambda^2}{q^2} + m^2 \frac{1 - \Lambda^2}{q^4} + O(l^{-6}),$$

и введем коэффициенты  $u_1, u_2, u_3, \dots$ , такие, что

$$U_{\text{eff}} - \frac{\Omega_*^2}{4m^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{q^n},$$

где  $u_0 = -\Omega_*^2/4m^2$ ,  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = \Lambda^2$ ,  $u_3 = 0, \dots$

Введя новую функцию

$$w = \frac{1}{\tilde{\psi}_m} \frac{\partial \tilde{\psi}_m}{\partial q},$$

из (23) получаем уравнение Рикатти:

$$\frac{\partial w}{\partial q} + w^2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{q^n} = 0, \quad (26)$$

асимптотику решения которого для больших  $q$  будем искать в виде ряда

$$w(s, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_n(s)}{q^n}. \quad (27)$$

После прямой подстановки решения (27) в (26) получаем

$$(w_0^2 u_0) + (2w_0 w_1 - u_1) q^{-1} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left( -(n+1)w_{n+1} - u_{n+2} + \sum_{m=0}^{n+2} w_m w_{n+2-m} \right) q^{-n-2} = 0,$$

откуда

$$w_0 = \pm \sqrt{u_0}, \quad w_1 = 0,$$

$$w_{n+2} = \left( u_{n+2} + (n+1)w_{n+1} - \sum_{m=1}^{n+1} w_m w_{n+2-m} \right) / 2w_0, n \geq 0.$$

Отсюда получаем, что

$$w_2 = \frac{u_2}{2w_0}, \quad w_3 = \frac{u_2}{2w_0^2}.$$

Тогда для функции  $w$  справедливо разложение

$$w_{\pm} = \pm i \frac{\Omega_*}{2m} \mp im \frac{\Lambda^2}{\Omega_*} q^{-2} - 2m^2 \frac{\Lambda^2}{\Omega_*^2} q^{-3} + O(q^{-4}).$$

Асимптотика функции  $\tilde{\psi}_{m1}$  и  $\tilde{\psi}_{m2}$  для больших значений  $|q|$  имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{m1,2} &= C(s) \exp \left[ \int dq w_{\pm} \right] = \\ &= C(s) \exp \left[ \pm i \left( \frac{\Omega_*}{2} \frac{q}{m} + \frac{\Lambda^2}{\Omega_*} \frac{m}{q} \right) + \frac{\Lambda^2}{\Omega_*^2} \frac{m^2}{q^2} + O \left( \frac{m^3}{q^3} \right) \right] = \\ &= C(s) \exp \left[ \pm i \left( \frac{\Omega_*}{2} \frac{q}{m} + \frac{\Lambda^2}{\Omega_*} \frac{m}{q} \right) \right] \left[ 1 + \frac{\Lambda^2}{\Omega_*^2} \frac{m^2}{q^2} + O \left( \frac{m^3}{q^3} \right) \right], \end{aligned}$$

где плюс в правой части соответствует решению  $\tilde{\psi}_{m1}$ , а минус —  $\tilde{\psi}_{m2}$ . Отсюда следует, что при больших  $q$  решение осциллирует с частотой, близкой к  $\Omega_*/2$ . Полученная асимптотика позволяет сделать вывод о поведении возмущения потенциала на больших временах. Для этого свяжем  $\delta\varphi_m(k, \tau)$  с функцией  $\tilde{\psi}_m(k, \tau)$ . Согласно определению,

$$\delta\varphi_m(\xi, \Gamma) = r_s \omega'_{Es} \left( \Gamma + \frac{\Omega_*}{2} - m\xi \right) \psi_m(\xi, \Gamma).$$

