

УДК 533.902

**А. В. Терехов, И. В. Тимофеев, К. В. Лотов**

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН  
пр. Акад. Лаврентьева, 11, Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия  
E-mail: timofeev@ngs.ru

## **ДВУМЕРНАЯ ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ПЛАЗМЫ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ПРОЦЕССОВ ПУЧКОВО-ПЛАЗМЕННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ \***

На основе метода частиц в ячейках реализована двумерная численная модель, позволяющая моделировать процессы релаксации мощных электронных пучков в плазме. Для повышения эффективности расчетов на суперкомпьютере в контексте процедуры обращения оператора Лапласа предложено использовать алгоритм дихотомии. На примере тестовых расчетов, детально воспроизводящих известные физические явления, продемонстрирована адекватность предлагаемой модели для изучения возбуждаемой пучком турбулентности. Исследованы особенности развития модуляционной неустойчивости в условиях, когда энергия волны накачки превышает тепловую энергию плазмы.

*Ключевые слова:* PIC-метод, пучково-плазменное взаимодействие, двухпоточковая неустойчивость, модуляционная неустойчивость, затухание Ландау.

### **Введение**

Задача о релаксации электронного пучка в плазме является одной из наиболее фундаментальных проблем физики плазмы. Несмотря на то что изучение различных аспектов пучково-плазменного взаимодействия началось несколько десятилетий назад [1; 2], исследования в этой области остаются актуальными и по сей день [3–6]. С одной стороны, это связано с многообразием режимов взаимодействия пучка с плазмой, детальное изучение которых стало возможным только недавно благодаря растущим возможностям численного моделирования. С другой стороны, это связано с появлением новых концепций использования электронных пучков в термоядерных исследованиях, одной из которых является идея быстрого поджига мишени в инерциальном термоядерном синтезе [7; 8].

В данной работе для моделирования коллективного взаимодействия электронного пучка с плазмой на основе метода частиц

в ячейках («Particles In Cells», PIC) разработан параллельный численный код ТАВ (Turbulence and Beams). На сегодняшний день предложено множество параллельных версий PIC-метода для моделирования различных плазменных явлений [9; 10; 11]. Отличие ТАВ-кода состоит в том, что процедура обращения оператора Лапласа включает в себя алгоритм дихотомии для решения трехдиагональных систем уравнений на многопроцессорных вычислительных системах [12]. Выбор алгоритма дихотомии обусловлен необходимостью многократного решения уравнения Пуассона на фиксированной сетке. В итоге применение нового алгоритма параллельной прогонки позволило более эффективно использовать ресурсы суперкомпьютера в сравнении с другими алгоритмами и, как следствие, значительно сократить время расчетов.

Цель данной работы состоит в том, чтобы выяснить, насколько адекватно предлагаемая численная модель описывает физи-

\* Работа поддержана Госконтрактом ФЦП № П2309, грантами Рособразования РНП 2.1.1/3983, Президента РФ МД-2995.2009.2, РФФИ 09-02-00594 и Фондом содействия отечественной науке.

ческие явления, лежащие в основе процессов возбуждения плазменной турбулентности мощными релятивистскими пучками при параметрах, характерных для экспериментов по нагреву плазмы в открытых ловушках [13; 14; 15]. Чтобы правильно описывать накачку энергии в турбулентность, необходимо убедиться, что модель правильно воспроизводит такие элементарные явления, как черенковское излучение ленгмюровской волны точечной частицей и коллективный эффект раскачки двухпоточковой неустойчивости. В сильнотурбулентных сценариях ключевым процессом переноса энергии по спектру, как правило, является модуляционная неустойчивость, поэтому имеет смысл выяснить, насколько аккуратно этот нелинейный эффект описывается моделью на примере монохроматической ленгмюровской волны. В качестве одного из основных механизмов поглощения турбулентной энергии в плазме выступает затухание Ландау, в связи с этим необходимо знать, при каких условиях и с какой точностью это явление может быть воспроизведено в численной модели.

Вопросу о точности, с которой численные расчеты бесстолкновительного затухания бегущей волны могут сравниваться с теорией, в работе уделено особое внимание. Дело в том, что в реальном численном эксперименте, когда возмущение функции распределения эволюционирует из заданного начального состояния, уменьшение энергии затухающей волны не является строго экспоненциальным и носит колебательный характер. В этом случае сравнение с упрощенной теорией, предполагающей экспоненциальное затухание волны с известным декрементом, имеет невысокую точность. Установить количественный критерий сходимости результатов численного моделирования к теории можно только в том случае, когда расчеты затухания волны сравниваются с решением соответствующей начальной задачи для уравнения Власова. Оказалось, что наша численная модель детально воспроизводит колебательный характер затухания волны в хорошем согласии с теоретическим предсказанием.

### Описание модели

Самосогласованная эволюция частиц и полей в полностью ионизированной бес-

столкновительной плазме описывается уравнениями Власова для ионной и электронной функций распределения  $f_{i,e}$ :

$$\frac{\partial f_{i,e}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{i,e}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_{i,e} \cdot \frac{\partial f_{i,e}}{\partial \mathbf{p}} = 0,$$

$$\mathbf{F}_{i,e} = q_{i,e} (\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]), \quad (1)$$

и уравнениями Максвелла для электромагнитных полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\text{div} \mathbf{E} = \rho, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0. \quad (3)$$

Входящие в эти уравнения плотности тока  $\mathbf{j}$  и заряда  $\rho$  вычисляются по функциям распределения частиц согласно формулам

$$\rho = \sum_{i,e} q_{i,e} \int f_{i,e} d\mathbf{v},$$

$$\mathbf{j} = \sum_{i,e} q_{i,e} \int f_{i,e} \mathbf{v} d\mathbf{v}. \quad (4)$$

Заряды  $q_{i,e}$  и массы  $m_{i,e}$  ионов и электронов плазмы и пучка измеряются здесь в единицах заряда  $e$  и массы  $m_e$  электрона, скорость  $v$  – в единицах скорости света  $c$ , плотность заряда и тока – в  $en_0$  и  $ecn_0$ , время  $t$  – в  $\omega_p^{-1} = (4\pi e^2 n_0 / m_e)^{-1/2}$ , расстояния  $\mathbf{r}$  – в  $c / \omega_p$ , и поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  – в единицах  $m_e c \omega_p / e$ . Во всех последующих расчетах плотность невозмущенной плазмы будет равна  $n_0 = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ , поэтому именно это значение удобно выбрать для обезразмеривания.

Для решения системы уравнений (1)–(4) будем использовать метод частиц в ячейках, в котором плазма представляется набором модельных частиц конечного размера [16, 17]. Форма частиц задается любой нормированной непрерывной функцией с конечным носителем. Такой подход позволяет проводить сглаживание сил и устранять близкие взаимодействия (соударения), не играющие существенной роли в разреженной плазме. Динамика модельных частиц совпадает с динамикой реальных частиц плазмы и описывается уравнениями, являющимися характеристиками уравнений Власова. Значения плотности зарядов и токов в данной схеме вычисляются в узлах пространственной сетки.

