

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ ЗЕМЛИ В РАЙОНЕ ЮЖНОГО УРАЛА

Изучена математическая модель теплового состояния поверхностных слоев Земли в стационарном приближении применительно к району Южного Урала с целью объяснить природу наблюдаемых на поверхности локальных аномалий теплового потока. Численно решаются вариационные задачи по восстановлению температурного поля литосферы и распределения мощности источников тепла в земной коре с учетом граничных наблюдений.

Ключевые слова: теплопроводность, температурное поле Земли, тепловой поток, вариационная задача.

Введение

Тепловое состояние Земли характеризуется распределением температуры в ее недрах и теплового потока из недр на поверхности. Плотность теплового потока определяется согласно закону Фурье:

$$q = -\lambda \operatorname{grad} T,$$

где T – температура, λ – коэффициент теплопроводности. Тепловой поток через поверхность Земли – важнейшее, с энергетической точки зрения, из всех наблюдаемых геофизических и геологических явлений, поскольку обусловленная им годовая теплоотдача в десятки раз превышает тепловыделение от сейсмической и вулканической активности [1].

Основным источником тепла в земной коре служит наличие примеси радиоактивных изотопов – урана, тория и калия, концентрация которых убывает с глубиной [1]. Удельную мощность внутренних источников тепла также называют теплогенерацией.

Хорошо известно существование локальных аномалий теплового потока – зон, в которых его значения резко отличаются по сравнению с сопредельными территориями. Так, на Урале выделяется весьма протяженная область аномально низкого теплового потока плотностью до 30 мВт/м² [2] (типич-

ные для континентов значения составляют от 30 до 120 мВт/м²). Проблеме объяснения природы таких аномалий посвящено немало исследований. В качестве возможных причин низкого теплового потока в [2; 3] указываются:

- пониженная теплогенерация пород в указанной области;
- пониженный мантийный тепловой поток;
- искажающее влияние палеоклимата;
- движение флюида, влияние неоднородностей и др.

Целью данной работы является изучение влияния первых двух факторов методом математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Применение математического моделирования в геотермических исследованиях ограничено нашими знаниями о глубинном строении Земли и изучаемой территории в частности. Благодаря масштабным исследованиям [2; 4], территория Южного Урала в этом отношении изучена достаточно хорошо. Наличие информации о геологическом строении региона (рис. 1) и теплофизических свойствах пород (см. таблицу) позволяет использовать ее при моделировании теплового состояния литосферы. Однако следует помнить, что теплофизические параметры определены не точно, а лишь

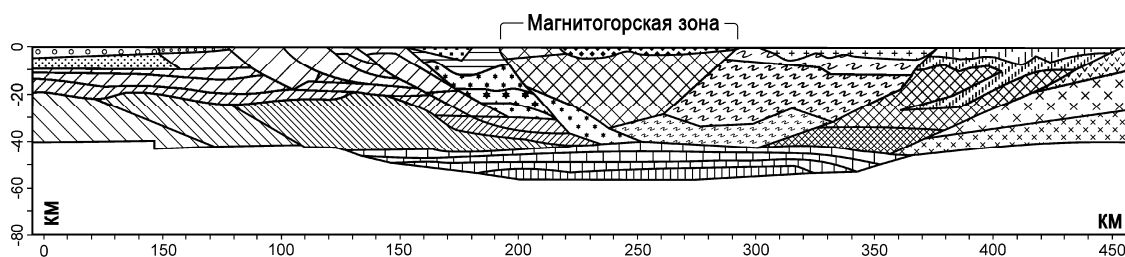


Рис. 1. Модель строения литосферы по профилю «Урсейс»
(области, сходные по составу пород, заштрихованы похожим образом)