Применим преобразование Фурье к этому равенству по частоте  $\Gamma$  и по отклонению  $\xi$ . Тогда получаем

$$\begin{aligned} \delta\varphi_m(k, \tau) &= \omega'_{Es} r_s \left( i \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\Omega_*}{2} - im \frac{\partial}{\partial k} \right) \times \\ &\times \psi_m(k, \tau) = \omega'_{Es} r_s \left[ \frac{\Omega_*}{2} - im \frac{\partial}{\partial q} \right] \times \\ &\times \frac{\tilde{\psi}_m}{\sqrt{q^2 + m^2}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Из (24) и (28) получаем, что возмущение потенциала можно представить в виде

$$\delta\varphi_m(q, s) = C_1(s) \Psi_1(q) + C_2(s) \Psi_2(q), \quad (29)$$



где

$$\Psi_{1,2} = \omega'_{Es} r_s \left[ \frac{\Omega_*}{2} - im \frac{\partial}{\partial q} \right] \frac{\tilde{\Psi}_{m1,2}}{\sqrt{q^2 + m^2}}.$$

В пределе  $|q| \rightarrow \infty$  можем считать, что

$$\tilde{\Psi}_{m1} = \cos\left(\frac{\Omega_*}{2m}q\right), \quad \tilde{\Psi}_{m2} = \sin\left(\frac{\Omega_*}{2m}q\right).$$

В таком случае функций  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  имеют следующие асимптотики:

$$\Psi_1(|q| \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{\Omega_*}{2q} \exp\left[i \frac{\Omega_*}{2m}q\right],$$

$$\Psi_2(|q| \rightarrow \infty) \rightarrow -i \frac{\Omega_*}{2q} \exp\left[i \frac{\Omega_*}{2m}q\right],$$

где постоянные множители внесены в коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$ . Подставив эти асимптотические выражения в (29), получаем асимптотику для возмущения потенциала

$$\delta\phi_m(q, s) \rightarrow [C_1(s) - iC_2(s)]\Psi_1(q), \quad (30)$$

при  $|q| \rightarrow \infty$ .

Как упомянуто выше, в области больших  $|q|$  (или  $|k|$ ) волновой пакет окажется за время  $\tau \sim |q/m|$ , поэтому асимптотика (30) позволяет проследить поведение потенциала на больших временах ( $\tau \gg q/m$ ). Тогда справедлива асимптотика

$$\begin{aligned} \delta\phi(\xi, \phi, \tau \rightarrow \infty) &\rightarrow \\ &\rightarrow \exp\left[im\left(\phi - \left[\omega_{Es} + \frac{\omega_*}{2m}\right]t\right)\right] \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\xi} a(k + m\tau)\Psi_1(k) + \text{к.с.}, \end{aligned}$$

где считается, что начальное возмущение является гармонической функцией по азимутальному углу с волновым числом  $m$ , а также введено обозначение

$$a(s) = C_1(s) - iC_2(s).$$

Постоянные множители включены в коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$ . Сделав в интеграле по  $k$  замену переменных  $k' = k + m\tau$ , приходим к асимптотике

$$\begin{aligned} \delta\phi(\xi, \phi, \tau \rightarrow \infty) &\rightarrow \\ &\rightarrow e^{i\theta(\xi, t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{\sqrt{2\pi}} e^{ik'(\xi + \Omega_*/2m)} \frac{a(k')}{k' - m\tau} + \text{к.с.}, \end{aligned}$$

где

$$\theta(\xi, t) = m\left(\phi - \left[\omega_{Es} + \omega'_{Es}\xi + \frac{\omega_*}{m}\right]t\right).$$

Пусть начальное возмущение локализовано в области  $|k| \ll m$ , тогда  $a(k')$  также

локализована в этой же области. В таком случае окончательно получаем:

$$\delta\phi(\xi, \phi, \tau \rightarrow \infty) \rightarrow \text{const} \cos[\theta(\xi, t)]/t,$$

а энергия возмущения от времени не зависит. Отсюда следует, что при учете эффекта КЛР несобственная желобковая мода устойчива.

### Выводы

Хотя, согласно [6], в плазме с монотонным профилем скорости и частоты вращения нет экспоненциально растущих возмущений, тем не менее в плазме с холодными ионами возможно развитие более медленных коротковолновых колебаний со степенным законом роста амплитуды. Как следует из асимптотики интеграла энергии возмущения, неоднородное вращение при этом не сдвигает порог развития неустойчивости относительно случая, когда  $\omega'_{Es} = 0$ . Однако энергия возмущения растет со временем даже в том случае, когда амплитуда потенциала насыщается. Это связано с тем, что при деформации желобка электрическое поле возмущения изменяется.