По результатам исследования зависимости точности получаемого решения от формы частицы [18] в коде ТАВ форма частицы задавалась «параболическим» ядром [19]. Такой выбор ядра позволяет при моделировании горячей плазмы значительно повы-

сильно точность сохранения полной энергии по сравнению с классическим PIC ядром (рис. 1).

Для вычисления полей по уравнениям Максвелла будем использовать схему Yee, известную также как алгоритм FDTD (Finite Difference Time Domain) [20], а для решения уравнений движения частиц – схему с перешагиванием [21]. Используемые численные схемы имеют второй порядок точности как по пространству, так и по времени.

В данной версии TAV-кода для полей и частиц используются либо идеально отражающие границы, либо периодические граничные условия по всем пространственным координатам.

Известно, что при вычислении сеточных плотностей заряда и тока необходимо удовлетворять разностному аналогу уравнения непрерывности

$$\frac{\rho^{m+1} - \rho^m}{\tau} + \text{div}_h \mathbf{j}^{m+1/2} = 0,$$

в противном случае появляются фиктивные заряды, в том числе и магнитные:

$$\text{div} \mathbf{B} \neq 0, \quad \text{div} \mathbf{E} \neq 4\pi\rho.$$

Существует несколько подходов к решению этой проблемы. Первый подход состоит в согласованном вычислении вкладов частиц в сеточную функцию тока и плотности заряда [11]. Во втором подходе вычисления плотности тока и заряда по распределению частиц проводятся по несогласованным формулам, а затем для коррекции вводится поправка к электромагнитному полю:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \hat{\mathbf{E}} - \nabla\delta\phi, \\ \Delta\delta\phi &= \text{div} \hat{\mathbf{E}} - \rho. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, решение уравнения Пуассона с краевыми условиями, вытекающими из физической постановки задачи, дает необходимую поправку к потенциалу и позволяет скорректировать значения поля  $\hat{\mathbf{E}}$ .

Достоинство первого подхода состоит в том, что вклад в функцию тока и плотности от каждой частицы может быть вычислен независимо от того, что является преимуществом при расчетах на многопроцессорных системах. Однако процедура согласования значительно увеличивает число арифметических действий в расчете на одну частицу. Второй подход требует обращения оператора Лапласа на каждом временном

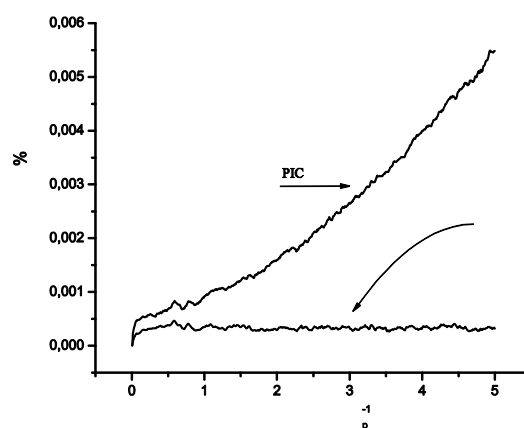


Рис. 1. Относительная погрешность выполнения закона сохранения энергии для различных ядер при моделировании релаксации горячей плазмы

шаге. Учитывая, что реализация решения уравнения Пуассона на многопроцессорной вычислительной системе представляет нетривиальную задачу, данный алгоритм практически не используется при реализации метода частиц в ячейках на суперЭВМ. Однако разработка алгоритма дихотомии для решения серии трехдиагональных систем алгебраических уравнений позволила предложить эффективную параллельную процедуру решения уравнения Пуассона. В табл. 1 представлены результаты вычислительных экспериментов по исследованию зависимости величины ускорения для решения задачи (5) от числа процессоров.

Видно, что использование алгоритма дихотомии в контексте процедуры обращения оператора  $\nabla^2$  позволяет достичь ускорения, близкого к линейному. Таким образом, в TAV-коде могут быть эффективно реализованы оба способа согласованного вычисления плотности тока и заряда: первый метод следует использовать при расчетах, когда число частиц в ячейке порядка 10–40, тогда как второй метод следует применять в случае, если число частиц значительно превышает число ячеек.

### Результаты численных экспериментов

*Черенковское излучение плазменной волны точечным зарядом.* Рассмотрим задачу о движении точечной частицы с зарядом  $Q$  с постоянной скоростью  $v_b$  в холодной и однородной плазме вдоль направления  $x$ .

Таблица 1

Зависимость времени счета и коэффициента ускорения при решении уравнения Пуассона\*

$N_x \times N_y$	2 048 × 2 048		4 096 × 4 096		8 192 × 8 192	
$N_p$	$T$	$S$	$T$	$S$	$T$	$S$
64	1.4e-02	–	8.0e-02	–	3.5e-01	–
128	7.3e-03	122	6.3e-02	138	1.8e-01	124
256	6.3e-03	142	1.8e-02	284	9.0e-02	254
512	–	–	1.1e-02	465	5.0e-02	448
1 024	–	–	1.0e-02	512	2.7e-02	829
2 048	–	–	–	–	2.0e-02	1 120

\* Здесь  $N_p$  – число процессоров,  $T$  – время счета (с) с использованием  $N_p$  процессоров,  $S = T / T_1$  – коэффициент ускорения,  $T_1$  – время счета с использованием одного процессора, а  $N_x \times N_y$  – число узлов сетки.

Аналитическое решение для возбуждаемых кильватерных полей в двумерной геометрии проще всего получить для случая неограниченной плазмы. Продольное электрическое поле при этом дается выражением

$$E_x = -\frac{Q}{2\alpha v_b} e^{-|y|/v_b} \cos(t - x / v_b), \quad (6)$$

где  $\alpha = n_0(c / \omega_p)^3$ . Следует иметь в виду, что формула (6) получена в предположении линейного отклика плазмы на внешнее поле, поэтому применима только на достаточном удалении от частицы.

Проведем расчет, в котором частица с зарядом  $Q = 1,896 \cdot 10^5$  и скоростью  $v_b = 0,699$  инжектируется в плазму с плотностью  $n = 1$  ( $\alpha = 5 \cdot 10^5$ ). Возьмем 250 макрочастиц в ячейке и выберем достаточно большую расчетную область, что позволит пренебречь влиянием граничных условий на кильватерное поле. Границы области при этом представляют собой идеально проводящие стенки. Здесь и во всех последующих расчетах для временного шага и шага пространственной сетки мы используем значения  $\tau = 0,005$ ,  $h = 0,01$ .

Как видно из рис. 2, результаты численного расчета хорошо согласуются с формулой (6) за исключением области вблизи частицы, где отклик плазмы нельзя считать линейным, и приграничной области, где существенное влияние на возбуждаемые поля оказывают граничные условия.