Оценки теплофизических характеристик пород, используемые в расчетах *

Обозн. (рис. 1)	Классификация пород	λ , Вт/(м·К)	Q , мкВт/м ³	b , мК ⁻¹
	Палеозойские осадочные	2,0 (0,23)	1,0 (0,25)	0,8
	То же	2,0 (0,23)	1,4 (0,35)	0,8
	Протерозойские осадочные	2,9 (0,27)	1,2 (0,30)	1,2
	То же	2,8 (0,27)	0,5 (0,12)	1,2
	Восточно-Европейская кора	2,5 (0,25)	0,4 (0,10)	0,8
	Флиш	2,0 (0,23)	1,3 (0,32)	1,2
	Сланцы	2,6 (0,25)	0,5 (0,12)	1,2
	Высокбарические комплексы	2,8 (0,27)	0,7 (0,18)	1,5
	Островодужные комплексы	2,6 (0,25)	0,5 (0,12)	1,2
	Ультраосновные	2,6 (0,25)	0,6 (0,15)	1,5
	То же	2,5 (0,25)	0,4 (0,10)	1,2
	Граниты	2,7 (0,25)	2,0 (0,40)	0,9
	Гнейсы, сланцы	2,8 (0,27)	1,2 (0,35)	1,5
	Зауральское поднятие	2,6 (0,26)	1,1 (0,23)	0,9
	Зауральская вулканическая дуга	2,8 (0,27)	1,1 (0,23)	1,2
	Казахстанская кора	3,0 (0,33)	0,7 (0,20)	1,5
	Переходная зона	2,5 (0,35)	0,15 (0,05)	0,3
	То же	2,5 (0,35)	0,04 (0,01)	0,3
	Мантия	4,2 (0,5)	0,01	0,6

* В таблице указаны: средние значения и стандартные отклонения (в скобках) коэффициента теплопроводности (λ) и удельной теплогенерации (Q), а также коэффициент, учитывающий зависимость теплопроводности от температуры.

в границах некоторых доверительных интервалов. Кроме того, может иметь место существенная зависимость от температуры и давления. Изучение влияния разброса теплофизических параметров на точность моделей является частью эксперимента. На рис. 2 показано взаимное расположение зоны аномально низкого теплового потока (А) и сейсмического профиля «Урсейс» (В).

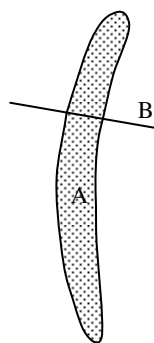


Рис. 2. Расположение профиля и области низкого теплового потока

Восстановление температурного поля

Для построения модели теплопередачи введем ряд предположений:

- 1) перенос тепла является кондуктивным и стационарным;
- 2) теплопроводность пород зависит от пространственных переменных и от температуры;
- 3) среда является кусочно-однородной и изотропной;
- 4) на границах раздела пород выполняются условия идеального контакта;
- 5) характеристики пород не зависят от одной из пространственных переменных;
- 6) не учитывается влияние таких геологических явлений, как движение флюида, фильтрация, вертикальные вариации геотермических параметров.

Первое предположение основано на том, что земные недра обладают исключительно высокой тепловой инерцией, поэтому в невулканических районах на глубинах до границы литосфера / астеносфера температурное поле может считаться стационарным. Если рассматривать литосферу как твердое тело при температурах ниже плавления лав, то имеет место именно кондуктивный теплоперенос. Однако при температурах, близких к 1 000 К и выше, существенно влияние лучистого переноса.

Согласно исследованиям [2; 4; 5], теплопроводность пород с ростом температуры уменьшается. Будем считать, что коэффициент теплопроводности обратно пропорционален температуре:

$$\lambda(T) = \lambda_0 / (1 + b(T - T_0)),$$

где λ_0 – теплопроводность при температуре T_0 , b характеризует интенсивность изменения. Значения b , приведенные в таблице, выбраны автором на основе имеющейся информации о свойствах пород.

Зависимость теплопроводности некоторых пород от давления изучена в [5; 6]. Показано, что при изменении давления в пределах от 0,1 до 100 МПа наблюдается значительное увеличение (до 20 %) эффективной теплопроводности образцов. При значениях более 150 МПа, что примерно соответствует глубине залегания 5 км, влияние давления практически стационарно. Это влияние учитывается введением поправки в λ_0 .