Благоприятное влияние дифференциального вращения на удержание плазмы связано не только с более медленным ростом возмущения, но также с тем, что при этом деформируется сама конвективная желобковая ячейка, что приводит к уменьшению радиальной длины волны желобка, а следовательно, и радиального переноса, порождаемого такой неустойчивостью.

В реальной плазме ионы всегда имеют конечную температуру, поэтому  $\omega_* \neq 0$ , и при росте радиального волнового числа рано или поздно наступает состояние  $k\rho_{Li} \sim 1$ , когда эффекты КЛР становятся существенными. Как показано, это приводит к насыщению энергии волнового пакета. Таким образом, полная линейная устойчивость дифференциально вращающейся плазмы объясняется совместным действием ширины скорости и эффектов КЛР.

### Список литературы

1. Богданов Г. Ф., Головин И. Н., Кучеряев Ю. А. и др. Свойства плазмы, образующейся в ОГРЕ при инжекции пучка

молекулярных ионов водорода // Nuclear Fusion: Supplement. 1962. Part 1. P. 215.

2. *Damm C. C., Foote J. H., Futch A. H. et al.* Cooperative Effects in a Tenuous Energetic Plasma Contained by a Magnetic Mirror Field // Physics of Fluids. 1965. Vol. 8. No. 8. P. 1472.

3. *Бехтенов А. А., Волосов В. И.* О некоторых особенностях желобковых колебаний в открытой ловушке с радиальным электрическим полем // ЖТФ. 1977. Т. 47 (7). С. 1450.

4. *Den Hartog D. J., Golingo R. P., Jackson S. L. et al.* The ZaP Flow Z-pinch: Plasma Flow Shear and Stability // Fusion Science and Technology. 2004. Vol. 47. No. 1Т. P. 134.

5. *Timofeev A. V., Tupikov S. E.* Drift Instability in a NonUniform Electrical Field // Fusion Science and Technology. 1999. Vol. 35. No. 1Т. P. 253.

6. *Тимофеев А. В.* Резонансные явления в колебаниях плазмы. М.: Физматлит, 2000.

7. *Vagryansky P. A., Lizunov A. A., Zuev A. A.* Experiments with Controllable Application of Radial Electric Fields in GDT Central Cell //

Fusion Science and Technology. 2003. Vol. 43. No. 1Т. P. 152.

8. *Kaneko T., Tsunoyama H., Hatakeyama R.* Drift-Wave Instability Excited by Field-Aligned Ion Flow Velocity Shear in the Absence of Electron Current // Physical Review Letters. 2003. Vol. 90. P. 125001-1.

9. *Беклемишев А. Д., Чащин М. С.* Влияние вращения на устойчивость плазмы в ГДЛ // Физика плазмы. 2008. Т. 34, № 5. С. 463.

10. *Rosenbluth M. L., Simon A.* Finite Larmor Radius Equations with Nonuniform Electric Field and Velocities // Physics of Fluids. 1965. Vol. 8. P. 1300.

11. *Солдаткина Е. И., Багрянский П. А., Соломахин А. Л.* Влияние радиального профиля электрического потенциала на удержание двухкомпонентной плазмы с высоким  $\beta$  в Газодинамической ловушке // Физика плазмы. 2008. Т. 34, № 4. С. 291.

12. *Никуфоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984.

Материал поступил в редколлегию 15.01.2009

## Приложение 1

### Вычисление коэффициентов $C_1(s)$ и $C_2(s)$

Возмущение потенциала в Фурье-разложении можно представить в виде

$$\delta\varphi(\xi, \phi, t) = \frac{\omega'_{Es}}{r_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi - \omega'_{Es}t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\xi} \delta\varphi_m(k, t), \quad (\text{П-1})$$

где

$$\delta\varphi_m(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\gamma/\omega'_{Es})}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\gamma t} \delta\varphi_m(k, \omega) \Big|_{\omega=m\omega'_{Es}+\gamma}.$$

Взяв обратное Фурье-преобразование по углу и координате, получаем первое

$$h_m(k) \stackrel{\text{def}}{=} \delta\varphi_m(k, t=0) = \frac{r_s}{\omega'_{Es}} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{-im\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik\xi} \delta\varphi(\xi, \phi, t=0), \quad (\text{П-2})$$

