УДК 519.2; 681.3

А. Л. Резник [1, 2], В. М. Ефимов [1], А. А. Соловьев [1]

[1] Институт автоматики и электрометрии СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 1, Новосибирск, 630090, Россия

[2] Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: reznik@iae.nsk.su

ОЦЕНИВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ СЧИТЫВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ СРЕДСТВ КОМПЬЮТЕРНОЙ АНАЛИТИКИ *

Доказывается одно из аналитических соотношений, характеризующих надежность считывания случайных дискретных изображений, проводимого интеграторами с несколькими пороговыми уровнями.

Ключевые слова: случайное поле, многопороговый интегратор, программно-аналитические выкладки, надежность считывания.

Введение

Проблематика настоящей статьи связана с оцениванием достоверности считывания случайного двумерного поля, когда регистрация координат точечных объектов, составляющих это поле, ведется телевизионным методом с помощью интегратора, обладающего несколькими пороговыми уровнями. Под случайным двумерным полем подразумевается реализация на плоскости случайного дискретно-точечного распределения, созданного пуассоновским источником интенсивностью λ. Это означает, что вероятность события, заключающегося в том, что на любое наперед заданное подмножество Ω такого поля выпадет в точности n случайных пуассоновских отсчетов потока, зависит только от площади $s(\Omega)$ этого подмножества, но не зависит ни от каких других его геометрико-топологических характеристик и задается вероятностью

$$P_A(n) = \exp(-\lambda\, s(\Omega)) \frac{(\lambda\, s(\Omega))^n}{n!}.$$

Классический способ считывания координат таких импульсно-точечных объектов заключается в телевизионном считывании случайного поля в соответствии со схемой, представленной на рис. 1.

Считывающей апертурой $\varepsilon \times \varepsilon$ последовательно осуществляется сканирование всех горизонтальных полос изображения, имеющих ширину ε. Внутри каждой полосы апертура непрерывно перемещается, двигаясь по оси абсцисс слева направо. При попадании точечного объекта в пределы считывающей апертуры суммарный сигнал интегратора увеличивается на единицу и переходит на следующий пороговый уровень. В этот момент происходит фиксация координат очередного точечного объекта (естественно, с точностью ε по оси ординат). При выбывании какого-либо объекта из окна интегрирующей апертуры суммарный уровень сигнала интегратора соответственно уменьшается на единицу. При щелевом (одномерный случай) или телевизионном (двумерный случай) считывании дискретно-точечных изображений

* Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект «Эффективные по быстродействию методы анализа случайных дискретных полей и цифровых изображений»), Президиумом РАН (проект № 228/2009) и Президиумом СО РАН (интеграционный проект № 71/2009).

© А. Л. Резник, В. М. Ефимов, А. А. Соловьев, 2010

интеграторами, имеющими ограниченное число пороговых уровней, важнейшей характеристикой является вероятность безошибочного считывания изображения, т. е. вероятность того, что за весь период сканирования в окне интегрирующей апертуры ни разу не будет находиться более k объектов (здесь k – число пороговых уровней интегратора).

Точного аналитического решения этой задачи в общем случае получить не удается. Известны [1; 2] лишь частные формулы для простейших случаев (например, известно точное аналитическое решение для считывания интегратором, обладающим одним пороговым уровнем), а также ряд асимптотических соотношений [3]. Вообще говоря, двумерная задача нахождения вероятности P безошибочного считывания плоского точечного изображения, формируемого случайным пуассоновским потоком интенсивностью λ, достаточно просто редуцируется к одномерной, так что ее общее решение фактически эквивалентно нахождению вероятности $P_{n,k}(\varepsilon, L)$ безошибочного считывания случайного одномерного n-точечного изображения, сосредоточенного в интервале $(0, L)$, щелевым интегратором, имеющим k пороговых уровней и апертуру интегрирования ε:

$$P = \left[\exp(-\lambda\varepsilon L) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\varepsilon L)^n}{n!} P_{n,k}(\varepsilon, L) \right]^N .$$

