

УДК 621.3.032.26

А. В. Иванов

Институт ядерной физики СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 11, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: A.V.Ivanov@inp.nsk.su

РАСЧЕТ ПРЕДЕЛЬНОГО ПЕРВЕАНСА КРУГЛОГО ПУЧКА, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЯЮЩЕГО ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ВАКУУМНУЮ КАМЕРУ *

Одним из проявлений влияния пространственного заряда является ограничение тока пучков заряженных частиц в электронно-оптических системах. Как правило, для каждой конкретной системы предельное значение тока находится по результатам численного расчета, но аналитическое рассмотрение необходимо как для первоначальных оценок параметров системы, так и для понимания физических основ происходящих в ней процессов. В данной работе рассмотрен круглый однородный пучок заряженных частиц, частично заполняющий цилиндрическую вакуумную камеру. Найден максимальный первеанс этой системы в зависимости от отношения радиуса трубы к радиусу пучка, осуществлено сравнение найденной зависимости с результатами численного расчета данной системы, а также с приближенными аналитическими оценками.

Ключевые слова: пространственный заряд, виртуальный катод.

Введение

Как известно, влияние пространственного заряда приводит к ограничению тока в электронно-оптических системах (ЭОС). Если ток входящего в систему пучка превышает предельный, образуется виртуальный катод, и часть пучка отражается назад.

В качестве примера систем, в которых наблюдается виртуальный катод, могут выступать коллекторы стационарных интенсивных электронных пучков. Как правило, потенциал коллектора стараются приблизить к потенциалу катода. При этом (при неизменном значении тока пучка) уменьшается тепловая нагрузка на поверхность коллектора, требуется источник напряжения меньшей мощности, упрощается задача охлаждения коллектора. Однако при уменьшении потенциала коллектора меньше предельного пучок или разваливается на входе в коллектор, или образуется виртуальный катод (в случае замагниченного пучка).

В настоящее время для расчетов ЭОС широко используются программные комплексы, например UltraSAM [1; 2]. С их помощью можно численно определить предельные значения токов и потенциалов, рассчитать динамику пучка вблизи области образования виртуального катода. В то же время аналитическое рассмотрение этой задачи необходимо как для первоначальных оценок параметров системы, так и для понимания физических основ происходящих в ней процессов. В данной работе рассмотрена часто встречающаяся система – цилиндрический однородный замагниченный пучок в вакуумной трубе. В том или ином приближении (пучок заполняет все пространство внутри камеры, малое провисание потенциала внутри пучка и т. д.) эта задача была решена в работах [3–6], здесь же приближением будет только отсутствие релятивистских эффектов.

* Поисковая научно-исследовательская работа проведена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, гос. контракт П1198.

Расчет предельного первеанса

Рассмотрим задачу в следующей постановке. В бесконечно длинной цилиндрической вакуумной камере радиусом r_0 распространяется стационарный однородный ($j(r) = \text{const}$) пучок заряженных частиц (рис. 1). Ток пучка равен I , радиус – r_b . Примем, что потенциал камеры U_0 , потенциал катода равен нулю. Система погружена в продольное магнитное поле, достаточно сильное, чтобы заморозить любое поперечное движение частиц пучка.

Обозначим через U_b потенциал на краю пучка (при $r = r_b$), через U_{\min} – потенциал в центре пучка. Введем нормировочный первеанс

$$P_N = \pi \epsilon_0 \sqrt{2\eta} = 16,486 \cdot 10^{-6} \text{ A/B}^{3/2},$$

здесь $\eta = q/m$ – удельный заряд частиц пучка, числовое выражение приведено для электронов. Также введем величины

