УДК 533.951.3

Ю. А. Цидулко [1], И. С. Черноштанов [2]

[1] Институт ядерной физики СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 11, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: tsidulko@inp.nsk.su; tsidulko@mail.ru

[2] Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: cheriv@gorodok.net

НЕЛИНЕЙНАЯ СТАДИЯ АЛЬФВЕНОВСКОЙ ИОННО-ЦИКЛОТРОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ *

В работе рассмотрена модель, описывающая состояние нелинейного насыщения альфвеновской ионно-циклотронной неустойчивости. Представлены точные спирально-симметричные решения системы уравнений Власова – Максвелла, описывающие нелинейные альфвеновские волны в бесстолкновительной плазме. На их основе получено уравнение, описывающее ионную функцию распределения для задачи о нелинейном равновесии слабостолкновительной плазмы с волной при наличии однородной инжекции быстрых ионов с учетом торможения ионов на электронах и в пренебрежении столкновительным рассеянием. Аналитически получено решение этого уравнения и связь параметров волны с параметрами инжекции в случае бесконечно узкого распределения инжектируемых ионов по скоростям.

Ключевые слова: плазма, насыщение альфвеновской ионно-циклотронной неустойчивости, нелинейная альфвеновская волна.

Введение

В анизотропной плазме при определенных условиях возникает альфвеновская ионно-циклотронная неустойчивость. Неустойчивость экспериментально наблюдалась в открытых ловушках (на установке ТМХ [1], в компактном пробкотроне ГДЛ [2; 3]) и в магнитосфере [4]. В эксперименте обычно наблюдается стадия нелинейного насыщения, представляющая собой узкий спектр волн, поле которых вращается в направлении циклотронного вращения ионов с частотой, близкой к ионно-циклотронной. Большая часть теоретических работ, касающихся альфвеновской ионно-циклотронной неустойчивости, посвящена изучению условий возникновения неустойчивости (см., например: [5; 6]). Нелинейная стадия рассматривалась в рамках численного решения квазилинейных уравнений [5] и детального численного моделирования [4].

В настоящей работе развит подход, позволяющий значительно продвинуться в аналитическом описании стадии нелинейного насыщения. Экспериментально наблюдаемое нелинейное равновесие волны с плазмой приближенно обладает спиральной симметрией, которая означает, что любой сдвиг в пространстве или времени эквивалентен некоторому повороту вокруг направления внешнего магнитного поля. Поэтому первый этап работы заключается в нахождении точных нелинейных решений системы уравнений Максвелла – Власова, обладающих спиральной симметрией. Такие решения содержат произвольные функции, соответствующие произвольному заселению поверхностей постоянных интегралов движения. Произвольность заселения устраняется при учете медленных процессов перераспределения, связанных с инжекцией ионов и столкновениями. Получено уравнение, описывающее это перераспределение с учетом торможения ионов на электронах и в пренебрежении столкновительным рассеянием. Приведены результаты решения уравнения для случая, когда поле волны конеч-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Президента РФ (грант МД-2995.2009.2).

ное, но много меньше внешнего поля, а частицы инжектируются с нулевым разбросом по скоростям.

Нужно отметить, что в практически интересных случаях внешнее магнитное поле не однородно, а плазма является пространственно ограниченной. Эти факторы нарушают спиральную симметрию решений. Поэтому решения, получаемые при использовании развитого в настоящей работе подхода, нужно рассматривать как исходное приближение для описания стадии нелинейного насыщения неустойчивости, требующее уточнения с учетом факторов, нарушающих симметрию.

Точные спирально-симметричные решения уравнений Максвелла – Власова

Рассмотрим движение заряженной частицы в поле циркулярно поляризованной волны с частотой ω и волновым вектором $\vec{k}$, распространяющейся вдоль однородного магнитного поля $\vec{B}_0$. Эта задача рассматривалась во многих работах (см., например, [7; 8].