Здесь выражение в квадратных скобках есть вероятность безошибочного считывания каждой из N горизонтальных полос. В свою очередь соотношение для вероятности безошибочного считывания одной отдельной полосы есть взвешенная сумма вероятностей наличия в полосе в точности n пуассоновских отсчетов – множитель

$$\exp(-\lambda\varepsilon L) \frac{(\lambda\varepsilon L)^n}{n!}, –$$

взятых с весами, равными $P_{n,k}(\varepsilon, L)$. Эти вероятности $P_{n,k}(\varepsilon, L)$ соответствуют безошибочному считыванию случайного одномерного n-точечного изображения, проводимому k-пороговым одномерным щелевым интегратором, имеющим ширину ε. С учетом несложной нормировки задача нахождения вероятности безошибочного k-порогового «телевизионного» считывания случайного двумерного пуассоновского дискретно-

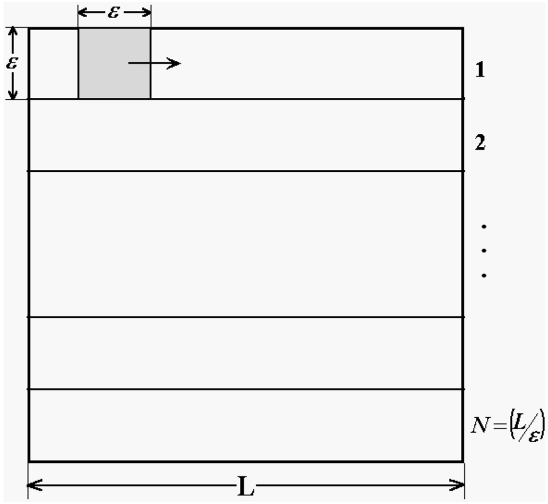

Рис. 1. Схема телевизионного считывания случайного «пуассоновского» поля размером $L \times L$

точечного изображения легко сводится к следующей одномерной задаче:

«Пусть n точек $x_1, x_2, ..., x_n$ случайно выбраны на интервале $(0, 1)$, т. е. имеется n независимых испытаний случайной величины, равномерно распределенной на интервале $(0, 1)$. Требуется найти вероятность $P_{n,k}(\varepsilon)$ события, заключающегося в том, что внутри интервала $(0, 1)$ не содержится ни одного подынтервала Ω_ε длины ε, содержащего более k точек».

Несмотря на кажущуюся простоту этой редуцированной задачи, ее общее решение к настоящему времени известно лишь для случая $k = 1$. Ниже будет приведено доказательство частной аналитической зависимости, характеризующей вероятность безошибочного считывания при наличии двух пороговых уровней ($k = 2$). Интересно отметить, что доказываемая в настоящей работе формула была «подсказана» компьютером, для чего авторам пришлось создать несколько программных систем [4–7], осуществляющих эквивалентные аналитические преобразования на ЭВМ.

Расчет вероятностных формул с помощью программ машинной аналитики

Вообще говоря, вероятность $P_{n,k}(\varepsilon)$, нахождение аналитического вида которой является главной целью исследований, можно представить в виде многомерного интеграла

$$P_{n,k}(\varepsilon) = n! \int \ldots \int_{D_{n,k}(\varepsilon)} dx_1 \ldots dx_n, \qquad (1)$$

где область интегрирования $D_{n,k}(\varepsilon) \subset R^n$ описывается системой линейных неравенств

$$\begin{cases} 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n < 1, \\ x_{k+1} - x_1 > \varepsilon, \\ x_{k+2} - x_2 > \varepsilon, \\ \quad \vdots \\ x_n - x_{n-k} > \varepsilon. \end{cases} \qquad (2)$$