Кроме продольной ленгмюровской волны на двумерной карте поля  $E_x$  отчетливо наблюдается фронт электромагнитных возмущений, возникающих в момент инжекции

частицы в плазму, а также характерный черенковский конус, образуемый коротковолновыми возмущениями, длина волны которых сравнима с шагом сетки. Возбуждение этих колебаний является численным эффектом, связано с точечным характером вынуждающей силы и убывает с увеличением размера источника возмущения.

*Двухпотоковая неустойчивость.* Представленную здесь численную модель предполагается использовать для изучения квазистационарных состояний возбуждаемой пучком турбулентности. Механизмом, обеспечивающим преобразование энергии направленного движения пучка в энергию плазменных колебаний, является двухпотоковая неустойчивость. Поэтому для корректного описания области накачки модель должна правильно предсказывать величину инкремента нарастания этой неустойчивости.

Для простоты рассмотрим так называемую временную задачу о неустойчивости моноэнергетического пучка в системе с периодическими граничными условиями. При достаточно малой расчетной области из всего дискретного спектра плазменных колебаний в резонанс с пучком попадает единственная мода с минимально возможным волновым числом  $k$ . Закон дисперсии этой моды в системе «холодная плазма – холодный пучок» определяется следующим уравнением:

$$1 - \frac{1}{\omega^2} - \frac{(n_b / n)}{(\omega - kv_b)^2} = 0. \quad (7)$$

Если пучок имеет скорость  $v_b = 0,1961$  и относительную плотность  $n_b / n = 10^{-3}$ ,

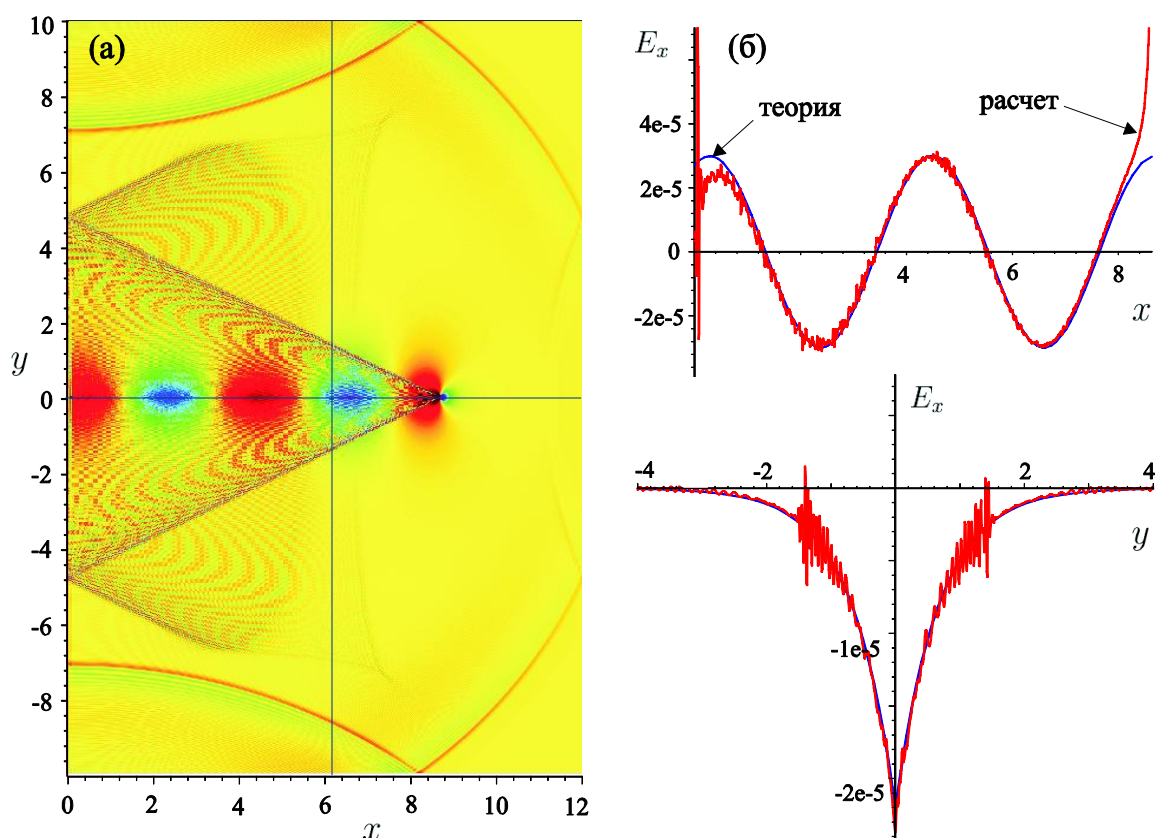


Рис. 2. Карта продольного электрического поля  $E_x$  в момент времени  $t = 13$  после начала инъекции (а), зависимость поля  $E_x$  вдоль линий  $y = 0$  и  $x = 6,1$  (б).

а волновое число резонансной моды

$$k = 5,5116,$$

то среди решений уравнения (7) имеется комплексный корень

$$\omega = 1,0081 + i0,058,$$

отвечающий экспоненциальному нарастанию амплитуды волны  $|E|$  с инкрементом  $\gamma_1 = 0,058$ . На рис. 3, а показана полученная в численной модели зависимость энергии неустойчивой волны  $|E|^2$  от времени. На этой кривой отчетливо выделяется участок экспоненциального роста, на котором логарифмическая производная

$$\gamma(t) = \frac{1}{2|E|^2} \frac{d|E|^2}{dt} \quad (8)$$

оказывается близка к теоретическому значению  $\gamma_1$  (рис. 3, б). Для достижения подобного согласия потребовалось использовать довольно большое число частиц в ячейке  $N_c = 450$ . Следует отметить, что при выбранных параметрах гидродинамическое

приближение, которое обычно используется для моноэнергетических пучков,

$$\gamma_h = \sqrt{3}n_b^{1/3} / 2^{4/3} \approx 0,069$$

оказывается недостаточно точным (штриховая линия на рис. 3, б), поэтому для детального сравнения модельных предсказаний с теорией приходится использовать численное решение уравнения (7).