$$P_0 = I/U_0^{3/2}, \quad P_b = I/U_b^{3/2}.$$

Внутри пучка распределение потенциала подчиняется уравнению Пуассона. В рас-

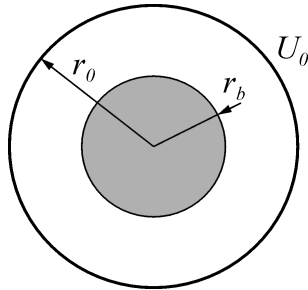


Рис. 1. Круглый однородный пучок в цилиндрической вакуумной камере

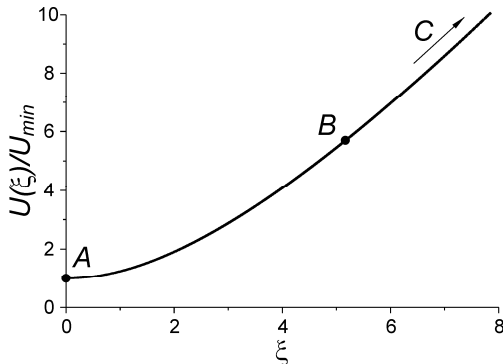


Рис. 2. Зависимость относительного потенциала от приведенного радиуса

считываемом нерелятивистском случае это уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU(r)}{dr} \right) = \frac{I}{\pi \epsilon_0 r_b^2 \sqrt{2\eta U(r)}}.$$

Как и в работе [4], введем относительный потенциал $\phi(r) = U(r)/U_{\min}$ и новую независимую переменную (приведенный радиус)

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{r}{r_b} \left(\frac{I}{\pi \epsilon_0 \sqrt{2\eta U_{\min}^{3/2}}} \right)^{1/2} = \\ &= \frac{r}{r_b} \left[\frac{P_b}{P_N} \left(\frac{U_b}{U_{\min}} \right)^{3/2} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

В этих переменных получим универсальное уравнение

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\phi}{d\xi} \right) = \frac{1}{\sqrt{\phi}}, \quad (1)$$

$$\phi|_{\xi=0} = 1, \quad \left. \frac{d\phi}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0.$$

График численного решения этого уравнения приведен на рис. 2.

Введем величину

$$\xi_b = \xi|_{r=r_b} = \left[\frac{P_b}{P_N} \left(\frac{U_b}{U_{\min}} \right)^{3/2} \right]^{1/2}.$$

Параметр ξ_b однозначно определяет состояние системы, связывая между собой величину

$$\frac{P_b}{P_N} = \frac{\xi_b^2}{\phi^{3/2}(\xi_b)} \sim \frac{I}{U_b^{3/2}},$$

пропорциональную току системы, с величиной минимального потенциала в системе

$$\frac{U_{\min}}{U_b} = \frac{1}{\phi(\xi_b)}.$$

Взаимосвязь этих величин приведена на рис. 3. Из графика можно получить решение задачи о максимальном первеансе круглого однородного пучка в цилиндрической камере. Очевидно, что он достигается при полном заполнении трубы пучком ($r_b = r_0$, $U_b = U_0$), далее рассмотрим этот случай. График имеет две ветви – устойчивую AB и неустойчивую BC . Если первеанс P_0/P_N относительно невелик, то система находится на устойчивой ветви. Если же начать увеличивать первеанс, то при достижении им максимального значения (в рассматриваемом случае – точки B) потенциал в центре

скачком падает до нуля, и в системе образуется виртуальный катод. Отсюда находим максимальный первеанс цилиндрической камеры:

$$P_{0,max} = 1,963 \cdot P_N = 32,370 \cdot 10^{-6} A/B^{3/2}.$$

Этот результат был впервые получен в работе [3], числовое значение приведено для электронного пучка. В случае же неполного заполнения камеры пучком потенциал на краю пучка U_b заранее неизвестен, и требуются дополнительные выкладки.