Векторный потенциал имеет вид

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{A}_1 \cos\Psi - \vec{b}\times\vec{A}_1 \sin\Psi, \tag{1}$$

где $\vec{A}_0 = xB_0\vec{e}_y$ – потенциал однородного постоянного магнитного поля; $\Psi = kz - \omega t$ – фаза волны, $\vec{b}$ – единичный вектор вдоль оси z, $\vec{A}_1 = A_1\vec{e}_x$, и гамильтониан для частиц сорта s

$$H_s = \frac{1}{2m_s}\times \left(\left(p_x - \frac{e_sA_1}{c}\cos\Psi\right)^2 + \left(p_y - \frac{e_sB_0}{c}x + \frac{e_sA_1}{c}\sin\Psi\right)^2 + p_z^2\right). \tag{2}$$

Электрическое и магнитное поля обладают спиральной симметрией: не изменяются при одновременном сдвиге вдоль оси z на δz и повороте в плоскости x, y на угол $k\delta z$. Кроме того, в задаче имеются еще три вида симметрии: к сдвигу относительно осей x и y, а также в системе отсчета волны – относительно сдвига по времени. Таким образом, имеются четыре интеграла движения. Переходя с помощью канонических преобразований к переменным, являющимся интегралами движения (аналогично [7]), можно получить следующий гамильтониан:

$$H_s[\tau,\Phi_s,Y_s,Z,M_s,P_{ys},\alpha_s] = M_s^2 - \alpha_s M_s + s_{ws}\sqrt{M_s}\cos\Phi_s. \tag{3}$$

Здесь $\tau_s = |\Omega_{cs}|\, w^{2/3} t$ – перенормированное время; Y_s, p_{ys}, α_s – интегралы движения,

$$M_s = \frac{1}{4w^{2/3}}\left(\frac{k}{m_s\Omega_{ci}}\right)^2 \times \left(p_x^{\,2} + (p_y - m_s\Omega_{cs}x)^2\right),$$

$$\Phi_s = kz - \omega t + \arctan\frac{p_y - m_s\Omega_{cs}x}{p_x},$$

$w = |kA_1|/|B_0|$ – отношение магнитного поля в волне к величине внешнего магнитного поля, Ω_{cs} – циклотронная частота для частицы сорта s, $s_{ws} = e_sA_1/|e_sA_1|$. В пределе $w\to 0$ M_s пропорционально магнитному моменту частицы, а $\Phi = \theta + kz - \omega t$, где θ – фаза ларморовского вращения.

Рассмотрим теперь систему уравнений Власова – Максвелла для волны вида (1) в однородной бесстолкновительной плазме. Задача содержит спиральную симметрию: при сдвиге вдоль оси z все вектора поворачиваются в плоскости x, y на один и тот же угол. Учтем это, введя новые скорости $\vec{V} = \vec{b}v_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}\cos\Psi + \vec{b}\times\vec{v}_{\perp}\sin\Psi$. В результате из уравнения для векторного потенциала получим

$$\vec{J} = \frac{k^2c^2 - \omega^2}{4\pi c}\vec{A}_1, \tag{4}$$

где $\vec{J} = \vec{b}j_{\parallel} + \vec{j}_{\perp}\cos\Psi + \vec{b}\times\vec{j}_{\perp}\sin\Psi$, $\vec{j}$ – ток, создаваемый частицами плазмы.

Решением уравнения Власова является произвольная функция от интегралов движения α_s и H_s гамильтониана (3), поэтому в качестве функций распределения электронов и ионов выберем функции $F_e = F_e[H_e,\alpha_e]$ и $F_i = F_i[H_i,\alpha_i]$. Подставив их в уравнение (4), учитывая квазинейтральность плазмы и равенство нулю суммарного импульса частиц плазмы, получим выражения, определяющие частоту, волновой вектор и амплитуду волны:

$$\sum_{s=i,e}\frac{m_i}{m_s}\left(w^{2/3}\langle 2M-\alpha\rangle_s - 1\right) = 0,$$

$$\omega = \Omega_{ci}\left(w^{2/3}\langle 2M-\alpha\rangle_i - 1\right), \tag{5}$$

$$k^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{c^2} \times$$
$$\times \sum_{s=i,e} \frac{m_i}{m_s} \left(2w^{-2/3} s_{ws} \left\langle \sqrt{M} \cos\Phi \right\rangle_s - 1 \right),$$

где

$$\left\langle G(\Phi, M, \alpha) \right\rangle_s =$$
$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_0^{\infty} dM \int_{-\pi}^{\pi} d\Phi G(\Phi, M, \alpha) F_s}{\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_0^{\infty} dM \int_{-\pi}^{\pi} d\Phi F_s}$$

есть среднее по функции распределения сорта s от величины G.