В частности, для $k = 1$ вычисление многомерного интеграла (1) по области (2) сводится к нахождению повторного интеграла

$$P_{n,1}(\varepsilon) = n! \times$$

$$\times \int_{(n-1)\varepsilon}^{1} dx_n \left\{ \int_{(n-2)\varepsilon}^{x_n-\varepsilon} dx_{n-1} \cdots \left\{ \int_{2\varepsilon}^{x_4-\varepsilon} dx_3 \left\{ \int_{\varepsilon}^{x_3-\varepsilon} dx_2 \left\{ \int_{0}^{x_2-\varepsilon} dx_1 \right\}\right\}\right\}\right\} \qquad (3)$$

Последовательно интегрируя (3) по переменным $x_1, x_2, \quad , x_n$, получим известную [1; 2] формулу:

$$P_{n,1}(\varepsilon) = (1-(n-1)\varepsilon)^n, \quad 0 \le \varepsilon \le 1/(n-1)). \qquad (4)$$

К сожалению, для $k > 1$ интеграл (1) по области интегрирования (2) невозможно представить в виде единственного повторного интеграла, в результате чего решение задачи усложняется настолько, что к настоящему времени ее точное аналитическое решение неизвестно даже для $k = 2$. Поэтому для нахождения частных решений при фиксированных и последовательно возрастающих значениях n нами предложен [4; 5] алгоритм эквивалентных преобразований, сводящий интеграл (1) к конечной сумме повторных интегралов с расставленными пределами интегрирования и указанием для каждого из них диапазона изменения параметра ε, внутри которого справедлива каждая из рассчитываемых формул. Для задачи с двухпороговым считыванием ($k = 2$) нами дополнительно разработана [6] специальная комбинаторно-рекурсивная модель, когда непрерывное считывание заменяется дискретной схемой бросания n неразличимых шаров по r урнам, а непрерывные формулы от параметра ε получаются предельным переходом при $r \to \infty$. Поскольку огромный объем аналитических выкладок, необходимых для нахождения частных решений, делает практически невозможным их проведение вручную, обе предложенные нами вычислительные схемы были абсолютно формализованы и запрограммированы. Применение созданных программ машинной аналитики позволило нам значительно продвинуться в вычислении вероятностей $P_{n,k}(\varepsilon)$ и установить новые ранее неизвестные зависимости. В частности, для формул $P_{n,2}(\varepsilon)$, описывающих вероятность безошибочного считывания при двух пороговых уровнях ($k = 2$), для четных значений n в результате программного расчета установлены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &P_{4,2}(\varepsilon) = 2(1-\varepsilon)^4, \\ &\quad (1/2) < \varepsilon < 1); \\ &P_{6,2}(\varepsilon) = 5(1-2\varepsilon)^6, \\ &\quad (1/3) < \varepsilon < (1/2); \\ &P_{8,2}(\varepsilon) = 14(1-3\varepsilon)^8, \\ &\quad (1/4) < \varepsilon < (1/3); \\ &P_{10,2}(\varepsilon) = 42(1-4\varepsilon)^{10}, \\ &\quad (1/5) < \varepsilon < (1/4); \\ &P_{12,2}(\varepsilon) = 132(1-5\varepsilon)^{12}, \\ &\quad (1/6) < \varepsilon < (1/5). \end{aligned} \qquad (5)$$

Анализ «компьютерных» зависимостей (5) позволил усмотреть общую закономерность и высказать гипотезу, заключающуюся в том, что при двух пороговых уровнях (т. е. при $k = 2$) для четных n на интервале $1/(n/2) < \varepsilon < 1/((n/2) - 1)$ справедлива формула

$$P_{n,2}(\varepsilon) = (2/n)C_n^{(n/2)-1} \times$$
$$\times (1-((n/2)-1)\varepsilon)^n. \qquad (6)$$

Отметим, что впервые это соотношение было опубликовано нами в работе [6], но его строгого доказательства до настоящего времени не существовало. Цель данной работы как раз и заключается в строгом обосновании представленной формулы.