Известно, что потенциал в пространстве между пучком и вакуумной трубой логарифмически зависит от радиуса:

$$U(r_b \leq r \leq r_0) = U_0 + A \cdot \ln(r/r_0). \quad (2)$$

Константа A может быть найдена из того, что на краю пучка электрические поля, определяемые внутри пучка из решения (1) и снаружи пучка из решения (2), должны быть равны. Для отыскания производной потенциала внутри пучка можно воспользоваться определением относительного потенциала:

$$\frac{dU}{dr} = U_{min} \frac{d\varphi}{dr} = U_{min} \varphi'(\xi) \frac{\xi_b}{r_b}.$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} A &= U_{min} \xi_b \varphi'(\xi_b) = \\ &= U_b \frac{U_{min}}{U_b} \xi_b \varphi'(\xi_b) = U_b \frac{\xi_b \varphi'(\xi_b)}{\varphi(\xi_b)}. \end{aligned}$$

Используя то, что и сами значения потенциалов внутри и вне пучка должны непре-

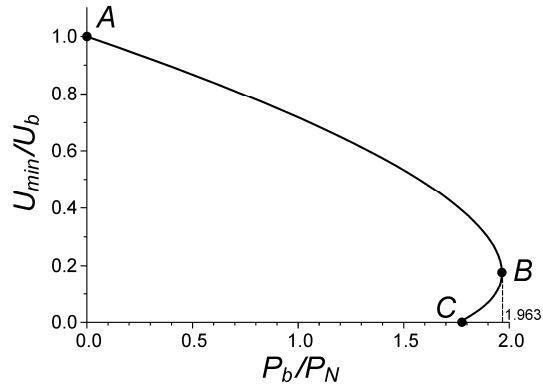


Рис. 3. Зависимость величины U_{min}/U_b от P_b/P_N

рывно сшиваться на границе пучка, находим:

$$U_0 = U_b \left(1 + \ln \left(\frac{r_0}{r_b} \right) \cdot \frac{\xi_b \varphi'(\xi_b)}{\varphi(\xi_b)} \right). \quad (3)$$

Используя это выражение, можно связать параметр ξ_b с первеансом системы:

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{P_N} &= \frac{P_b}{P_N} \left(\frac{U_b}{U_0} \right)^{3/2} = \\ &= \frac{\xi_b^2}{(\varphi(\xi_b) + \xi_b \varphi'(\xi_b) \cdot \ln(r_0/r_b))^{3/2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Эта зависимость при нескольких значениях r_0/r_b изображена на рис. 4, а. Выражение (4) можно рассматривать как нелинейное уравнение, при помощи которого по известному значению первеанса системы можно найти отвечающий ему параметр ξ_b .

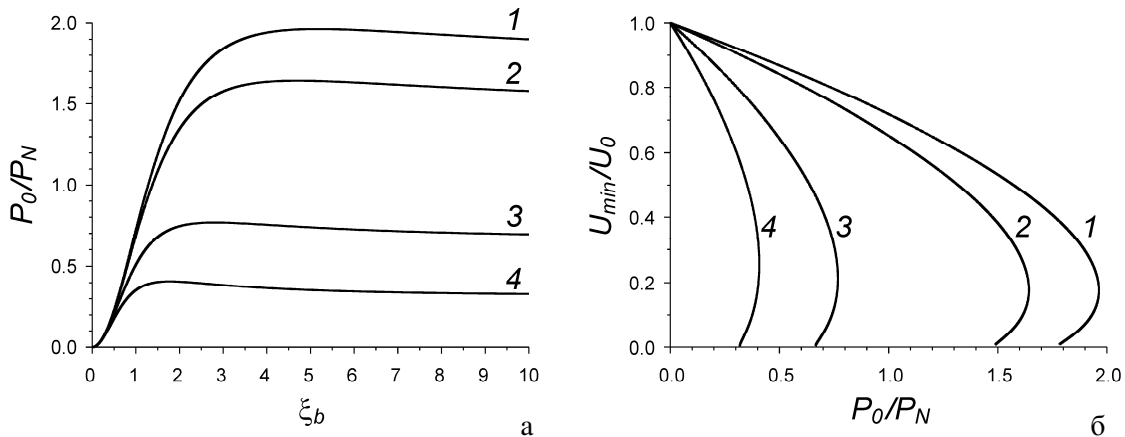


Рис. 4. Зависимость первеанса системы P_0/P_N от параметра ξ_b (а) и минимального потенциала U_{min}/U_0 от P_0/P_N (б). Значения отношения радиусов r_0/r_b : 1 – 1,0; 2 – 1,1; 3 – 2,0; 4 – 5,0