и второе

$$\begin{aligned} h'_m(k) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial \delta\varphi_m}{\partial k} \right)_{k+m\omega'_{Es}t} (k, t=0) &= -\frac{r_s}{(\omega'_{Es})^2} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{-im\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik\xi} \times \\ &\times \left[ i(\omega_{Es} + \omega'_{Es}\xi) \delta\varphi(\xi, \phi, t=0) + \frac{1}{m} \frac{\partial \delta\varphi}{\partial t}(\xi, \phi, t=0) \right], \quad (\text{П-3}) \end{aligned}$$

граничные условия. После подстановки решения (9)<sup>1</sup> в начальные условия получаем выражения для коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  :

$$C_1(q/2) = -\frac{1}{W(q)} \left( \frac{d\varphi_{m2}}{dq} h_m(q) - \varphi_{m2}(q) h'_m(q) \right), \quad (\text{П-4})$$

$$C_2(q/2) = \frac{1}{W(q)} \left( \frac{d\varphi_{m1}}{dq} h_m(q) - \varphi_{m1}(q) h'_m(q) \right), \quad (\text{П-5})$$

где  $W(q) = m^4 W_0 / (q^2 + m^2)^2$  – «вронскиан» уравнения (8)<sup>2</sup>, а нормировочный множитель

$$W_0 = \left( \varphi_{m2} \frac{d\varphi_{m1}}{dq} - \varphi_{m1} \frac{d\varphi_{m2}}{dq} \right) \Big|_{q=0}.$$

## Приложение 2

### Случай $\Lambda^2 = 2$

Случай  $\Lambda^2 = 2$  примечателен тем, что в асимптотике на больших временах амплитуда возмущения потенциала насыщается, при этом, согласно нашим оценкам, энергия поля возмущения должна расти квадратично со временем. Рост энергии связан с тем, что радиальный размер конвективной ячейки желобка уменьшается со временем, что приводит к увеличению электрического поля в ней.

Линейно независимые решения уравнения (8)<sup>3</sup> для случая  $\Lambda^2 = 2$  имеют вид

$$\delta\varphi_{m1}(q) = \frac{1}{2} \frac{q/m^2}{q^2 + m^2} + \frac{(q/m)}{2m^3},$$

$$\delta\varphi_{m2}(q) = 1.$$

Для определенности зададимся конкретным видом начального возмущения, считая, что оно имеет гауссов профиль по отклонению относительно области локализации, а по углу меняется периодически, т. е.

$$\delta\varphi(r - r_s, \phi, t = 0) = \delta\Phi_0 e^{-(r-r_s)^2/d^2} \cos(m\phi).$$

Также считаем, что

$$\frac{\partial \delta\varphi}{\partial t}(t = 0) = 0.$$

Воспользовавшись формулами (П-2)–(П-5), можно вычислить коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  и соответственно получить выражение для Фурье-гармоник потенциала возмущения. После подстановки результата в (П-1) находим временную зависимость возмущения потенциала, образующего желобок.

На рис. 1П построена зависимость величины Фурье-амплитуды возмущения потенциала, соответствующей положительному значению азимутального волнового числа, от  $k$  для разных моментов времени. Заметим, что волновой пакет практически не смещается вдоль оси  $k$  в течение некоторого времени проскальзывания слоев плазмы относительно друг друга, т. е. вплоть до момента времени  $\tau \sim 2$ . Только потом возмущение смещается влево, в область больших  $|k|$ . Это связано с тем, что ширина спектра начального возмущения  $\Delta k \sim 2$ . Значит, на временах порядка  $1/\omega'_{Es}$  форма конвективной ячейки желобка деформируется

<sup>1</sup> См. с. 30.

<sup>2</sup> Там же.

<sup>3</sup> Там же.

несущественно. При этом стоит отметить, что амплитуда Фурье-гармоники насыщается лишь на достаточно больших временах ( $\tau \sim 5$ ). Фурье-гармоника, соответствующая отрицательному значению азимутального волнового числа, движется симметрично вправо.