Доказательство «компьютерной» формулы

Итак, формулировка задачи, строгое решение которой будет приведено ниже, такова:

«Имеется интервал (0, 1), на который случайно брошены $n = 2m$ точек. Требуется найти вероятность P события, заключающе-

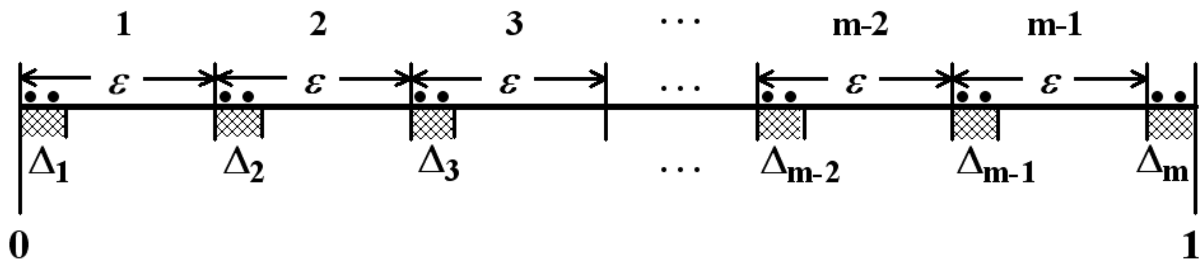

Рис. 2. Схема размещения $n = 2m$ случайных точек на интервале (0, 1) для безошибочного двухпорогового считывания

гося в том, что внутри интервала (0, 1) не существует ни одного подынтервала Ω_ε длины ε ($\frac{1}{m} < \varepsilon < \frac{1}{m-1}$), содержащего более 2 точек».

Нетрудно убедиться, что при сформулированных условиях любое допустимое размещение случайных точек должно подчиняться схеме, изображенной на рис. 2.

В частности, все подынтервалы Δ_i, имеющие фиксированную длину

$$\Delta = 1 - (m-1)\varepsilon,$$

должны содержать по 2 точки, а в «зазоры» между этими подынтервалами не имеет право попасть ни одна случайная точка, так как это с неизбежностью приведет к невозможности такого размещения $2m$ точек на интервале (0, 1), чтобы как все четные, так и все нечетные точки были удалены друг от друга на расстояние, большее, чем ε. (Отметим, что длина $\Delta = 1 - (m-1)\varepsilon$ каждого из заштрихованных подынтервалов находится в диапазоне $0 < \Delta < \varepsilon$, что обеспечивается ограничением $\frac{1}{m} < \varepsilon < \frac{1}{m-1}$, содержащимся в формулировке задачи). Нахождение вероятности P_0, соответствующей размещению случайных точек, изображенному на рис. 2, разобьем на два этапа. На первом этапе определим вероятность P_1 того, что все $n = 2m$ точек при их случайном бросании на интервал (0, 1) попадут в заштрихованную зону, объединяющую все подынтервалы Δ_i ($i = \overline{1, m}$), но при этом не будем требовать, чтобы в каждый из подынтервалов Δ_i попало в точности по 2 точки, как это изображено на рис. 2, а затем умножим ее на условную вероятность P_2 попадания в каждую из m заштрихованных зон (урн) в точности 2 точек (шаров) при условии, что в m зон (урн) бросалось $2m$ точек (шаров). Очевидно, что вероятность попадания всех точек в заштрихованную зону есть

$$P_1 = (m\Delta)^{2m} = (m(1-(m-1)\varepsilon)^{2m}.$$

Поскольку вероятность P_2 того, что при случайном бросании $2m$ неразличимых шаров по m урнам в каждой из урн окажется по 2 шара, есть $P_2 = \frac{(2m)!}{m^{2m}2^m}$ (этот результат легко получить, если воспользоваться равенством

$$P_2 = Q_m(2m) \times Q_{m-1}(2m-2) \times$$
$$\times Q_{m-2}(2m-4) \times \cdots \times Q_1(2),$$