Первое уравнение в (5) является следствием квазинейтральности плазмы и отсутствия продольного тока (z – компонента уравнения (4)), второе вытекает из равенства нулю продольного импульса плазмы, третье – из x-компоненты уравнения (4).

Точные нелинейные решения, соответствующие вистлерам и альфвеновским волнам, также рассматривались в [9–11].

Модель плазмы с инжекцией

Рассмотрим плазму в однородном магнитном поле, в которую инжектируются быстрые нейтралы. Возникающие в результате ионизации и перезарядки ионы медленно тормозятся на электронах. Будем считать, что ионы с питч-углом, меньшим угла θ_L, исчезают (модель конуса потерь). Также ионы теряются из-за перезарядки. Кинетическое уравнение для ионов можно записать в виде

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \{H_i, f_i\} =$$
$$= \nu_{ie} \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \left(\vec{p} f_i \right) + S[\vec{p}] - \nu_L[\vec{p}] - \nu_{ch} f_i. \qquad (6)$$

Здесь H_i – гамильтониан (2), источник S описывает инжекцию, ν_{ie} – обратное время торможения, ν_{ch} – частота перезарядки, ν_L отлично от нуля только в конусе потерь. Будем считать столкновения и перезарядку редкими, $\nu_{ie} \sim \nu_{ch} << \Omega_{ci}$.

Перейдем в уравнении (6) к переменным гамильтониана (3). В нулевом приближении, когда $\nu_{ie} = \nu_{ch} = 0$, получим бесстолкновительное уравнение Власова, решением которого является функция от α и H.

В нулевом приближении переменные H и α не зависели от времени. Столкновения приводят к постепенному уменьшению энергии частицы и медленному (по сравнению с изменением переменных M и Φ) изменению H и α. Чтобы выделить это медленное изменение, представим решение в виде

$$f_i = F_i[H, \alpha] + \delta f_i,$$

где среднее по времени $\overline{\delta f_i} = 0$ и $\delta f_i \sim (\nu_{ie} / \Omega_{ci}) F_i$. Поскольку функция δf_i даст вклад в плотность тока, в векторном потенциале появится добавка

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \delta\vec{A}, \ \delta\vec{A} \sim (\nu_{ie} / \Omega_{ci}),$$

из-за чего появятся дополнительные слагаемые в гамильтониане

$$H = \left(\vec{p} - \frac{e}{c}(\vec{A}_0 + \delta\vec{A}) \right)^2 / (2m) =$$
$$= H_0 + (\nu_{ie} / \Omega_{ci}) H_1 + (\nu_{ie} / \Omega_{ci})^2 H_2,$$

где $\bar{H}_1 = 0$. Усреднив уравнение по периоду движения и отбросив квадратичные по ν_{ie} / Ω_{ci} слагаемые, получим уравнение для функции $F_i[H, \alpha]$:

$$\nu_{ie} \left(\bar{A} \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \bar{B} \frac{\partial F_i}{\partial H} \right) +$$
$$+ (3\nu_{ie} - \nu_{ch} - \bar{\nu}_L) F_i + \bar{S}[\vec{p}] = 0, \qquad (7)$$

где

$$\bar{A} = 2w^{2/3} H + w^{-2/3} \left(w^{2/3}\alpha + 1 \right) +$$
$$+ w^{-2/3} \frac{\omega}{\Omega_{ci}} + 2\left(w^{2/3}\alpha + 1 \right) \bar{M} - 2w^{2/3} \bar{M}^2,$$

$$\bar{B} = H\left(1 - w^{2/3}\alpha \right) + \frac{w^{2/3}}{2} -$$
$$- \left(\left(w^{2/3}\alpha + 1 \right)^2 + \frac{\omega}{\Omega_{ci}} \right) \frac{\bar{M}}{w^{2/3}} + \left(w^{2/3}\alpha + 1 \right) \bar{M}^2.$$

Здесь $\bar{M}$ и $\bar{M}^2$ – среднее за период от M и M^2 при заданных α и H.