Третье и последующие предположения упрощающие. Считается, что пористость и неоднородность учитывается в осредненном коэффициенте теплопроводности. Анизотропия, которая может быть существенна для некоторых пород, специально не изучалась, и на данном этапе мы не располагаем соответствующей информацией.

Предположение об идеальном тепловом контакте представляется естественным в условиях высоких давлений. К тому же в реальности границы разделов не являются резкими, а имеет место взаимопроникновение пород. С учетом взаимного расположения профиля и области аномально низкого теплового потока (рис. 2) полагаем, что в направлении, перпендикулярном профилю, расположение пород меняется незначительно, и можно выделить достаточно малый интервал, в котором это расположение неизменно (интервал структурной однородности), поэтому задача рассматривается в двумерной постановке.

Температурное поле в профиле

$$\Omega = \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_\beta \leq l_\beta, \beta = 1, 2\}$$

описывается двумерным уравнением эллиптического типа [7]:

$$-\sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left(k(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_{\beta}} \right) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

где $u(x)$ – температура, $k(x, u)$ – обобщенный коэффициент теплопроводности, $f(x)$ – удельная теплогенерация породы (все величины безразмерные, ось x_1 направлена вниз). Для корректной постановки задачи необходимы граничные условия. В качестве условий на верхней границе

$$\Gamma_0 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$$

может быть задана температура:

$$u(x) = u_0(x), \quad x \in \Gamma_0, \quad (2)$$

либо плотность теплового потока:

$$k \frac{\partial u}{\partial n} = q_0(x), \quad x \in \Gamma_0 \quad (3)$$

(n – внешняя нормаль), поскольку соответствующие измерения имеются¹. Для задания условий на боковых границах используем следующее соображение. В случае слоистой области, когда границы слоев перпендикулярны оси x_1 , а условия на верхней и нижней границах постоянны, производная $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ равна нулю (задача сводится к одномерной). Расширим исходный профиль соответствующим образом, дополнив его справа и слева фиктивными областями слоистой структуры. На границах расширенного профиля зададим условия:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq l_1, \quad x_2 = 0, l_2. \quad (4)$$

Нижняя граница профиля Γ ($x_1 = l_1$) недоступна для измерений. Однако заметим, что на верхней границе Γ_0 мы имеем сразу два условия: (2), (3). Это обстоятельство позволяет нам сформулировать вариационную задачу для восстановления недостающего граничного условия. Предположим, что мы имеем возможность управлять тепловым потоком вниз:

¹ Температура на глубине 100 м практически постоянна и равна примерно 5 °С. Для определения теплового потока существует специальная, довольно сложная методика [1; 2], учитывающая многовековое изменение климата, которое существенно искажает измерения на глубинах до 5 км.

$$k \frac{\partial u}{\partial n} = v(x), \quad x \in \Gamma, \quad v \in H, \quad (5)$$

наблюдая за тепловым потоком на поверхности. Функционал качества управления возьмем в виде

$$J_{\sigma}(v) = \left\| k \frac{\partial u}{\partial n}(x; v) - q_0(x) \right\|^2 + \frac{1}{\sigma^2} \|v\|^2 = \int_{\Gamma_0} \left(k \frac{\partial u}{\partial n}(x; v) - q_0(x) \right)^2 dx + \frac{1}{\sigma^2} \int_{\Omega_v} v^2(x) dx, \quad (6)$$

где $\Omega_v = \Gamma$, σ – параметр. Второе слагаемое вводится для того, чтобы функционал был сильно выпуклым. Оптимальное управление $w(x)$ определяется из условия

$$J_{\sigma}(w) = \inf_{v \in H} J_{\sigma}(v), \quad (7)$$

или

$$\text{grad } J_{\sigma}(w) = 0.$$

Задача (1), (2), (4)–(7) решается численно методом сеток. Для определения неотрицательного оптимального управления используется итерационный процесс:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{n+1} &= w_n - \tau_{n+1} \text{grad } J_{\sigma}(w_n), \\ w_{n+1} &= \max\{0, \tilde{w}_{n+1}\}, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь τ_{n+1} – итерационный параметр, выбираемый из условия $J_{\sigma}(w_{n+1}) < J_{\sigma}(w_n)$. Состояние системы определяется из решения краевой задачи (1), (2), (4), (5). Для приближенного ее решения введем равномерную прямоугольную сетку