где $Q_t(2t) = C_{2t}^2 \times \left(\frac{1}{t}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{2t-2}$ – вероятность попадания в точности 2 шаров в фиксированную урну при бросании $2t$ шаров по t урнам), то, умножая ее на вероятность $P_1 = (m(1-(m-1)\varepsilon)^{2m}$, получим соотношение для P_0:

$$P_0 = P_1 \times P_2 = \frac{(2m)!}{2^m}(1-(m-1)\varepsilon)^{2m}. \qquad (7)$$

Теперь следует заметить, что учитываемые формулой (7) условия размещения случайных точек по m подобластям Δ_i являются необходимыми, но не достаточными для выполнения системы неравенств (2). Для вычисления искомой вероятности P необходимо дополнительно учесть, что в рассматриваемом случае двухпорогового считывания ($k = 2$) все ближайшие члены с четными номерами и все ближайшие члены с нечетными номерами в ранжированной последовательности $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$ должны быть удалены друг от друга на расстояние, большее, чем ε (следствие группы неравенств $x_{k+i} - x_i > \varepsilon$ в системе (2)). Если представить координаты пары случайных точек, попавших в подынтервал Δ_i, в виде

$$\begin{cases} x_{2i-1} = (i-1)\varepsilon + \delta_{2i-1}; \\ x_{2i} = (i-1)\varepsilon + \delta_{2i}, \end{cases}$$

то для выполнения ограничений, накладываемых системой неравенств (2), необходимо и достаточно, чтобы соблюдались неравенства

$$\begin{cases} \delta_{2i-1} < \delta_{2j-1}, & \forall (i<j); \\ \delta_{2i} < \delta_{2j}, & \forall (i<j); \\ \delta_{2i-1} < \delta_{2i}, & \forall i. \end{cases}$$

Если принять во внимание, что все случайные величины δ_s ($s = \overline{1, 2m}$) независимы и равномерно распределены на интервале (0, Δ), то для расчета искомой вероятности P нам необходимо представленную соотношением (7) вероятность P_0 умножить на отношение $\frac{N_m}{A_m}$, где A_m есть общее число таких перестановок из $2m$ индексных переменных δ_s ($s = \overline{1,2m}$), для которых любой нечетный элемент δ_{2i-1} всегда встречается раньше соответствующего ему четного элемента δ_{2i}; N_m – общее количество перестановок, входящих в число A_m, для которых элементы с нечетными индексами встречаются в порядке возрастания нечетных индексов, а элементы с четными номерами встречаются в порядке возрастания четных индексов. Очевидно, что $A_m = (2m)!/2^m$ (из всех возможных перестановок, число которых равно $(2m)!$, нужно выбрать лишь те, в которых элементы каждой из m пар $(\delta_1, \delta_2), (\delta_3, \delta_4), \cdots, (\delta_{2m-1}, \delta_{2m})$ «упорядочены» между собой по возрастанию индексов), так что для отыскиваемой нами вероятности P с учетом (7) имеем соотношение

$$P = P_0 \times \frac{N_m}{A_m} = \frac{(2m)!}{2^m}(1-(m-1)\varepsilon)^{2m} \times$$
$$\times \frac{N_m}{(2m)!/2^m} = N_m \times (1-(m-1)\varepsilon)^{2m}. \quad (8)$$

В отличие от A_m найти соотношение для N_m значительно сложнее. Эта задача эквивалентна отысканию количества различных «правильных» LR-слов (Left-Right-слов), имеющих длину $2m$ (LR-словом длиной $2m$ будем называть любое слово, составленное из m символов «L» и m симолов «R», а «правильным» LR-словом будем называть те из них, которые обладают тем свойством, что в любом префиксе этого слова (т. е. в любом его начальном сегменте) количество символов «R» не превышает количества символов «L»). Обозначая последовательно встречающиеся (при просмотре LR-слова слева направо) символы «L» любого LR-слова нечетными индексными переменными $\delta_1, \delta_3, \ldots, \delta_{2m-1}$, а последовательно встречающиеся символы «R» – четными индексными переменными $\delta_2, \delta_4, \ldots, \delta_{2m}$, мы легко устанавливаем полную идентичность этих двух задач (поскольку любому совместному размещению m «четных» и m «нечетных» индексных переменных тоже соответствует одно и только одно $2m$-символьное LR-слово).

