

УДК 531.1

З. К. Силагадзе^{1,2}, О. И. Чащина²

¹ Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 11, Новосибирск, 630090, Россия

² Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: silagadze@inp.nsk.su; chashchina.olga@gmail.com

ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ЗАЙЦА ВОЛКОМ КАК УПРАЖНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ КИНЕМАТИКИ

Представлено простое решение классической задачи преследования волка за зайцем. Данное решение показывает удобство использования методов элементарной кинематики, в том числе во вводном курсе механики.

Ключевые слова: преподавание физики.

Введение

Заяц бежит по прямой линии со скоростью u . Волк начинает преследовать зайца со скоростью $V > u$ и в течение погони всегда движется по направлению к зайцу. Сперва заяц расположен в начале координат, тогда как волк находится в точке $x(0) = 0$, $y(0) = L$ (рис. 1). Через какое время волк достигнет зайца?

Эта классическая задача и ее вариации часто используются во вводном курсе механики [1–3]. Если попытаться найти траекторию волка, то задача потребует сложных расчетов и решения дифференциальных уравнений [4; 5]. Тем не менее ее решение значительно упростится, если применить некоторые методы физической кинематики [6].

Можно и дальше упростить решение, если будем использовать такие физические методы, как различные системы отсчета, векторные уравнения, разложение скорости на радиальную и тангенциальную компоненты.

Продолжительность погони

Введем \vec{r}_1 – радиус-вектор положения волка, и \vec{r}_2 – радиус-вектор положения зайца. Тогда

$$\dot{\vec{r}}_1 = \vec{V}, \quad \dot{\vec{r}}_2 = \vec{u}. \quad (1)$$

Так как волк всегда бежит к зайцу, то мы можем записать

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = k(t)\vec{V}. \quad (2)$$

Коэффициент пропорциональности k зависит от времени, причем в начале и в конце погони выполнены равенства

$$k(0) = \frac{L}{V}, \quad k(T) = 0.$$

Дифференцируя выражение (2) и используя известные соотношения (1), получаем

$$\vec{u} - \vec{V} = \dot{k}(t)\vec{V} + k(t)\dot{\vec{V}}. \quad (3)$$

Скорость волка не меняется по модулю в течение погони, значит, его ускорение всегда перпендикулярно скорости, т. е.

$$\vec{V} \cdot \dot{\vec{V}} = 0. \quad (4)$$

Можно получить это формально:

$$0 = \frac{dV^2}{dt} = \frac{d\vec{V}^2}{dt} = 2\vec{V} \cdot \dot{\vec{V}}.$$

Из уравнений (3) и (4) следует:

$$\vec{V} \cdot (\vec{u} - \vec{V}) = \dot{k}(t)V^2,$$

или

$$uV_x - V^2 = \dot{k}(t)V^2.$$

Проинтегрировав последнее уравнение, получаем

$$ux - V^2t = k(t)V^2 - LV. \quad (5)$$

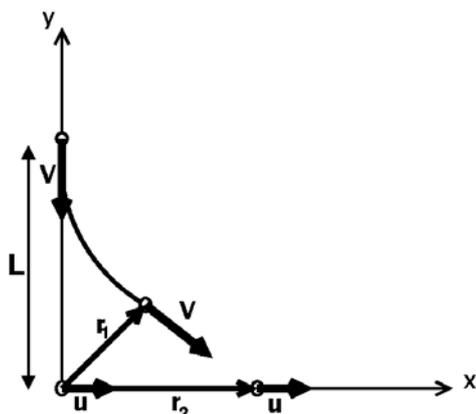


Рис. 1. Погоня волка за зайцем.
Волк всегда «смотрит» на зайца

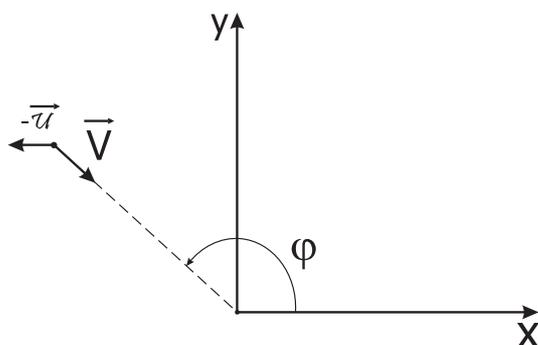


Рис. 2. Скорость волка в системе отсчета,
связанной с зайцем

В момент времени $t = T$, когда волк догонит зайца, выполнено $x = uT$, а также $k(T) = 0$. Теперь мы можем легко найти длительность погони из уравнения (5):

$$T = \frac{LV}{V^2 - u^2}. \quad (6)$$

Траектория движения волка в системе отсчета, связанной с зайцем

В системе отсчета, связанной с зайцем, разложим скорость волка на радиальную и тангенциальную компоненты (рис. 2).