На рис. 2П изображены линии уровня потенциала  $\delta\varphi(r-r_s, \phi, t)$  в различные моменты времени. Знаками «плюс» и «минус» показана полярность. Видно, что желобок смещается по азимуту (на рисунке влево) со скоростью электрического дрейфа, при этом из-за сдвигового характера течения плазмы его радиальная длина волны уменьшается. Проследим также за изменением энергии возмущения. Для этого необходимо вычислить интеграл (17)<sup>4</sup>. На рис. 3П, а изображен ход энергии возмущения во времени. Из него видно, что на временах порядка  $3/\omega'_{Es}$  или больших зависимость становится квадратичной. Этот вывод хорошо согласуется с асимптотикой (19)<sup>5</sup>.

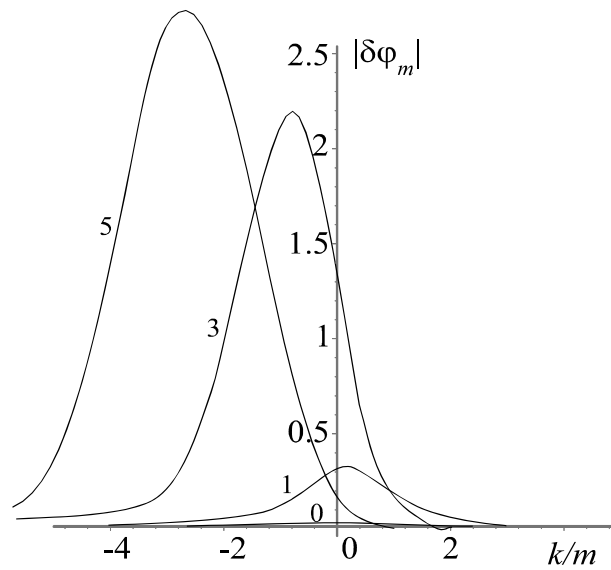


Рис. 1П. Зависимость  $|\delta\varphi_{m_0}|$  от  $k$  в различные моменты нормированного времени  $\tau$

(указано на рисунке), где амплитуда потенциала нормирована на  $|\delta\Phi_0|$ ,  $d = 0,1$  см,  $m = 10$ ,  $r_s = 1$  см,  $\omega'_{Es}/\omega_{Es} = 1,5$

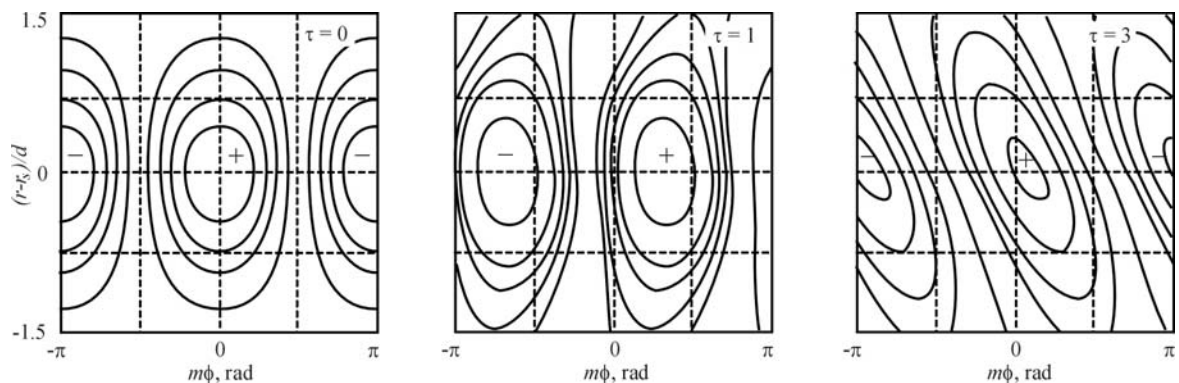


Рис. 2П. Линии уровня потенциала  $\delta\varphi(r-r_s, \phi, \tau)$  в различные моменты времени  $\tau$ .

Параметры желобка те же, что и на рис. 1П

<sup>4</sup> См. с.

<sup>5</sup> См. с.