*Модуляционная неустойчивость.* Важную роль в насыщении энергии возбуждаемой пучком турбулентности играет модуляционная неустойчивость. Поскольку в основе этого явления лежат чисто плазменные нелинейности, убедиться в корректном описании этой неустойчивости можно на задаче об эволюции монохроматической ленгмюровской волны конечной амплитуды в плазме без пучка. Особенность задачи о пучковом нагреве плазмы состоит в том, что на начальном этапе энергия возбуждаемой волны значительно превышает тепловую энергию плазмы  $W > nT$  ( $T$  –

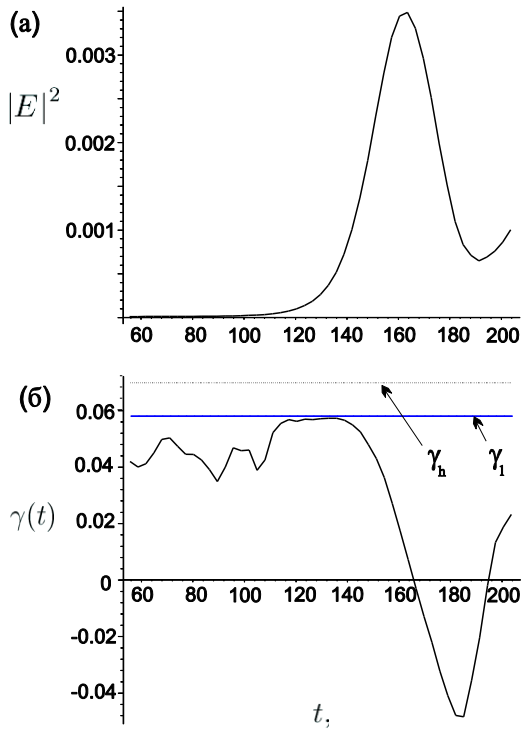


Рис. 3. Зависимость энергии волны от времени (а). Инкремент неустойчивости  $\gamma(t)$ , полученный в численной модели (8), и его теоретические предсказания (б)

температура электронов), поэтому уравнения Захарова [22], часто используемые для анализа модуляционной неустойчивости в режиме  $W \ll nT$ , не могут служить надежной теоретической основой для детального сравнения с численными расчетами. На границе применимости  $W \sim nT$  эти уравнения предсказывают преимущественное нарастание мелкомасштабных возмущений  $qr_D \sim 1$  ( $r_D$  – дебаевская длина), которые должны испытывать сильное поглощение на частицах плазмы. Таким образом, в режиме сильных накачек для сравнения с численной моделью теория должна учитывать как диссипативные эффекты, так и возможное влияние электронных нелинейностей. Последние не всегда могут быть корректно учтены аналитически, поэтому численное моделирование развития модуляционной неустойчивости в режиме  $W > nT$  представляет самостоятельный интерес.

Для исследования режима сильной накачки рассмотрим одномерную эволюцию монохроматической ленгмюровской волны ( $k = 1,047$ ) с амплитудой  $E = 0,04$  в плазме

с температурой электронов  $T = 25$  эВ ( $v_T = \sqrt{T/m_e c^2} = 0,007$ ,  $W/nT = 16,4$ ). При этом для удобства сравнения с теорией выберем следующую функцию распределения электронов по скоростям:

$$f(v) = \frac{2nv_T^3}{\pi(v^2 + v_T^2)^2}. \quad (9)$$

В теории единообразный учет как нелинейных, так и диссипативных эффектов легче всего провести в случае, когда волна накачки имеет бесконечно большую длину. Поскольку в рассматриваемом случае неустойчивыми оказываются возмущения с достаточно большими волновыми числами  $q \gg k$ , то это приближение можно считать оправданным.

Рассмотрим устойчивость однородной волны накачки  $E(t) = E \sin(\omega t)$  относительно потенциальных возмущений электрического поля с волновым числом  $q$  и частотой  $\Omega$ :

$$\delta E(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta E_m e^{-i(\Omega + m\omega)t + iqx}.$$

Дисперсионное уравнение для этих возмущений получается из условия разрешимости следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$1 + \varepsilon_i(\Omega + m\omega, q) \delta E_m + \sum_{n,l} J_n(qr_E) J_l(qr_E) \varepsilon_e(\Omega + (m-l)\omega, q) \delta E_{m-l+n} = 0, \quad (10)$$

где  $J_n$  – функция Бесселя;  $r_E = E/\omega^2$  – амплитуда смещения электрона в поле волны;  $\varepsilon_{e,i}(\Omega, q)$  – электронный и ионный вклады в диэлектрическую проницаемость плазмы. Для теплых электронов с функцией распределения (9) и холодных ионов эти вклады имеют простые выражения:

$$\varepsilon_e = \varepsilon_e(\Omega, q) = -\frac{(\Omega + 3iqv_T)}{(\Omega + iqv_T)^3},$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i(\Omega, q) = -\frac{(m_e/m_i)}{\Omega^2}.$$

Решить уравнение (10) можно только в длинноволновом пределе  $qr_E \ll 1$ , когда электронная нелинейность мала, и вкладом высших гармоник с  $|m| > 1$  можно пренебречь. В этом приближении дисперсионное уравнение модуляционной неустойчивости, обобщенное на случай произвольного распределения частиц по скоростям, имеет следующий вид:

$$1 + \varepsilon_i + \varepsilon_e + \frac{q^2 r_E^2}{4} \times \left[ \frac{(\varepsilon_e - \varepsilon_{e+})(1 + \varepsilon_i + \varepsilon_{e+})}{1 + \varepsilon_{i+} + \varepsilon_{e+}} + \frac{(\varepsilon_e - \varepsilon_{e-})(1 + \varepsilon_i + \varepsilon_{e-})}{1 + \varepsilon_{i-} + \varepsilon_{e-}} \right] = 0, \quad (11)$$

где  $\varepsilon_{e,i\pm} = \varepsilon_{e,i}(\Omega \pm \omega, q)$ . Что касается нелинейностей более высокого порядка, то их влияние, в основном, должно сводиться к модификации резонансных знаменателей  $1 + \varepsilon_{i\pm} + \varepsilon_{e\pm}$ , отвечающих закону дисперсии высокочастотных колебаний. В одномерном случае, однако, при  $qr_E \ll 1$  чисто электронная нелинейность не дает вклада [23], и нелинейный сдвиг частоты  $q^2 r_E^2$  содержит дополнительную малость ( $m_e / m_i$ ). Таким образом, уравнение (11) может служить неплохим приближением во всем диапазоне  $q \leq 1/r_E$ . О раскачке более коротковолновых колебаний ( $q > 1/r_E$ ) можно делать лишь качественные выводы, поскольку основную роль для них играют эффекты опрокидывания и пересечения электронных траекторий.

Сравним наблюдаемую в расчетах картину развития модуляционной неустойчивости с предсказаниями теории.

На рис. 4 показана динамика изменения функций распределения электронов и ионов плазмы в процессе нарастания модуляционных возмущений. Видно, что сначала холодные ионы и теплые электроны совершают регулярные колебания в поле ленгмюровской волны ( $t = 25$ ). Затем происходит аperiodическое нарастание коротковолновых возмущений, что приводит к модуляции скорости ионов с характерным волновым числом  $q \approx 30\omega_p / c$  ( $t = 150$ ). Поскольку длина волны этого возмущения оказывается меньше того смещения, которое испытывают электроны под действием электрического поля, т. е.

$$q > 1/E = 25\omega_p / c,$$

то для части электронов процесс взаимодействия с полем волны не является адиабатическим. Это приводит к ускорению хвостовых электронов, благодаря чему на фазовой плоскости из мест, где электроны приобретают максимальную осцилляторную скорость, наблюдаются характерные выбросы в более высокие энергии ( $t = 200$ ). Однако подобные эффекты, связанные с

сильной электронной нелинейностью, начинают играть существенную роль только после того, как амплитуда возмущения становится сравнимой с амплитудой волны накачки. Начальную же стадию развития неустойчивости, когда в опрокидывании участвует незначительная доля плазменных электронов, можно описывать без учета электронных нелинейностей.