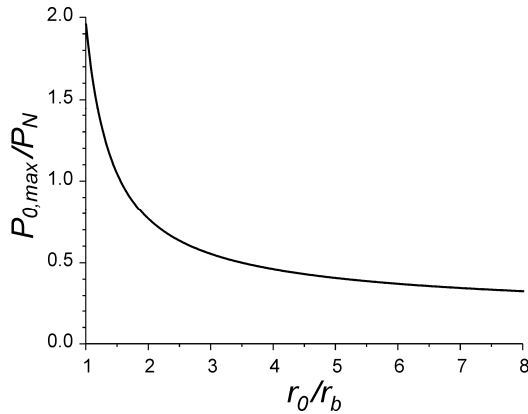


Рис. 5. Зависимость максимального первеанса системы $P_{0,max}/P_N$ от отношения радиуса трубы к радиусу пучка

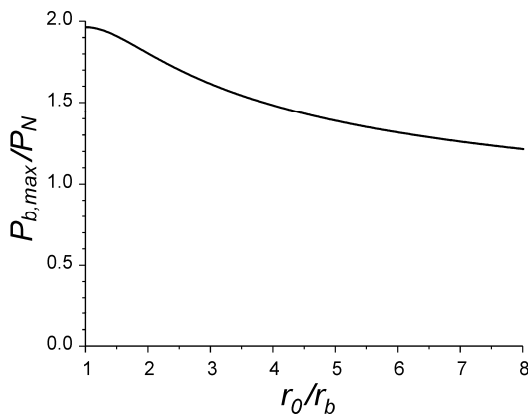
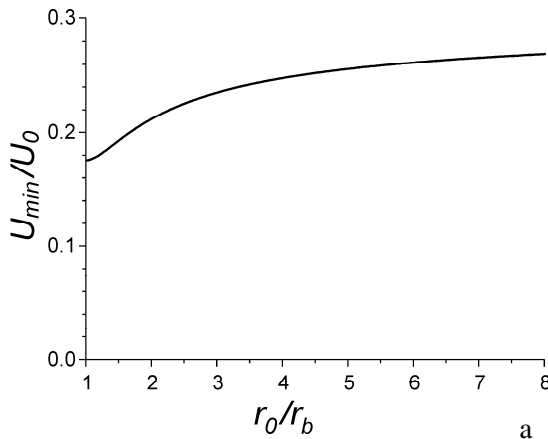


Рис. 6. Зависимость величины $P_{b,max}/P_N$ от отношения r_0/r_b



Из выражения (3) также можно найти непосредственное выражение величины минимального потенциала U_{min}/U_0 через параметр ξ_b :

$$\frac{U_{min}}{U_0} = \frac{U_{min}}{U_b} \frac{U_b}{U_0} = \frac{1}{\varphi(\xi_b) + \xi_b \varphi'(\xi_b) \cdot \ln(r_0/r_b)}$$

Отсюда можно определить взаимосвязь между P_0/P_N и U_{min}/U_0 , она изображена на рис. 4, б. Видно, что опять решение имеет две ветви – устойчивую и неустойчивую. Пока первеанс не достигнет критического значения, которое зависит от отношения радиуса трубы к радиусу пучка, система находится на устойчивой ветке, и ток полностью проходит вдоль трубы. При достижении критического первеанса в системе формируется виртуальный катод. Нами был осуществлен численный расчет величины критического первеанса системы $P_{0,max}/P_N$ в зависимости от r_0/r_b , его результат представлен на рис. 5 и приведен в таблице (см. ниже). Зависимость величины $P_{b,max}/P_N$ от r_0/r_b приведена на рис. 6. Зависимость при критическом первеансе величины минимального потенциала U_{min}/U_0 показана на рис. 7, а, величины провисания потенциала в пучке $(U_b - U_{min})/U_0$ – на рис. 7, б.