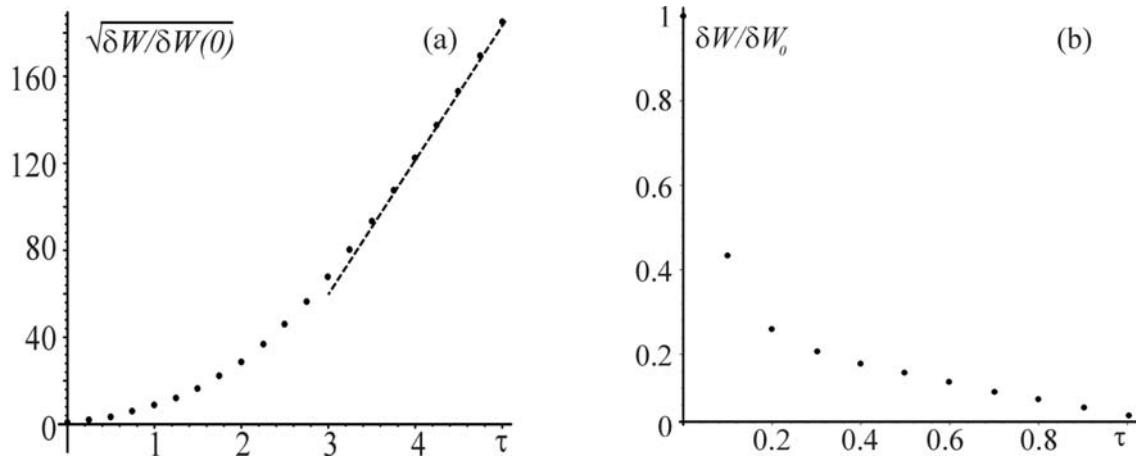


Рис. 3П. Изменение энергии возмущения: *a* – временная зависимость квадратного корня от энергии возмущения, значения нормированы на энергию начального возмущения  $\delta W(t=0)$ ; *b* – временная зависимость отношения энергии возмущения в плазме с дифференциальным вращением к её значению в случае, когда  $\omega'_{Es} = 0$ .

Параметры желобка те же, что и на рис. 1П

Для сравнения приведем зависимость отношения энергии возмущения в плазме со сдвиговым вращением к её значению в случае, когда  $\omega'_{Es} = 0$ , при этом остальные параметры плазмы остаются теми же (рис. 3П, *b*). В плазме с равновесием без вращения энергия неустойчивого начального возмущения растёт экспоненциально, что заметно быстрее, чем в случае с дифференциальным вращением, т. е.

$$\delta W_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk (k^2 + m^2) |A_1(k)e^{\lambda_1(k)t} + A_2(k)e^{\lambda_2(k)t}|^2,$$

где

$$\lambda_{1,2} = -im\omega_{Es} \pm m \sqrt{\frac{(\omega_{Es}^2 + \gamma_0^2)}{k^2 + m^2} \left| \frac{d \ln n_0}{dr / r_s} \right|_{r=r_s}},$$

$$A_{1,2} = \pm \frac{\lambda_{2,1} \tilde{h}_m}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

$$\tilde{h}_m = \frac{\delta \Phi_0 d}{2\sqrt{2}} e^{-k^2 d^2 / 4r_s^2},$$

Из рис. 3П, *b* наглядно видно, что дифференциальное вращение хоть и не подавляет неустойчивость полностью и не меняет ее порог, но приводит к уменьшению скорости роста энергии возмущения, которая изменяется по степенному закону.

M. S. Chaschin, A. D. Beklemishev

#### STABILITY OF SMALL-SCALE PERTURBATIONS IN DIFFERENTIALLY ROTATING PLASMAS

The initial-value problem for linearized equation describing small-scale flute modes in plasmas with nonuniform rotation is solved. It is shown that the differential rotation modifies qualitative characteristics of interchange bubbles such as their shape and the temporal dependence of amplitude. The radial wavelength of perturbations decreases with time, while their amplitude evolves according to a power law, instead of the usual exponential behavior. The radial contraction of the wavelength leads, on the one hand, to the decrease of the plasma displacement, but, on the other hand, to the increase of the perturbed electric field. As a result, the energy of perturbations increases even in the case when the amplitude of perturbed potential stays constant. Small-scale perturbations become stable if the ion gyroviscosity is taken into account.

*Keywords:* flute instability, differential rotation, the effect of FLR.