Итак, теория предсказывает, что на линейной стадии модуляционной неустойчивости Фурье гармоники флуктуаций плотности ионов должны расти по закону  $\delta n_q = \delta n_0 \exp(-\Gamma_q t)$  с инкрементом  $\Gamma_q$ , значение которого определяется из решения уравнения (11). Выбирая начальный уровень шума в соответствии с измеренным в PIC расчетах, сравним скорость нарастания и спектральный состав неустойчивых возмущений.

Из рис. 5 видно, что численные спектры флуктуаций плотности ионов, измеренные в различные моменты времени, неплохо согласуются с теорией даже в коротковолновой части спектра  $q > 1/r_E$ , где уравнение (11) формально не применимо. Чтобы убедиться в отсутствии влияния численных эффектов на раскачку наблюдаемой неустойчивости, мы провели повторный численный эксперимент с удвоенным шагом сетки, который показал, что динамика неустойчивого спектра в области максимума инкремента остается неизменной.

Таким образом, наблюдаемое в расчетах нарастание мелкомасштабных флуктуаций плотности является следствием развития физической модуляционной неустойчивости, которая в режиме сильной накачки  $W > nT$  обладает рядом особенностей. Наиболее неустойчивыми в этом случае оказываются возмущения с  $q > 1/r_E$ , раннюю стадию нарастания которых можно удовлетворительно описать упрощенной теорией (11). Нелинейная стадия неустойчивости при этом связана не с коллапсом, а с сильной электронной нелинейностью, благодаря которой нарастающие модуляционные возмущения сразу оказываются в области сильного поглощения, где затухают за счет пересечения электронных траекторий.

*Затухание Ландау.* В режимах слабой турбулентности основным механизмом поглощения волновой энергии является затухание



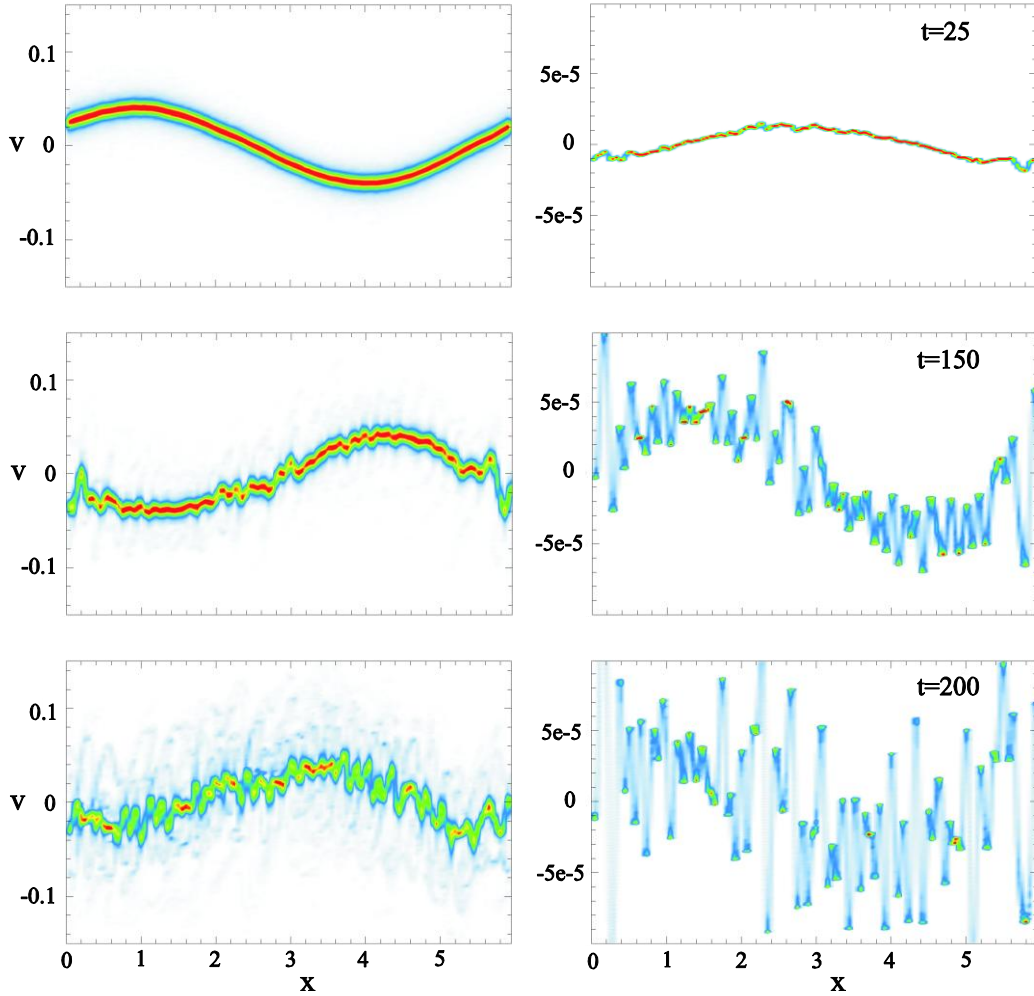


Рис. 4. Эволюция электронной (слева) и ионной (справа) функций распределения в процессе развития модуляционной неустойчивости

хание Ландау. Выясним, насколько точно этот эффект воспроизводится в модели на примере затухания бегущей ленгмюровской волны в изотропной плазме.

Сравним сначала измеренный в расчетах показатель экспоненциального спада энергии бегущей волны с мнимой частью частоты, полученной из дисперсионного соотношения. Пусть функция распределения плазменных электронов в двумерном пространстве импульсов представляется в виде

$$f(p) = \frac{n}{2\pi\Delta p^2} \exp\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2}{2\Delta p^2}\right),$$

а ионы считаются неподвижными. Тогда с учетом релятивистских эффектов дисперсионное соотношение для продольной волны имеет вид

онное соотношение для продольной волны имеет вид

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 + a + \frac{1}{k^2\Delta p^2} \times \left[ (1 + p_0^2)(1 - Z(\xi)) - \Delta p^2 Z(\xi) \right] = 0. \quad (12)$$

Здесь  $p_0 = \omega / \sqrt{k^2 - \omega^2}$  – импульс, вычисленный по фазовой скорости волны;  $\xi = p_0 / \sqrt{2}\Delta p$ ;  $Z(\xi)$  – дисперсионная функция плазмы

$$Z(\xi) = 2\xi e^{-\xi^2} \int_0^{\xi} e^{x^2} dx - i\sqrt{\pi}\xi e^{-\xi^2},$$

$$a = \frac{1}{k^2\Delta p^2} \int_0^{\infty} \exp(-x^2 - \sqrt{2}x/\Delta p) dx.$$