Докажем, что искомое количество N_m «правильных» LR-слов равно $\frac{1}{m}C_{2m}^{m-1}$ (именно здесь мы используем программную «подсказку» (6)). Доказательство будем вести по индукции. Для этого предположим, что формула

$$N_m = \frac{1}{m}C_{2m}^{m-1} = \frac{1}{m+1}C_{2m}^{m} \quad (9)$$

верна для значений $m \le M$, а далее докажем ее для $m = M+1$ (справедливость формулы для $m = 1$ очевидна). Схема доказательства будет такова: сначала мы подсчитаем N_{M+1}^* – количество «неправильных» LR-слов, т. е. тех слов, у которых имеется хотя бы один префикс, в котором количество символов «R» превышает количество символов «L», а затем легко найдем N_{M+1}, используя простое соображение, что совокупное количество различных «правильных» и «неправильных» LR-слов, имеющих длину $2(M+1)$, равно C_{2M+2}^{M+1}. Все «неправильные» слова разобьем на непересекающиеся классы, каждый из которых будет характеризоваться максимальной длиной правильного префикса. Сразу заметим, что для любого LR-слова максимальная длина правильного префикса – всегда величина четная. Каждое «неправильное» LR-слово, у которого максимальная длина правильного префикса составляет $2l$, характеризуется тем, что сам максимальный префикс является «правильным» LR-словом длиной $2l$, затем обязательно следует символ «R» (делающий это слово «неправильным»), а далее следуют оставшиеся символы в произвольном порядке. Исходя из предположения индукции, количество «правильных» префиксов, имеющих длину $2l$, равно $\frac{1}{l+1}C_{2l}^{l}$. Так как мы рассматриваем слова, состоящие из $(M+1)$ символов «L» и $(M+1)$ символов «R», «оставшиеся символы», о которых говорилось выше, есть не что иное, как $(M-l+1)$ символов «L» и $(M-l)$ символов «R», так что «оставшиеся символы» способны образовать $C_{2M-2l+1}^{M-l}$ различных последовательностей. Суммируя по всем возможным значениям l, получаем формулу для количества «неправильных» LR-слов, имеющих длину $2(M+1)$:

$$N_{M+1}^{*}=\sum_{l=0}^{M}\left\{\frac{1}{l+1}\times C_{2l}^{l}\times C_{2M-2l+1}^{M-l}\right\}. \qquad (10)$$

Используя очевидное равенство

$$C_{2M-2l+1}^{M-l}=\frac{1}{2}C_{2(M+1)-2l}^{(M+1)-l}$$

и вводя под знак суммы в (10) дополнительный член, соответствующий индексу $l = M + 1$, после несложных преобразований получим

$$N_{M+1}^{*}=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{l=0}^{M+1}\left\{\frac{1}{l+1}\times C_{2l}^{l}\times C_{2(M+1)-2l}^{(M+1)-l}\right\}-\frac{1}{M+2}C_{2M+2}^{M+1}\right]. \qquad (11)$$

Замечая, что в разности, стоящей в квадратных скобках выражения (11), уменьшаемое (т. е. сумма по индексу l) есть $\frac{1}{2}C_{2M+4}^{M+2}$ [8. С. 623, формула 14], после очевидных упрощений получим формулу для общего количества «неправильных» LR-слов, имеющих длину $2(M + 1)$:

$$N_{M+1}^{*}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}C_{2M+4}^{M+2}-\frac{1}{M+2}C_{2M+2}^{M+1}\right]=C_{2M+2}^{M}.$$