$$V_r = -V + u \cos(\pi - \varphi) = -V - u \cos \varphi,$$

$$V_\varphi = u \sin(\pi - \varphi) = u \sin \varphi.$$

Так как $V_r = \dot{r}$ и $V_\varphi = r\dot{\varphi}$, получаем

$$\dot{r} = -V - u \cos \varphi, \quad r\dot{\varphi} = u \sin \varphi. \quad (7)$$

Если поделить первое уравнение из соотношений (7) на второе, приняв во внимание, что $\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{dr}{d\varphi}$, получим:

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{V + u \cos \varphi}{u \sin \varphi}.$$

Из этого следует:

$$\ln \frac{r}{L} = -\int_{\pi/2}^{\varphi} \frac{V + u \cos \varphi}{u \sin \varphi} d\varphi. \quad (8)$$

Используя замену $z = \cos \varphi$ и разложение дроби

$$\frac{\frac{V}{u} + z}{1 - z^2} = \frac{A}{1 - z} + \frac{B}{1 + z},$$

$$A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{V}{u}\right), \quad B = \frac{1}{2} \left(\frac{V}{u} - 1\right),$$

можно легко посчитать интеграл (8):

$$-\int_{\pi/2}^{\varphi} \frac{V + u \cos \varphi}{u \sin \varphi} d\varphi = \ln \frac{(1 + \cos \varphi)^B}{(1 - \cos \varphi)^A} =$$

$$= \ln \left[\left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{V}{u}} \frac{1}{\sin \varphi} \right]$$

Таким образом, уравнение траектории движения волка в системе отсчета, связанной с зайцем, имеет вид

$$r = \frac{L}{\sin \varphi} \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{V}{u}}. \quad (9)$$

Траектория движения волка в лабораторной системе отсчета

Теперь найдем траекторию движения волка в лабораторной системе отсчета. Из уравнений (7) и (9) получим уравнение

$$\frac{L\dot{\varphi}}{\sin \varphi} \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{V}{u}} = u \sin \varphi,$$

которое с использованием

$$\frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}} \right] d \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right)$$

может быть записано в виде

$$\left[1 + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}} \right] \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{V}{u}} d \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right) = -\frac{2u}{L} dt.$$

Таким образом,

$$\frac{t}{T} = 1 - \frac{1}{2v} \times \left[(v-1) \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right)^{v+1} + (v+1) \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right)^{v-1} \right]. \quad (10)$$

где $v = \frac{V}{u}$, а время погони T было определено ранее в формуле (6). С использованием выражения (9)

$$y = r \sin \varphi = L \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right)^v$$

перепишем результат (10) так, как он представлен в [6]:

$$\frac{t}{T} = 1 - \frac{1}{2} \times \left[(1 - \tilde{v}) \left(\frac{y}{L} \right)^{\tilde{v}+1} + (1 + \tilde{v}) \left(\frac{y}{L} \right)^{1-\tilde{v}} \right], \quad (11)$$

где $\tilde{v} = \frac{1}{v} = \frac{u}{V}$.

Из уравнения (5) имеем

$$\frac{x}{L} = \frac{v^3}{v^2 - 1} \left(\frac{t}{T} + \frac{k(t)}{T} \right) - v. \quad (12)$$

И, чтобы получить уравнение траектории собаки, мы должны выразить $k(t)$ через y . Рассматривая y -компоненту векторного уравнения (2), получим

$$-y = k(t) \dot{y},$$

и, таким образом:

$$k(t) = -\frac{y}{\dot{y}}.$$

Остается только продифференцировать уравнение (11) и отсюда получить выражение для $k(t)$:

$$\frac{k(t)}{T} = -\frac{1}{2} (\tilde{v}^2 - 1) \left[\left(\frac{y}{L} \right)^{1+\tilde{v}} + \left(\frac{y}{L} \right)^{1-\tilde{v}} \right], \quad (13)$$

Подставляя (11) и (13) в (12), наконец получим траекторию движения волка в виде

$$\frac{x}{L} = \frac{\tilde{v}}{1 - \tilde{v}^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 + \tilde{v}} \left(\frac{y}{L} \right)^{1+\tilde{v}} - \frac{1}{1 - \tilde{v}} \left(\frac{y}{L} \right)^{1-\tilde{v}} \right].$$

Конечно, этот результат совпадает с представленным ранее в литературе [4–6] с точностью до введенных обозначений.