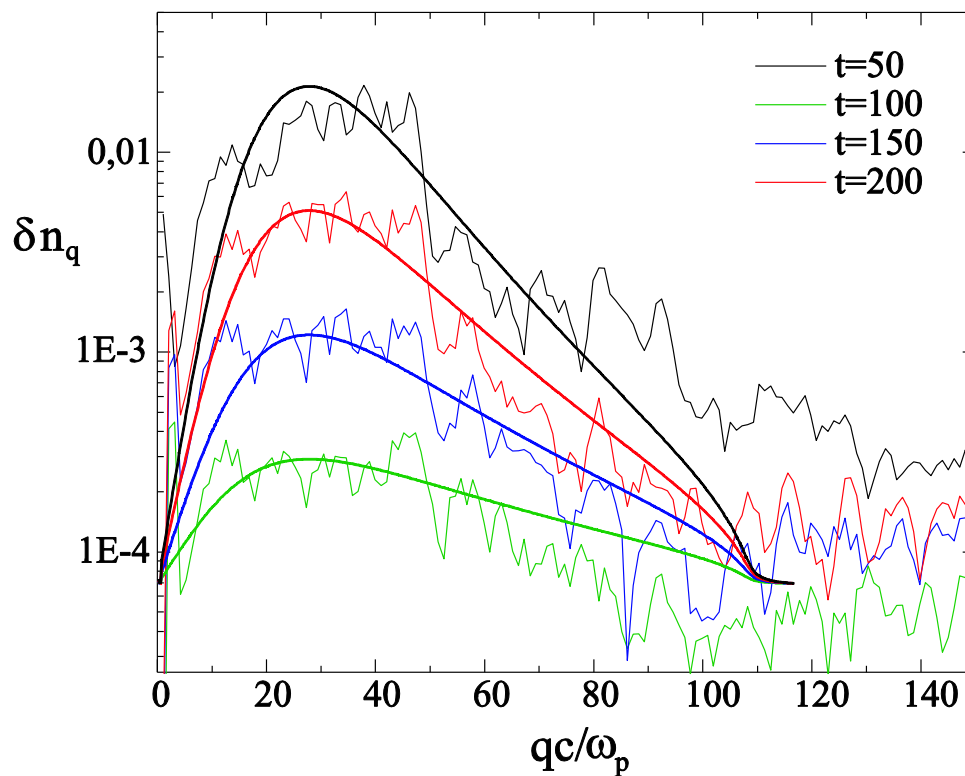


Рис. 5. Сравнение Фурье спектров флуктуаций плотности в PIC модели с теоретическими спектрами в различные моменты времени

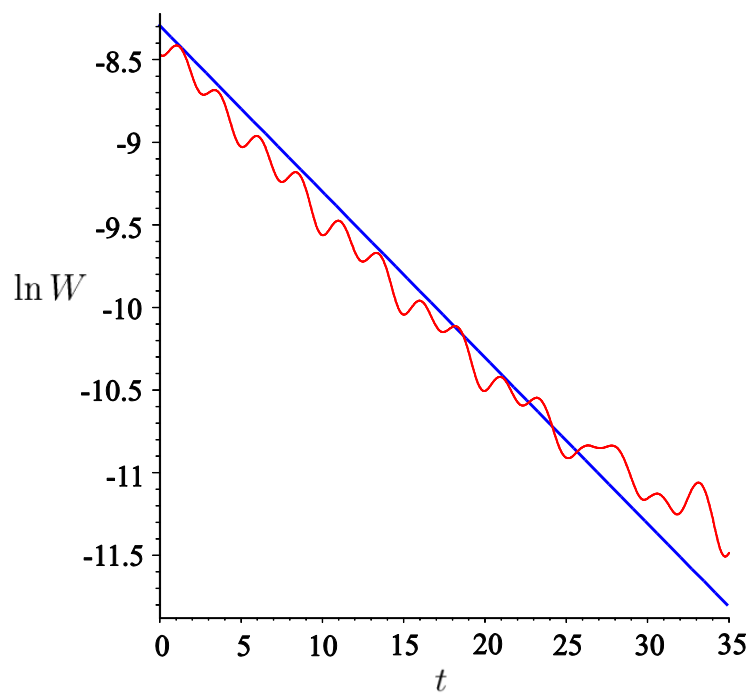


Рис. 6. Уменьшение  $\ln W$  в затухающей волне со временем; прямая соответствует строго экспоненциальному затуханию волны с декрементом  $\gamma_1$

Решением уравнения (12) является комплексная частота  $\omega_k = \omega_1 - i\gamma_1$ , мнимая часть которой и описывает бесстолкновительное затухание волны. Таким образом, энергия возбужденной в плазме ленгмюровской волны должна уменьшаться со временем по закону  $W \propto \exp(-2\gamma_1 t)$ . Для сравнения численного эксперимента с теорией рассмотрим затухание волны с волновым числом  $k = 5,4165$  в плазме с тепловым разбросом по импульсам  $\Delta p = 0,072$ . В этом случае решение уравнения (12) дает  $\omega_1 = 1,2608$ ,  $\gamma_1 = 0,0502$ . На рис. 6 представлена зависимость логарифма энергии волны от времени.

На стадии, когда энергия волны достаточно велика, результат численного счета хорошо ложится на теоретическую прямую. Согласие исчезает лишь после того, как энергия волны становится сравнимой с энергией тепловых шумов в плазме. Из рис. 6 видно также, что затухание волны в численной модели не является строго экспоненциальным и носит колебательный характер. Это обстоятельство вносит некоторую неопределенность в вопрос о том, насколько точно численный расчет согласуется с теорией.

Между тем наблюдаемые в расчетах колебания энергии допускают детальное теоретическое описание. Для этого необходимо сформулировать задачу в более адекватной для численного эксперимента постановке, т. е. решать уравнения Максвелла и кинетическое уравнение Власова с учетом начального условия для возмущения функции распределения

$$\delta f(0, x, p) = \frac{ieE_0}{(\omega - kv_x + i\gamma)} \frac{\partial f}{\partial p_x} e^{ikx}. \quad (13)$$

В этом случае эволюция электрического поля со временем дается интегралом

$$E_x(t, x) = -\frac{2e}{k} \Re \int d^2 p \delta f(0, x, p) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\Omega t}}{\varepsilon_{\parallel}(\Omega, k)(\Omega - kv_x)} d\Omega,$$

в котором наряду с полюсами  $\Omega = \omega_k$ , соответствующими собственным колебаниям плазмы ( $\varepsilon_{\parallel}(\omega_k, k) = 0$ ), имеется полюс  $\Omega = kv_x$ , отвечающий за свободный разлет частиц с тепловыми скоростями. Поскольку уравнение Власова сохраняет энтропию системы, и частицы плазмы несут на себе

информацию о своем начальном распределении сколь угодно долго, то электрическое поле в произвольный момент времени не только представляется бесконечным набором собственных затухающих колебаний плазмы, но и содержит поле, возникающее из-за деформации начального распределения частиц в процессе их теплового разлета

$$E_x(t, x) = \Re \frac{4\pi e i}{k} \int d^2 p \delta f(0, x, p) \times \\ \times \left[ \frac{e^{-ikv_x t}}{\varepsilon_{\parallel}(kv_x, k)} + \sum \frac{e^{-i\omega_k t}}{(\omega_k - kv_x) \partial \varepsilon_{\parallel} / \partial \omega |_{\omega_k}} \right]. \quad (14)$$

Влияние этого эффекта учитывается первым слагаемым. Вклад этого слагаемого в суммарное электрическое поле уменьшается лишь благодаря тому, что со временем подынтегральное выражение, содержащее  $\exp(ikv_x t)$ , становится быстро осциллирующей функцией скорости [24]. Интерференция этой части электрического поля с полем собственных колебаний плазмы и дает колебания в энергии волны.