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \{x_{ij} = (ih_1, jh_2) \in \bar{\Omega}, \\ &0 \leq i \leq N_1, 0 \leq j \leq N_2, \\ &h_{\beta} N_{\beta} = l_{\beta}, \beta = 1, 2\}. \end{aligned}$$

Учитывая разрывность $k(x)$, запишем уравнение баланса тепла для контрольного объема $\Omega_x = \{s = (s_1, s_2),$

$$x_{\beta} - 0,5h_{\beta} \leq s \leq x_{\beta} + 0,5h_{\beta}, \quad \beta = 1, 2\}:$$

$$\begin{aligned} &(q_1(x_1 + 0,5h_1, x_2) - q_1(x_1 - 0,5h_1, x_2))h_2 + \\ &+ (q_2(x_1, x_2 + 0,5h_2) - q_2(x_1, x_2 - 0,5h_2))h_1 = \\ &= \int_{x_1 - 0,5h_1}^{x_1 + 0,5h_1} \int_{x_2 - 0,5h_2}^{x_2 + 0,5h_2} f(s) ds_2 ds_1. \end{aligned}$$

Выразим потоки в полуцелых узлах через значения функции $u(x)$ в узлах:

$$\begin{aligned} q_1(x_1 - 0,5h_1, x_2) &= -a_1(x_1, x_2)u_{\bar{x}_1}, \\ q_1(x_1 + 0,5h_1, x_2) &= -a_1(x_1 + h_1, x_2)u_{x_1}, \\ q_2(x_1, x_2 - 0,5h_2) &= -a_2(x_1, x_2)u_{\bar{x}_2}, \\ q_2(x_1, x_2 + 0,5h_2) &= -a_2(x_1, x_2 + h_2)u_{x_2}. \end{aligned}$$

Коэффициенты $a_1(x)$, $a_2(x)$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_1(x_1, x_2) &= k_1(x_1 - 0,5h_1, x_2), \\ a_2(x_1, x_2) &= k_2(x_1, x_2 - 0,5h_2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} k_1(x_1, x_2) &= \\ &= 0,5(k(x_1, x_2 - 0,5h_2) + k(x_1, x_2 + 0,5h_2)), \\ k_2(x_1, x_2) &= \\ &= 0,5(k(x_1 - 0,5h_1, x_2) + k(x_1 + 0,5h_1, x_2)). \end{aligned}$$

Тем самым приходим к однородной консервативной разностной схеме, где во всех

$$\hat{J}_\sigma(v) = \sum_{j=0}^{N_2} \left(-a_1(h_1, jh_2)y_{x_1} - 0,5h_1 \left((a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} + f(0, jh_2) \right) - q_0(x_2) \right)^2 h_2 + \frac{1}{\sigma^2} \|v\|^2,$$

и его вариацию:

$$\delta \hat{J}_\sigma(v) = -2 \sum_{j=0}^{N_2} \delta y \left(a_1(h_1, jh_2)y_{x_1} + 0,5h_1 \left((a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} + f(0, jh_2) \right) + q_0(x_2) \right) h_2 + \frac{2}{\sigma^2} (\delta v, v) + O(\|\delta v\|^2). \quad (10)$$

Пусть некоторому изменению управления δv соответствует изменение состояния δy . Уравнение (1) нелинейно, однако разностная задача (9) считается линейной на интервале $[y; y + \delta y)$ для достаточно малого δy . С учетом этого, привлекая разностную формулу Грина [8], заменяем первое слагаемое в (10), содержащее δy , на $2(p, \delta v)$, где $p(x)$ – функция, которая определяет сопряженное состояние и находится из решения задачи

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^2 \left(a_\beta p_{\bar{x}_\beta} \right)_{x_\beta} &= 0, \quad x \in \omega, \\ p(x) &= a_1(h_1, x_2)y_{x_1} + \\ &+ 0,5h_1 \left((a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} + f(0, x_2) \right) + q_0(x_2), \\ &x \in \Gamma_0, \\ \left[k \frac{\partial p}{\partial n} \right]_{\bar{\omega}} &= 0, \quad x \in \partial\omega \setminus \Gamma_0 \end{aligned}$$

(индекс $\bar{\omega}$ означает сеточную аппроксимацию).