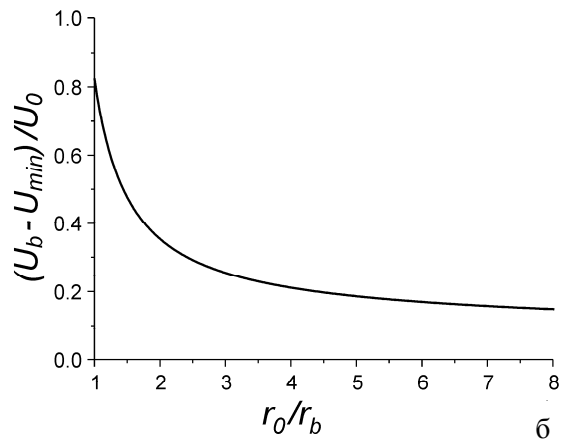


Рис. 7. Зависимость при критическом первеансе минимального потенциала (а) и провисания потенциала внутри пучка (б) от отношения r_0/r_b

Величина $P_{0,\max}/P_N$ для некоторых значений r_0/r_b

r_0/r_b	$P_{0,\max}/P_N$	r_0/r_b	$P_{0,\max}/P_N$
1,0	1,963	3,0	0,554
1,1	1,643	3,5	0,500
1,2	1,422	4,0	0,461
1,3	1,262	5,0	0,407
1,4	1,140	6,0	0,372
1,6	0,968	7,0	0,347
1,8	0,852	8,0	0,327
2,0	0,768	9,0	0,312
2,5	0,634	10,0	0,299

Сравнение полученных результатов с численным расчетом и другими решениями

Для проверки полученного решения было осуществлено его сравнение с результатами численного моделирования рассматриваемой электронно-оптической системы. При фиксированном потенциале трубы и токе пучка (т. е. при неизменном P_0) изменялось отношение r_0/r_b . Потенциал на краю пучка теоретически рассчитывался по формулам (4) и (3), численный расчет осуществлялся при помощи комплекса программ UltraSAM. Результаты расчетов представлены на рис. 8. Помимо хорошего совпадения теоретических и численных данных, хотелось бы отметить способность комплекса UltraSAM рассчитывать ЭОС вблизи порога образования виртуального катода.

В научной литературе часто встречается следующая оценка максимального перванса цилиндрического пучка в трубе [6]:

$$P_{0,\max} = \frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{P_N}{1 + 2\ln(r_0/r_b)} = \frac{25,382 \cdot 10^{-6}}{1 + 2\ln(r_0/r_b)} \frac{A}{B^{3/2}}, \quad (5)$$

последнее выражение приведено для электронов. Это выражение получено в приближении малого провисания потенциала внутри пучка и, как следствие, постоянной плотности объемного заряда ($\rho(r) \approx \text{const}$). Сравнение этой оценки с полученным решением приведено на рис. 9 (приближе-

ние 1). Видно, что при небольшой величине отношения радиуса трубы к радиусу пучка это приближение сильно отличается от точного решения, в то же время приближаясь к нему с ростом r_0/r_b (ошибка менее 10 % при $r_0/r_b > 5,7$). Действительно, как видно из рисунка 7, б, в точке возникновения виртуального катода с ростом r_0/r_b провисание потенциала в пучке уменьшается. Стоит отметить, что в этом приближении при критическом первансе величина U_{\min}/U_0 не зависит от r_0/r_b и равна $1/3$ (точное решение – см. рис. 7, а).