Таким образом, с помощью формул (13), (14) можно не только предсказать экспоненциальный характер затухания волны, но и более детально проследить за изменением ее энергии со временем с учетом влияния начального распределения частиц. Для более детального сравнения рассмотрим следующие параметры:

$$\Delta p = 0,06; \quad k = 8,0554; \\ \omega = 1,3938; \quad \gamma = 0,1369.$$

Сложность постановки численного эксперимента для наблюдения затухания Ландау заключается в том, что, с одной стороны, амплитуду затухающей волны нужно брать достаточно большой, для того чтобы превысить характерный для метода частиц повышенный уровень флуктуаций, а с другой стороны, амплитуда этой волны не должна достигать значения, при котором начинается захват резонансных частиц в потенциальную яму, создаваемую этой волной (нелинейная стадия затухания Ландау). При выборе минимально возможных в нашем случае размеров области  $2\pi/k \times 5h$  эти условия можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \ll kE_0 < \gamma^2,$$

где  $N$  – полное число модельных частиц. Ограничение сверху при выбранном значении  $\gamma$  дает  $E_0 = 0,002$ , а ограничение снизу при этом определяет минимально возможное число частиц. Для того чтобы можно было наблюдать затухание волны в течение достаточно продолжительного промежутка времени, условие малости численных шумов должно выполняться с хорошим запасом и требует использования в расчетах около  $10^7$  частиц. Следует отметить, что такое большое количество частиц необходимо только в том случае, когда рассматриваются волны с очень малыми амплитудами, полное затухание которых успевает происходить уже в течение линейной стадии, для которой только и можно получить аналитическое решение. Затухание более

интенсивных колебаний хоть и является нелинейным, зато допускает гораздо более высокий уровень численных шумов.

На рис. 7, а представлены зависимости энергии волны от времени

$$W = \int_0^{2\pi/k} E^2(t, x) dx, \quad (15)$$

одна из которых вычислена с помощью формулы (14), а другая получена с помощью численной модели.

Были проведены расчеты с различным числом модельных частиц (табл. 2), из которых можно сделать вывод о сходимости численного решения для  $W$  к теоретическому результату (14) при увеличении числа частиц (рис. 7, б).

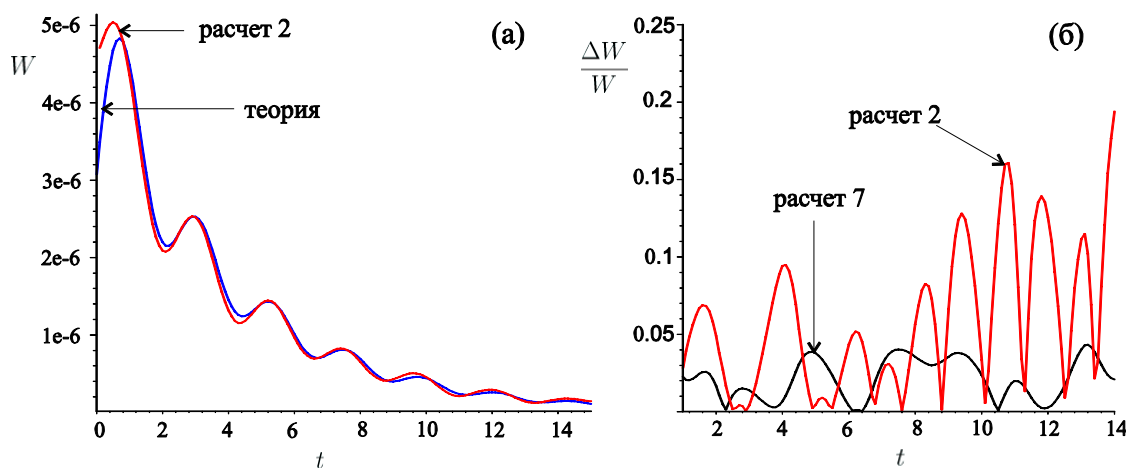


Рис. 7. Зависимость энергии волны  $W$  от времени: а – численный расчет, соответствующий варианту 2 табл. 2; б – аналитическое решение начальной задачи (14), (15). Относительное отклонение различных вариантов численных расчетов от аналитического решения на протяжении всей стадии затухания

Таблица 2  
Варианты расчетов с различным числом частиц \*

Вариант	$N, 10^6$	$N_c, 10^3$	$\langle \Delta W / W \rangle, \%$
1	3	7,69	15,07
2	6	15,39	5,92
3	12	30,77	10,92
4	24	61,54	5,96
5	48	123,08	3,03
6	96	246,15	3,36
7	192	492,31	2,13

\*  $N_c$  – число частиц в ячейке,  $\langle \Delta W / W \rangle$  – среднее по времени относительное отклонение численных расчетов от теории.

Различие в начальных значениях энергии на рис. 7, а связано с тем, что для получения правильного значения электрического поля в формуле (14) при  $t \rightarrow 0$  необходим учет вкладов, отвечающих, вообще говоря, бесконечному числу собственных мод плазмы. Благодаря тому что почти все эти моды являются быстрозатухающими, для описания долговременной эволюции плазмы достаточно ограничиться учетом лишь первой моды ( $\omega_1 = 1,3871$ ,  $\gamma_1 = 0,1278$ ), имеющей наименьший декремент затухания. Остальные моды затухают за время, сравнимое с периодом колебаний, и дают заметный вклад в суммарное электрическое поле лишь на малых временах.

### Заключение

В работе предложен новый параллельный PIC-код для моделирования процессов пучково-плазменного взаимодействия. Как показали численные эксперименты на суперкомпьютере Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН «МВС-100к», использование в численной модели алгоритма дихотомии позволяет значительно ускорить трудоемкую процедуру решения уравнения Пуассона, используемую в PIC методе, и создает условия для повышения скорости и точности PIC расчетов за счет возможности использования больших вычислительных ресурсов.