внутренних узлах используются одни и те же аппроксимации. Граничное условие (5) аппроксимируется на решениях уравнения (1):

$$\begin{aligned} a_1(x)y_{x_1} - 0,5h_1 \left(a_2 y_{\bar{x}_2} \right)_{x_2} &= 0,5h_1 f(x) + v(x), \\ x \in \Gamma_\omega &\equiv \Gamma \cap \partial\omega, \quad v \in L_2(\Gamma_\omega), \end{aligned}$$

условия (4) – аналогично. Таким образом, приходим к разностной задаче вида

$$Ay = \varphi, \quad (9)$$

которая имеет второй порядок аппроксимации. Для ее решения используется попеременно-треугольный итерационный метод, построенный на основе регуляризатора [8], причем итерационные параметры вычисляются по методу сопряженных градиентов.

Рассмотрим сеточную аппроксимацию функционала (6):

Для градиента функционала имеем:

$$\text{grad } \hat{J}_\sigma(v) = 2 \left(p(x) + \frac{1}{\sigma^2} v(x) \right).$$

Таким образом, один шаг итерационного процесса (8) связан с решением двух квазилинейных эллиптических задач по определению основного и сопряженного состояний. Итерации заканчиваются при условии $\|r_n\| < \varepsilon$, где r_n – невязка.

Температурное поле, восстановленное при средних значениях геотермических параметров (см. таблицу) и $\sigma = 200$, $l_1 = 8,1$, $l_2 = 46,5$, $h_1 = 0,15$, $h_2 = 0,25$, $\varepsilon = 10^{-10}$, изображено на рис. 3. Температура поверхности принята равной 5°C , а соответствующую конфигурацию теплового потока можно увидеть на рис. 4 (линия $q(v_1)$), которая показывает, как выглядит функция теплового потока на поверхности $q(x)|_{\Gamma_0}$ в зависимости от управления $v(x)|_{\Gamma}$.

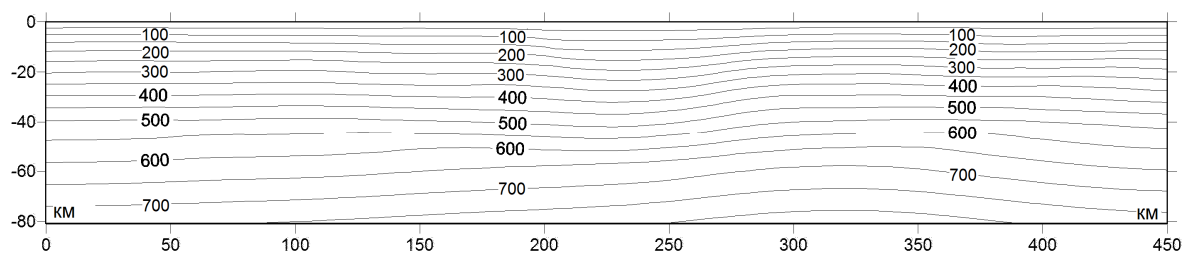


Рис. 3. Модель распределения температуры (в градусах Цельсия) по профилю «Урсейс»