Рассмотренная оценка фактически была получена путем разложения потенциала в степенной ряд и удержания только первых

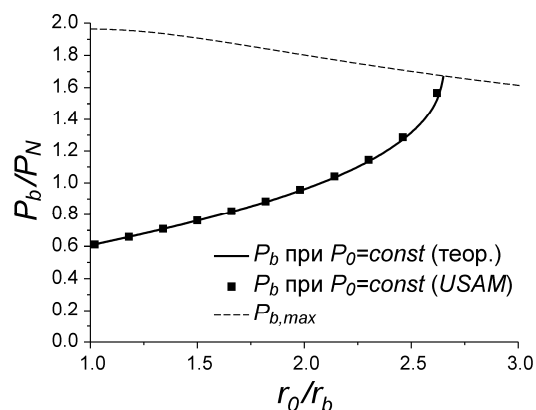


Рис. 8. Сравнение полученной теоретической зависимости P_b/P_N от отношения r_0/r_b с результатами численного расчета системы

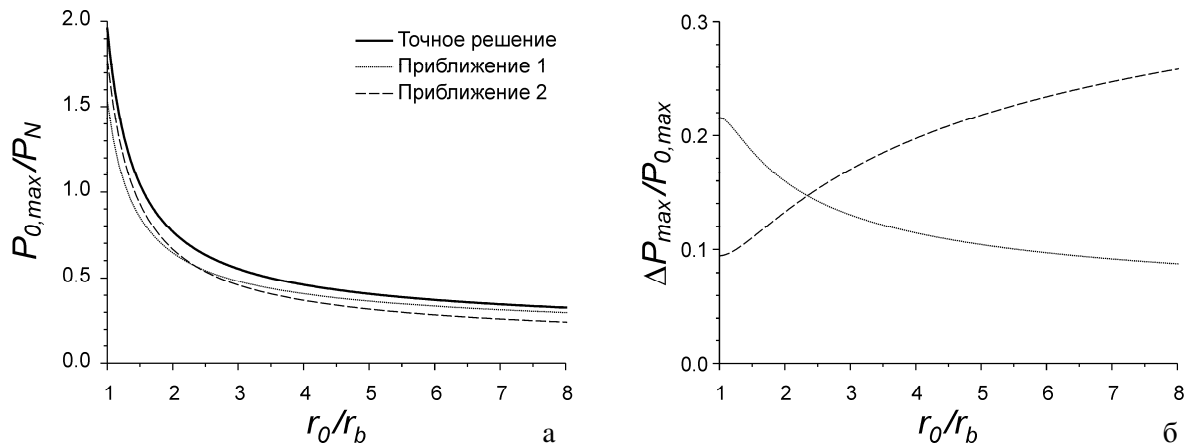


Рис. 9. Сравнение точной зависимости максимального первеанса системы от отношения r_0/r_b с приближенными решениями (а) и относительная ошибка приближенных решений (б)

двух членов: $U(r) = U_{\min} + C_2 r^2 + \dots$. Возникает вопрос: можно ли увеличить точность этой оценки путем увеличения числа рассматриваемых членов ряда? Это предложение аналогично попытке аппроксимировать решение уравнения (1) степенным рядом. При этом необходимо сохранить приемлемую точность вплоть до точки B с координатой $\xi_B = 5,168$ (см. рис. 2). Результат аппроксимации при удержании различного числа членов ряда показан на рис. 10. Цифрами обозначены: 0 – точное решение уравнения (1), 1 – удержание двух членов ряда, 2 – четырех, 3 – шести, 4 – восьми членов ряда. Видно, что попытка таким путем увеличить точность несостоятельна – в инте-