На основе проведенных тестов продемонстрирована работоспособность численной модели для изучения турбулентности, возбуждаемой мощным электронным пучком в плазме. Показано согласие результатов численных экспериментов с теорией как для одночастичного механизма возбуждения плазменных колебаний, так и для коллективной раскачки двухпоточковой неустойчивости.

Исследование одномерной модуляционной неустойчивости показало, что в интересующем нас режиме  $W > nT$  характерной особенностью этого эффекта является нарастание коротковолновых возмущений  $q \geq 1/r_E$ , благодаря которым энергия волны накачки напрямую попадает в область поглощения, минуя стадию коллапса. Поэтому для корректного сравнения численных расчетов с теорией в этом режиме, теория должна учитывать как диссипативные эффекты, так и влияние сильной электронной

нелинейности. Численные эксперименты показали, однако, что на ранней стадии, когда амплитуда коротковолновых возмущений мала по сравнению с амплитудой волны накачки и в опрокидывании участвует малая доля плазменных электронов, скорость нарастания и спектральный состав неустойчивых возмущений хорошо описывается упрощенным дисперсионным уравнением без учета электронных нелинейностей.

При достаточно большом числе частиц представленная модель с высокой детализацией воспроизводит эффект бесстолкновительного затухания бегущей волны вплоть до учета релятивистских поправок к законам дисперсии плазменных колебаний и особенностей начального распределения частиц по скоростям. Все это обеспечивает надежную основу для исследования механизмов установления квазистационарного турбулентного состояния в системе «плазма – пучок».

Для описания пучково-плазменного взаимодействия в условиях реального эксперимента имеющийся код будет модифицирован в сторону учета более реалистичных граничных условий, подразумевающих возможность непрерывной инжекции пучка в плазму.

### Список литературы

1. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. М.: Атомиздат, 1975. Т. 1.
2. Брейзман Б. Н. Коллективное взаимодействие релятивистских электронных пучков с плазмой // Вопросы теории плазмы / Под ред. Б. Б. Кадомцева. М.: Энргоатомиздат 1986. Вып. 15.
3. Timofeev I. V., Lotov K. V. Relaxation of a Relativistic Electron Beam in Plasma in the Trapping Regime // Phys. Plasmas. 2006. Vol. 13. P. 062312.
4. Gremillet L., Benisti D., Lefebvre L., Bret A. Linear and Nonlinear Development of Oblique Beam-Plasma Instabilities in the Relativistic Kinetic Regime // Phys. Plasmas. 2007. Vol. 14. P. 040704.
5. Umeda T. Generation of Low-Frequency Electrostatic and Electromagnetic Waves as Nonlinear Consequences of Beam-Plasma Interactions // Phys. Plasmas. 2008. Vol. 15. P. 064502.

6. Timofeev I. V., Lotov K. V., Terekhov A. V. Direct Computation of the Growth Rate for the Instability of a Warm Relativistic Electron Beam in a Cold Magnetized Plasma // *Phys. Plasmas*. 2009. Vol. 16. P. 063101.
7. Tabak M., Hammer J., Glinsky M. E. *et al.* Ignition and High Gain with Ultrapowerful Lasers // *Phys. Plasmas*. 1994. Vol. 1. P. 1626.
8. Malkin V. M., Fish N. J. Collective Deceleration of Relativistic Electrons Precisely in the Core of an Inertial-Fusion Target // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89. P. 125004.
9. Kraeva M. A., Malyshkin V. E. Assembly Technology for Parallel Realization of Numerical Models on MIMD-Multicomputers // *Int. Journal on Future Generation Computer Systems*. 2001. Vol. 17. No. 6. P. 755–765.
10. Malyshkin V. Assembling of Parallel Programs for Large Scale Numerical Modeling // *Handbook of Research on Scalable Computing Technologies*. IGI Global, USA, 2010. 1021 p.
11. Вишвков В. А., Вишвков К. В., Дудникова Г. И. Алгоритмы решения задачи взаимодействия лазерного импульса с плазмой // *Вычислительные технологии*. 2001. Т. 6, № 2. С. 47–63.
12. Terekhov A. V. Parallel Dichotomy Algorithm for Solving Tridiagonal System of Linear Equations with Multiple Right-Hand Sides // *Parallel Comput.* 2010. doi:10.1016/j.parco.2010.02.005.
13. Koidan V. S., Arzhannikov A. V., Astrelin V. T. *et al.* Progress on the Multimirror Trap GOL-3 // *Trans. Fusion Sci. and Techn.* 2005. Vol. 47. No. 35.
14. Burdakov A., Arzhannikov A., Astrelin V. *et al.* Plasma Heating and Confinement in GOL-3 Multi Mirror Trap // *Trans. Fusion Sci. and Techn.* 2007. Vol. 51. No. 106.
15. Аржанников А. В., Астрелин В. Т., Бурдаков А. В. и др. Исследование механизма быстрого нагрева ионов в многопучковой ловушке ГОЛ-3 // *Физика плазмы*. Т. 31, № 506.
16. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987.
17. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1989.
18. Вишвков В. А., Терехов А. В. О самодействии в методе частиц в ячейках // *Вычислительные методы и программирование*. 2008. Т. 9. С. 48–57.
19. Esirkepov T. Zh. Exact Charge Conservation for Particle-in-Cell Simulation with an Arbitrary Form-Factor // *Computer Physics Communications*. 2001. Vol. 135. No. 144.
20. Taflove A., Hagness S. C. *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*: 3<sup>rd</sup> ed. Norwood, MA: Artech House, 2005.
21. Boris J. P. Relativistic Plasma Simulation – Optimization of a Hybrid Code Coordinates // *Proceedings 4<sup>th</sup> International Conference on the Numerical Simulation of Plasmas*. Washington, 1970. Vol. 6. P. 3–67.
22. Захаров В. Е. Коллапс и самофокусировка ленгмюровских волн // *Основы физики плазмы*. М.: Энергоатомиздат, 1984. Т. 2.
23. Кузнецов Е. А. Об усредненном описании ленгмюровских волн в плазме // *Физика плазмы*. 1976. Т. 2. С. 327.
24. Лившиц Е. М., Питаевский Л. П. *Физическая кинетика*. 2-е изд. М.: Физматлит, 2002.

Материал поступил в редколлегию 01.02.2010

A. V. Terekhov, I. V. Timofeev, K. V. Lotov

#### TWO-DIMENSIONAL NUMERICAL MODEL FOR STUDIES OF COLLECTIVE BEAM-PLASMA INTERACTION

A two-dimensional particle-in-cell numerical model is developed to simulate collective relaxation of powerful electron beams in plasmas. To increase the efficiency of parallel particle-in-cell simulations on supercomputers, the Dichotomy Algorithm is used for inversion of the Laplace operator. The proposed model is tested with several well-known physical phenomena and is shown to adequately simulate basic effects of the beam driven turbulence. Also, the modulational instability is studied in the regime when the energy of pumping wave significantly exceeds the thermal plasma energy.

*Keywords:* PIC simulations, beam-plasma interaction, two-stream instability, modulational instability, Landau damping.