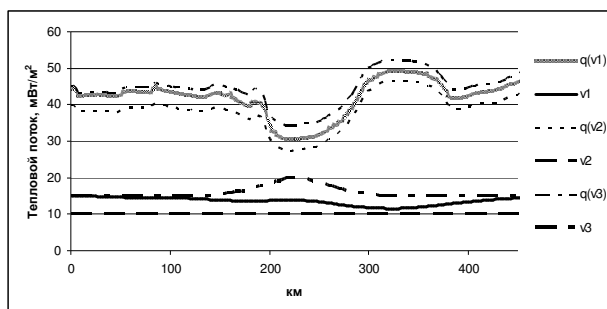


Рис. 4. Профиль теплового потока на поверхности $q(v)$ и соответствующая функция управления v на нижней границе (v_1 – оптимальное управление, v_2 и v_3 – заданные управления)

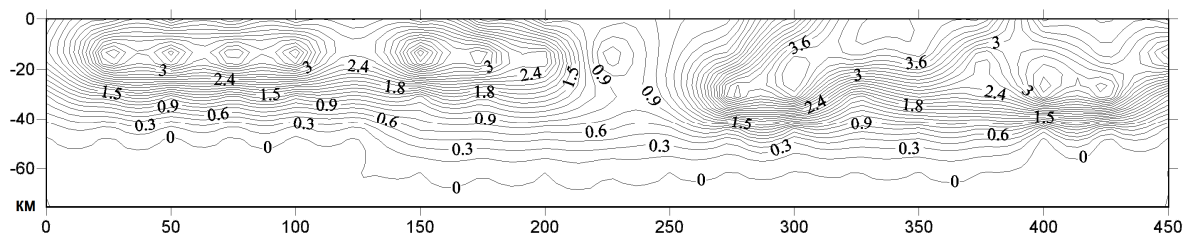


Рис. 5. Распределение мощности источников (мкВт/м³), оптимизированное по наблюдениям теплового потока на верхней границе

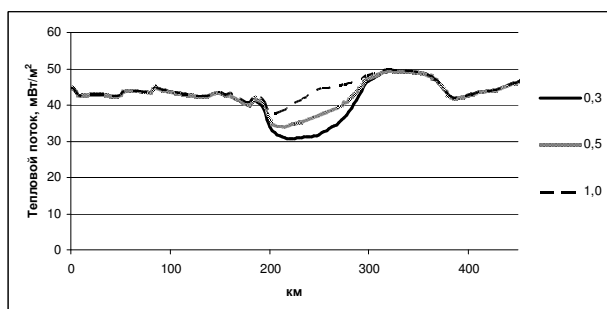


Рис. 6. Профиль теплового потока на поверхности в Магнитогорской зоне

Уточнение распределения мощности источников по граничному наблюдению

Исследуем теперь, как влияет распределение мощности тепловых источников в приповерхностных слоях на конфигурацию теплового потока через поверхность. Для этого сформулируем соответствующую вариационную задачу. Пусть состояние системы вместо (1) описывается уравнением

$$-\sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left(k(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_{\beta}} \right) = f(x) + v(x), \quad x \in \Omega,$$

$$v(x) = \sum_{m=1}^M v_m \eta_m(x), \quad v_{\min} \leq v_m \leq v_{\max},$$

$$\eta_m(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_{vm}, \\ 0, & x \notin \Omega_{vm}. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь v_m – постоянные, подлежащие определению, $\Omega_v = \bigcup_{m=1}^M \Omega_{vm}$ – область управления, примыкающая к верхней границе профиля, причем $f(x) = f_0$ при $x \in \Omega_v$. Вместо граничного условия (5) используется условие

$$k \frac{\partial u}{\partial n} = q(x), \quad x \in \Gamma. \quad (12)$$

Функционал качества возьмем в виде (6). Задача (2), (4), (6), (7), (11), (12) по определению кусочно-постоянного управления решается численно методом сеток, аналогично предыдущей задаче. Поле теплогенерации, восстановленное при тех же значениях параметров, $q(x) = 1,5$ (15 мВт/м²) и $f_0 = 3$, изображено на рис. 5. На рис. 6 показано, как меняется профиль теплового потока на поверхности в зависимости от значения теплогенерации в Магнитогорской зоне (см. рис. 1).