Соответственно число «правильных» LR-слов, имеющих длину $2(M + 1)$, есть

$$N_{M+1}=C_{2M+2}^{M+1}-N_{M+1}^{*}=$$
$$=C_{2M+2}^{M+1}-C_{2M+2}^{M}=\frac{1}{M+2}C_{2M+2}^{M+1}.$$

Тем самым предположение индукции доказано для $m = M + 1$, что и завершает доказательство справедливости формулы (9). Подставляя теперь равенство (9) в (8) и заменяя $2m$ на n, окончательно получаем требуемую формулу для вероятности P события, заключающегося в том, что внутри интервала (0, 1) не существует ни одного подынтервала Ω_ε длиной ε ($\frac{1}{m}<\varepsilon<\frac{1}{m-1}$), содержащего более 2 точек:

$$P=N_m(1-(m-1)\varepsilon)^{2m}=$$
$$=\frac{1}{m+1}C_{2m}^{m}(1-(m-1)\varepsilon)^{2m}=$$
$$=\frac{1}{m}C_{2m}^{m-1}(1-(m-1)\varepsilon)^{2m}=$$
$$=(2/n)C_{n}^{(n/2)-1}(1-((n/2)-1)\varepsilon)^{n}.$$

Заключение

Проведенные нами исследования показали, что оценивание надежности считывания случайных дискретных изображений, проводимого интеграторами, обладающими несколькими пороговыми уровнями, является весьма сложной задачей. В отличие от вероятности безошибочного однопорогового считывания, которая представляется простой и компактной формулой (4), получение даже частных решений для считывания, проводимого с несколькими пороговыми уровнями, представляет собой сложно формализуемый и весьма трудоемкий в вычислительном плане процесс. Вообще говоря, в настоящей работе нам удалось провести идею, высказанную в свое время Дж. фон Нейманом: исследователь сталкивается с задачей, которую не в состоянии решить, привлекает ЭВМ для проведения трудоемких расчетов, которые способны натолкнуть его на «правильный» ответ, и в случае удачи (т. е. зная подсказанное компьютером решение) проводит строгое и конструктивное доказательство. В нашем случае формула (6) была «подсказана» компьютером, а ее строгое доказательство мы представляем впервые. Интересно также отметить, что коэффициенты, входящие в полученную нами формулу (6), являются числами Каталана, которые впервые встречаются в работах Л. Эйлера и возникают при решении огромного числа вероятностно-комбинаторных и прикладных задач.

Список литературы

1. *Уилкс С.* Математическая статистика. М.: Мир, 1967. 632 с.
2. *Parzen E.* Modern Probabillity Theory and Its Applications. N. Y.; L.: John Wiley and Sons, Inc., 1960.
3. *Ефимов В. М., Искольдский А. М., Лившиц З. А., Крендель Ю. М.* О характеристиках различных методов считывания изображений дискретных структур // Автометрия. 1973. № 1. С. 3–7.
4. *Ефимов В. М., Резник А. Л.* Аналитическое вычисление на ЭВМ объемов, ограниченных системой гиперплоскостей в *n*-мерном пространстве // Автометрия. 1976. № 1. С. 116–119.
5. *Ефимов В. М., Резник А. Л.* Аналитическое определение с помощью ЭВМ статистических характеристик процесса щелевого сканирования потока Бернулли // Автометрия. 1977. № 4. С. 49–51.
6. *Резник А. Л.* Моделирование на ЭВМ непрерывного считывания изображений дискретной структуры // Автометрия. 1981. № 6. С. 3–6.
7. *Reznik A. L., Efimov V. M.* Analytical Computer Calculations in Image Analysis: Correct Reading of Random Discrete-Point Fields // Proc. of the IASTED International Conference on Signal Processing, Pattern Recognition, and Applications. Rhodes, Greece, 2003. P. 6–10.
8. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.

Материал поступил в редколлегию 06.04.2009

A. L. Reznik, V. M. Efimov, A. A. Solovjev

RELIABILITY ESTIMATION OF RANDOM DISCRETE IMAGES READING WITH APPLICATION OF COMPUTER ANALYTICAL CALCULATION

One of the analytical relations describing reliability of random discrete images reading, realized by integrators with several threshold levels is proved.

Keywords: random field, multithreshold integrator, program-analytical calculations, reliability of reading.