На плоскости H, α инжектируемым частицам соответствует линия инжекции $H = H_{\text{inj}}[\alpha]$. Источник задается на этой линии как функция $\tilde{S}[\alpha]$. В области между линией инжекции и конусом потерь решение уравнения (7) может быть записано в виде

$$F_i[H, \alpha] =$$
$$= \frac{\tilde{S}[\alpha_{\text{inj}}]}{\left| \bar{B}[h_{\text{inj}}, \alpha_{\text{inj}}] + \bar{A}[h_{\text{inj}}, \alpha_{\text{inj}}](\alpha_{\text{inj}} + w^{-2/3}) / 2 \right|} \times$$

$$\times\exp\left[-\left(3-\frac{\nu_{ch}}{\nu_{ie}}\right)\int_{\alpha_{\rm inj}}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\bar{A}[\check{h}[\alpha],\alpha]}\right],$$

где функция $\check{h}[\alpha]$ является решением уравнения характеристик

$$\frac{d\check{h}}{d\alpha}=\frac{\bar{B}[\check{h},\alpha]}{\bar{A}[\check{h},\alpha]}. \tag{8}$$

Здесь $\alpha_{\rm inj}$ – координата точки пересечения характеристики, проходящей через точку (H, α), с линией инжекции $H = H_{\rm inj}[\alpha]$, $h_{\rm inj}=\check{h}[\alpha_{\rm inj}]$. Видно, что $\alpha_{\rm inj}$ является функцией α и H.

В общем случае M и M^2 являются определенными интегралами, содержащими H и α в качестве параметров, и уравнение характеристик (8) не решается аналитически. Если отношение магнитного поля в волне к величине внешнего магнитного поля мало (что справедливо в типичных условиях экспериментов [1]), то можно разложить $\bar{M}$ и $\bar{M}^2$ по малому параметру w и найти решение уравнения характеристик. Подставив полученную таким образом функцию распределения в соотношения (5), можно получить связь между параметрами волны, находящейся в равновесии с инжектируемыми ионами, и параметрами инжекции.

В случае строго поперечной инжекции с нулевым разбросом по скоростям из этих соотношений и уравнения (8) следует

$$\begin{aligned} w&=\frac{\tilde{\beta}}{(k\rho_\perp)^{5/4}}F_B\left[\frac{\nu_{ch}}{\nu_{ie}}\right],\\ \frac{\omega}{\Omega_{ci}}&=-1+\frac{w}{\sqrt{k\rho_\perp}}F_\omega\left[\frac{\nu_{ch}}{\nu_{ie}}\right], \end{aligned} \tag{9}$$

где $\tilde{\beta}=\frac{8\pi E_{\rm inj}}{B_0^2}\sqrt{\frac{J_{\rm inj}n_i}{\nu_{ie}}}$ – величина порядка отношения давления плазмы к давлению магнитного поля, $\rho_\perp$ – ларморовский радиус инжектируемых ионов, $E_{\rm inj}$ – их энергия, $J_{\rm inj}$ – число инжектируемых ионов в единицу объема. Функции, входящие в выражения (9), определяются следующим образом:

$$F_B[x]=F_2[x]/\sqrt{F_1[x]},$$

$$F_\omega[x]=F_2[x-1]/F_2[x],$$

$$\begin{aligned} &F_1[x]=\\ &=2\sqrt{2}\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\times\\ &\times\int_{-1}^{y}dz\frac{(1-y)^{4x-15/2}}{(1-z)^{4x-8}}\frac{(E[y']-K[y'])^{8x-18}}{(E[z']-K[z'])^{8x-17}}\times\\ &\times K[y']K[z'],\\ &F_2[x]=\\ &=4\sqrt{2}\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\times\\ &\times\int_{-1}^{y}dz\frac{(1-y)^{4x-21/2}}{(1-z)^{4x-9}}\frac{(E[y']-K[y'])^{8x-20}}{(E[z']-K[z'])^{8x-19}}\times\\ &\times K[y'](K[z']+(z-1)E[z']) \end{aligned},$$

(штрих означает $y'=(y+1)/(y-1)$, E и K – полные эллиптические интегралы).

При подстановке одно из уравнений в (5) обратилось в тождество. Это связано с тем, что в данной модели могут существовать волны с любым волновым числом. Если искать волну с максимальной амплитудой, то нужно выбирать как можно меньшие k. В данной модели с пространственно неограниченной плазмой волновое число может быть сколь угодно мало, однако реальная плазма ограничена, и длина волны определяется геометрией задачи.