Анализ результатов и выводы

Для оценки погрешности численного решения используется метод, основанный на сгущении сетки [9; 10]. Выполняется серия расчетов при последовательном уменьшении шага сетки вдвое, устанавливается сходимость и порядок точности приближенного решения, и производится его уточнение (экстраполяция). Установлено, что решение

имеет второй порядок точности, если линии разрывов проходят по узлам сетки.

Проведена серия расчетов, в которых исходные геотермические параметры задавались как значения нормально распределенных случайных величин. Согласно расчетам, проведенным на основе предлагаемой стационарной геотермической модели, значения температуры на глубине 70 км составляют порядка 650–750 °С, значения плотности вертикального теплового потока – от 12 до 17 мВт/м², значения температуры на глубине 40–50 км, что примерно соответствует границе Мохо, – от 500 до 650 °С.

Решение вариационной задачи по реконструкции мощности тепловых источников вблизи поверхности показало наличие области пониженной теплогенерации, соответствующей области пониженного теплового потока на поверхности.

Также выявлено, что профиль теплового потока на поверхности более чувствителен к значениям теплогенерации приповерхностных пород (см. рис. 6), чем к значениям глубинного (мантийного) теплового потока. Другими словами, тепловой поток на верхней границе гораздо лучше управляется внутренними источниками тепла, чем тепловым потоком на нижней границе (см. рис. 4). В частности, при выравнивании теплогенерации в приповерхностных структурах выравнивается и тепловой поток на поверхности, чего не наблюдается при выравнивании теплового потока на нижней границе.

Анализ результатов расчетов позволяет сделать вывод о том, что с точки зрения используемой стационарной модели геотермики распределение мощности источников тепла в приповерхностных слоях является основным фактором, определяющим конфигурацию теплового потока на поверхности. В частности, падение теплового потока на поверхности является следствием пониженной теплогенерации пород в регионе.

Список литературы

1. Жарков В. Н. Внутреннее строение Земли и планет. М.: Наука, 1983. 415 с.
2. Голованова И. В. Тепловое поле Южного Урала. М.: Наука, 2005. 190 с.
3. Kukkonen I. T., Golovanova I. V., Khachay Yu. V. et al. Low Geothermal Heat Flow

of the Urals Fold Belt – Implication of Low Heat Production, Fluid Circulation or Palaeoclimate? // *Tectonophysics*. 1997. Vol. 276. P. 63–85.

4. Глубинное строение и геодинамика Южного Урала (проект Уралсейс). Тверь: ГЕРС, 2001. 286 с.

5. *Абдулагатова З. З.* Теплопроводность сухих и флюидонасыщенных горных пород при высоких температурах и давлениях. Эксперимент и моделирование: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Махачкала, 2010.

6. *Курбанов А. А.* Закономерности изменения теплофизических свойств флюидосодержащих коллекторов при изменении температуры и порового давления: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 2007.

7. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Вычислительная теплопередача. М.: УРСС, 2003. 784 с.

8. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.

9. *Гаврилов В. В., Шерыхалина Н. М.* Математическая модель температурного режима участка литосферы // *Вестн. Уфимск. гос. авиац. техн. ун-та*. 2007. Т. 9, № 5 (23). С. 81–86.

10. *Житников В. П., Шерыхалина Н. М.* Обоснование методов фильтрации результатов численного эксперимента // *Вестн. Уфимск. гос. авиац. техн. ун-та*, 2007. Т. 9, № 3. С. 71.

Материал поступил в редколлегию 20.04.2010

V. V. Gavrilov

NUMERICAL SIMULATION OF THERMAL FIELDS WITHIN EARTH SURFACE LAYERS IN THE REGION OF SOUTH URALS

A mathematical model of thermal conductivity within the Earth near-surface layers has been studied in stationary mode relative to South Ural region. A purpose of the work is to identify cause of local heat flow density anomalies observed on the surface. Reconstruction of thermal field and heat production field is represented as numerical solution of the variational problems formulated according to boundary observation data.

Keywords: thermal conductivity, Earth thermal field, heat flow, variational problem.