Предельное расстояние между зайцем и волком в случае одинаковых скоростей

Допустим, что скорость волка и скорость зайца имеют одинаковое значение. Исходное положение животных показано на рис. 3. Каким же будет предельное расстояние между ними?

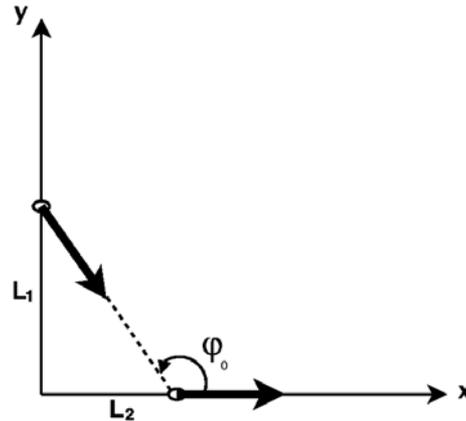


Рис. 3. Исходное положение волка и зайца в случае равных скоростей

Проще ответить на этот вопрос, проводя рассуждения в системе отсчета, связанной с зайцем. В случае равных скоростей $V = u$, и уравнения (7) принимают вид

$$\dot{r} = -u(1 + \cos \varphi), \quad r\dot{\varphi} = u \sin \varphi.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} (r - r \cos \varphi) = \dot{r}(1 - \cos \varphi) + r\dot{\varphi} \sin \varphi = 0.$$

Таким образом, $r(1 - \cos \varphi) = C$, где C – константа. В момент времени $t = 0$ расстояние между зайцем и волком

$$r_0 = \sqrt{L_1^2 + L_2^2}, \quad \cos \varphi_0 = -\frac{L_2}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}.$$

Используя начальные условия, найдем неизвестную константу C :

$$C = L_2 + \sqrt{L_1^2 + L_2^2}.$$

В системе отсчета зайца $\varphi \rightarrow \pi$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда легко получить, что предельное расстояние между волком и зайцем

$$r_\infty = \frac{C}{1 - \cos \pi} = \frac{L_2 + \sqrt{L_1^2 + L_2^2}}{2}.$$

Движение вдоль трактрисы

Допустим, заяц может изменять скорость своего движения. Тогда возможно, что расстояние между волком и зайцем будет постоянно. Найдем функциональную зависимость $u(t)$ и траекторию волка для этого случая. Если $r = L = \text{const}$, тогда $\dot{r} = 0$, и уравнения (7) принимают вид

$$V = -u \cos \varphi, \quad L\dot{\varphi} = u \sin \varphi. \quad (14)$$

Таким образом, $\frac{L}{V}\dot{\varphi} = -\text{tg} \varphi$, из чего интегрированием легко получить зависимость

$$\ln \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} \right) = -\frac{V}{L}t$$

или

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0 \cdot e^{-\frac{V}{L}t}.$$

Тогда с помощью первого из уравнений (14) легко определить искомую временную зависимость скорости зайца:

$$u(t) = \frac{V}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_0 \cdot e^{-\frac{2V}{L}t}}}$$

(отметим, что $\varphi \geq \varphi_0 > \pi/2$, как показано на рис. 3, поэтому $\cos \varphi = -\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$).

Теперь найдем траекторию волка. Из рис. 3 легко понять, что

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t u(\tau) d\tau - L \cos(\pi - \varphi) = \\ &= \int_0^t u(\tau) d\tau + L \cos \varphi, \\ y &= L \sin(\pi - \varphi) = L \sin \varphi. \end{aligned}$$

На основании второго из уравнений (7)

$$u(t)dt = \frac{L}{\sin \varphi} d\varphi, \quad \text{тогда}$$

$$\int_0^t u(\tau) d\tau = L \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = -L \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d \cos \varphi}{1 - \cos^2 \varphi}. \quad (15)$$

Используя разложение

$$\frac{1}{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 + \cos \varphi} + \frac{1}{1 - \cos \varphi} \right],$$

можно легко посчитать интеграл (15)

$$\int_0^t u(\tau) d\tau = L \left[\ln \left(\text{ctg} \frac{\varphi_0}{2} \right) - \ln \left(\text{ctg} \frac{\varphi}{2} \right) \right].$$

Тогда траектория движения волка в параметрическом виде выражается так:

$$\frac{x}{L} = \cos \varphi + \ln \left(\text{ctg} \frac{\varphi_0}{2} \right) - \ln \left(\text{ctg} \frac{\varphi}{2} \right), \quad \frac{y}{L} = \sin \varphi.$$