Заключение

В работе рассмотрена модель, описывающая состояние нелинейного насыщения альфвеновской ионно-циклотронной неустойчивости. С использованием точных спирально симметричных решений системы Власова – Максвелла, соответствующих нелинейным альфвеновским волнам, получено уравнение для ионной функции распределения в задаче о нелинейном равновесии слабостолкновительной плазмы с волной при наличии однородной инжекции быстрых ионов. В рассмотренной задаче учитывается торможение ионов на электронах и пренебрегается столкновительным рассеянием. Приведены результаты аналитического решения уравнения для случая, когда поле волны конечное, но много меньше внешнего поля, а частицы инжектируются с нулевым разбросом по скоростям.

Решения, получаемые при использовании развитого в работе подхода, могут рассматриваться как исходное приближение для теоретического анализа практически интересных задач о нелинейном насыщении неустойчивости в ловушках с неоднородной слабостолкновительной плазмой и оценки степени опасности неустойчивости для удержания плазмы.

Список литературы

1. *Casper T. A., Smith G. R.* Observation of Alfvén Ion-Cyclotron Fluctuations in the End-Cell Plasma in the Tandem Mirror Experiment // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48. No. 15. P. 1015–1018.

2. *Аникеев А. В., Багрянский П. А., Коржавина М. С., Приходько В. В.* Изучение микронеустойчивостей в плазмоиде анизотропных ионов с термоядерными энергиями // Тез. XXXV Междунар. (Звенигородской) конф. по физике плазмы и УТС. Звенигород, 2009. С. 41.

3. *Коржавина М. С.* Изучение микронеустойчивостей в плазмоиде анизотропных ионов с термоядерными энергиями // Тез. XXXV Междунар. науч. студ. конф. Новосибирск, 2008. С. 68–69.

4. *Mangeney A., Grappin R.* Hybrid Simulations of the Magnetosheath Compression: Marginal Stability Path // Geophys. Res. Lett. 2003. Vol. 30. P. 1–4.

5. *Davidson R. C., Ogden J.M.* Electromagnetic Ion Cyclotron Instability Driven by Ion Energy Anisotropy in High-Beta Plasmas // Phys. Fluids. 1975. Vol. 18. No. 8. P. 1045–1050.

6. *Watson D. C.* Alfvén Ion-Cyclotron Instability in Mirror Machines // Phys. Fluids. 1980. Vol. 23. No. 12. P. 2485–2492.

7. *Palmadesso P., Schmidt G.* Collisionless Damping of a Large Amplitude Whistler Wave // Phys. Fluids. 1971. Vol. 14. No. 7. P. 1411–1418.

8. *Панов Д. А., Тимофеев А. В.* О селективном нагреве ионов многоизотопной плазмы неоднородным ВЧ-полем // Физика плазмы. 1995. Т. 21, вып. 12. С. 1092–1098.

9. *Bell T. F.* Nonlinear Alfvén Waves in a Vlasov Plasma // Phys. Fluids. 1965. Vol. 8. No. 10. P. 1829–1839.

10. *Lutomirski R. F.* Exact Nonlinear Electromagnetic Whistler Modes // Phys. Rev. 1966. Vol. 147. No. 1. P. 156–165.

11. *Chen C., Davies J. A., Zhang G. et al.* Large-Amplitude Traveling Electromagnetic Waves in Collisionless Magnetoplasmas // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 69. No. 1. P. 73–76.

Материал поступил в редколлегию 05.07.2010

Yu. A. Tsidulko, I. S. Chernoshtanov

NONLINEAR STAGE OF ALFVÉN ION-CYCLOTRON INSTABILITY

A model describing nonlinear saturated state of Alfvén ion-cyclotron instability is presented. Spirally symmetric exact solutions of Vlasov – Maxwell equations describing nonlinear Alfvén waves in collisionless plasmas are presented. On their basis the equation describing ion distribution function in non-linear equilibrium of a weak-collision plasma with the wave is obtained, taking into account an uniform fast ion injection, ion drag caused by electrons and neglecting ion angle scattering. A solution of this equation and relations of the wave parameters with the injection parameters are obtained analytically in the case of the infinitely narrow velocity distribution of the injected ions.

Keywords: plasma, Alfvén ion cyclotron instability saturation, nonlinear Alfvén wave.