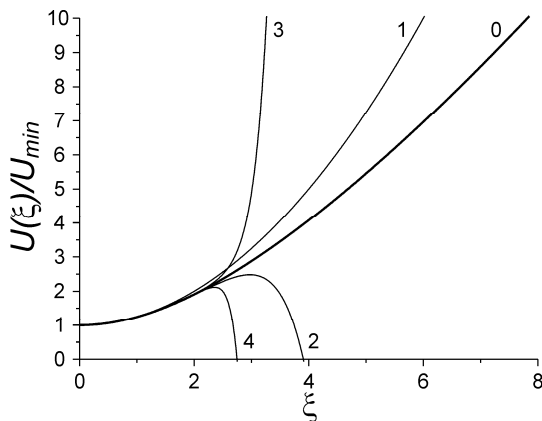


Рис. 10. Сравнение точного решения дифференциального уравнения с его приближенными решениями в виде степенного ряда

ресующей нас области при удержании дополнительных членов сам ряд все больше отклоняется от исходного решения.

Еще одна оценка для максимального первеанса системы приведена в [5]:

$$P_{0,max} = \frac{16}{9} \cdot \frac{P_N}{\left(1 + \frac{4}{3} \ln(r_0/r_b)\right)^{3/2}},$$

она выведена из частного решения

$$\varphi(\xi) = \left[(3/4)\xi\right]^{4/3}$$

уравнения (1) (для этого решения $\varphi(0) = 0$).

Эта оценка представлена на рис. 9 как приближение 2. Видно, что уже при $r_0/r_b > 2,4$ она обеспечивает худшую точность, чем (5).

Заключение

В результате произведенных расчетов была найдена зависимость максимального первеанса круглого однородного пучка заряженных частиц в цилиндрической вакуумной камере от отношения радиуса трубы к радиусу пучка. Сравнение найденной зависимости с результатами численного расчета данной электронно-оптической системы, произведенного при помощи комплекса программ UltraSAM, показало хорошее совпадение теоретических и численных данных. Было осуществлено сравнение найденной зависимости с приближенными аналитическими оценками, показана область их применимости.

Автор выражает благодарность М. А. Тиуну за ценные замечания, высказанные в ходе работы над статьей.

Список литературы

1. *Ivanov A. V., Tiunov M. A.* ULTRASAM-2D Code for Simulation of Electron Guns with Ultra High Precision // Proc. EPAC2002. P., 2002. P. 1634–1636.

2. *Иванов А. В., Тиун М. А.* Применение метода граничных интегральных уравнений при моделировании формирования и динамики пучка в установках электронного охлаждения // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Физика. 2008. Т. 3, вып. 1. С. 56–61.

3. *Smith L. P., Hartman P. L.* The Formation and Maintenance of Electron and Ion Beams // J. Appl. Phys. 1940. Vol. 11. P. 220.

4. *Пирс Дж. Р.* Теория и расчет электронных пучков. М.: Сов. радио, 1956.

5. *Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А.* Устойчивость РЭП и проблема предельных токов // УФН. 1971. Т. 103, № 3. С. 609

6. *Мешков И. Н.* Транспортировка пучков заряженных частиц. Новосибирск: Наука, 1991.

Материал поступил в редколлегию 29.11.2010

A. V. Ivanov

CALCULATION OF THE LIMITING PERVEANCE OF A ROUND BEAM PARTIALLY FILLING A CYLINDRICAL VACUUM CHAMBER

One of the effects of space charge is the charged particles current limitation in electron-optical systems. As a rule, for each specific system the limiting value of current can only be found on the results of numerical calculation, but the analytical treatment is necessary both for initial estimates of the parameters of the system and for understanding the physical basis of processes occurring in it. In this paper we consider a uniform circular beam of charged particles, partially filling a cylindrical vacuum chamber. The maximum perveance of this system depending on the ratio of pipe radius to beam radius is found, the comparison of this dependence with the results of numerical calculation of the system is carried out, as well as with the approximate analytical estimates.

Keywords: space charge, virtual cathode.