Чтобы найти явное выражение для траектории волка, воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= -\sqrt{1 - \frac{y^2}{L^2}}, \\ \text{ctg} \frac{\varphi}{2} &= \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{L - \sqrt{L^2 - y^2}}{y}. \end{aligned}$$

Тогда легко получить

$$\begin{aligned} x &= L \ln \left(\text{ctg} \frac{\varphi_0}{2} \right) - \\ &- L \ln \frac{L - \sqrt{L^2 - y^2}}{y} - \sqrt{L^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Данная траектория является частью трактрисы – знаменитой кривой [7; 8] с определяющим свойством, что для нее длина отрезка касательной от точки касания до точки пересечения с фиксированной прямой (в нашем случае с осью абсцисс) является постоянной величиной.

Заключение

Мы считаем, что данная задача имеет педагогическую ценность для студентов, обучающихся на первом курсе физического факультета. Она показывает, насколько полезными могут быть основные приемы физической кинематики. Подход, представленный в этой статье, использует только минимальные математические знания, хотя данная классическая задача преследования может быть использована и для демонстрации менее простых математических методов, таких как формулы Френе – Серре [9], меркаторская проекция в картографии [10] и даже гиперболическая геометрия (реализованная на поверхности трактрисы, вращающейся вокруг ее директрисы) [11]. Некоторые другие вариации данной задачи рассмотрены в работах [12–17].

Список литературы

1. Иродов И. Е. Задачи по общей физике. М.: НТИЦ Владис, 1977.
2. Бельченко Ю. И., Гилев Е. А., Силагадзе З. К. Механика частиц и тел в задачах. Новосибирск, 2006.
3. Silagadze Z. K. Test Problems in Mechanics and Special Relativity // Preprint arXiv:physics/0605057.

4. Ольховский И. И., Павленко Ю. Г., Кузьменков Л. С. Задачи по теоретической механике для физиков. М., 1977.
5. Pták P., Tkadlec J. The Dog-and-Rabbit Chase Revisited // Acta Polytechnica. 1996. Vol. 36/ P 5–10.
6. Mungan C. A. A Classic Chase Problem Solved from a Physics Perspective // Eur. J. Phys. 2005. Vol. 26. P. 985–990.
7. Yates R. C. The Catenary and the Tractrix // Am. Math. Mon. 1959. Vol. 66. P. 500–505.
8. Cady W. G. The Circular Tractrix // Am. Math. Mon. 1965. Vol. 72. P. 1065–1071.
9. Puckette C. C. The Curve of Pursuit // Math. Gazette. 1953. Vol. 37. P. 256–260.
10. Pijls W. Some Properties Related to Mercator Projection // Am. Math. Mon. 2001. Vol. 108. P. 537–543.
11. Bertotti B., Catenacci R., Dappiaggi C. Pseudospheres in Geometry and Physics: From Beltrami to de Sitter and Beyond // Preprint arXiv:math/0506395.
12. Lotka A. J. Contribution to the Mathematical Theory of Capture. I: Conditions for Capture // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1932. Vol. 18. P. 172–178.
13. Lalan V. Contribution à l'étude de la courbe de poursuite // Comptes Rendus. 1931. Vol. 192. P. 466–469.
14. Lotka A. J. Families of Curves of Pursuit, and Their Isochrones // Am. Math. Mon. 1928. Vol. 35. P. 421–424.
15. Quing-Xin Y., Yin-Xiao D. Note on the Dog-and-Rabbit Chase Problem in Introductory Kinematics // Eur. J. Phys. 2008. Vol. 29. P. N43–N45.
16. Wunderlich W. Über die Hundekurven mit konstanten Schielwinkel // Monatshefte für Mathematik. 1957. Vol. 61. P. 277–311.
17. Лутлууд Дж. Математическая смесь. М.: Наука, 1990.

Материал поступил в редколлегию 21.11.2009

Z. K. Silagadze, O. I. Chaschina

THE DOG-AND-RABBIT CHASE PROBLEM AS AN EXERCISE IN INTRODUCTORY KINEMATICS

The purpose of this article is to present a simple solution of the classic dog-and-rabbit chase problem which emphasizes the use of concepts of elementary kinematics and, therefore, can be used in introductory mechanics course. The article is based on the teaching experience of introductory mechanics course at Novosibirsk State University for first year physics students which are just beginning to use advanced mathematical methods in physics problems.

Keywords: chase problem, physics education.