

УДК 530.182; 517.518.34

В. В. Афонин, Т. К. Болецкая

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия
E-mail: boletsкая@phys.omsu.omskreg.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ В ДИНАМИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

В работе с помощью вейвлет-анализа получены зависимости средней длительности ламинарной фазы от величины отклонения параметра от критического значения для одномерного квадратичного отображения отрезка на отрезок как при отсутствии шума, так и при наличии белого гауссова шума.

Ключевые слова: динамические системы, одномерные отображения, переход к хаосу, перемежаемость, вейвлет-анализ.

Вейвлет-анализ, в отличие от традиционного Фурье-анализа, позволяет не только найти спектр исследуемого сигнала, но и определить промежутки времени, в течение которых та или иная частота присутствует в сигнале. Эти возможности вейвлет-анализа делают его особенно удобным для исследования нерегулярных сигналов, например для анализа перемежаемости I рода, рассмотренной в классической работе Помо и Манневилья [1]. Такой анализ на основе дискретного вейвлет-преобразования был впервые проведен в [2] для одномерного логистического отображения в отсутствие внешнего шума. Исследование перемежаемости как при отсутствии, так и при наличии внешнего шума, но без использования вейвлет-анализа, было выполнено в работе [3]. В настоящей работе явление перемежаемости I рода как при отсутствии, так и при наличии внешнего шума исследуется с помощью непрерывного вейвлет-анализа.

Рассмотрим динамическую систему, описываемую квадратичным отображением отрезка на отрезок типа логистического отображения:

$$x_{n+1} = x_n[1 + \lambda(1 - x_n)] + g\xi_n, \quad (1)$$

где λ – положительный управляющий параметр, ξ_n – случайные гауссовы переменные с нулевым средним и единичной дис-

персией: $\langle \xi_n \rangle = 0$; $\langle \xi_n \xi_{n'} \rangle = \delta_{nn'}$, g – уровень шума.

На рис. 1 приведена бифуркационная диаграмма отображения (1), т. е. график зависимости от параметра λ точек устойчивых орбит. С ростом λ в интервале $0 < \lambda < \lambda_\infty$ ($\lambda_\infty = 2,569946$) возникает каскад удвоений периода [4].

При $\lambda > \lambda_\infty$ итерации отображения могут вести себя хаотически или образовывать циклы. Областям хаотического поведения на бифуркационной диаграмме соответствуют закрашенные участки, циклам – светлые участки, так называемые окна периодичности. Самое большое окно периодичности соответствует циклу с периодом 3. Значение параметра, при котором этот цикл устойчив, $\lambda_c = 2,828427$. При λ , немного меньших критического значения λ_c , имеет место перемежаемость I рода (рис. 2, а): почти регулярное поведение итераций (ламинарная фаза) сменяется хаотическим поведением итераций (турбулентная фаза). Масштаб времени t (параметр сдвига вейвлета) выбран так, что изменение t на 0,1 соответствует одной итерации.

Предположив, что итерации в ламинарной области изменяются очень слабо, Помо и Манневиль [1] получили зависимость

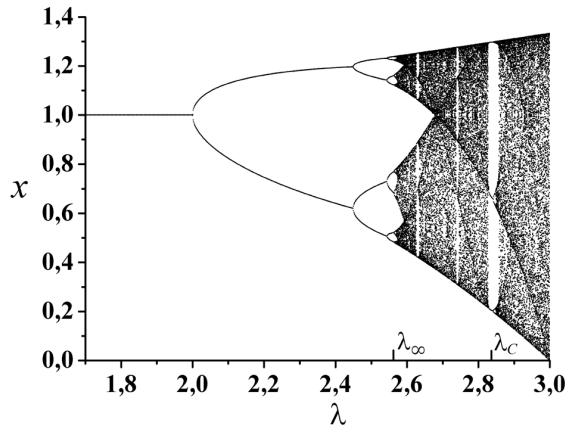


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма

средней длины ламинарной фазы $\langle l \rangle$ от $\varepsilon = \lambda_c - \lambda$ – величины отклонения параметра λ от критического значения при отсутствии шума:

$$\langle l \rangle \approx \text{const} \varepsilon^{-1/2}. \quad (2)$$

Нами эта зависимость проверена с помощью вейвлет-анализа дискретных сигналов, состоящих из последовательных итераций отображения (1).

Непрерывное вейвлет-преобразование осуществляется путем свертки

$$W(s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\eta) \psi_{s,t}^*(\eta) d\eta \quad (3)$$

анализируемой функции $x(\eta)$ с двухпараметрической вейвлетной функцией $\psi_{s,t}(\eta)$. Наиболее часто для выполнения непрерывного вейвлет-анализа используются вещественный МНАТ-вейвлет («мексиканская шляпа») и комплексные вейвлеты Морле и Паула [5]. Нами выбран вейвлет Морле, потому что он дает лучшее разрешение по частоте, чем вейвлеты МНАТ и Паула.

Базис, порождаемый вейвлетом Морле, имеет вид

$$\psi_{st}(\eta) = \pi^{-1/4} s^{-1/2} e^{i\omega_0(\eta-t)/s} e^{-(\eta-t)^2/(2s^2)}, \quad (4)$$

где i – мнимая единица, s – параметр масштаба, t – параметр сдвига, ω_0 – характеристика вейвлета Морле, определяющая его локализацию во временной и частотной областях. Нами выбрано значение $\omega_0 = 6$, обеспечивающее оптимальную локализацию вейвлета как в той, так и в другой области. На рис. 2, б приведена поверхность модулей вейвлет-коэффициентов $|W(s, t)|$ сигнала, приведенного на рис. 2, а.

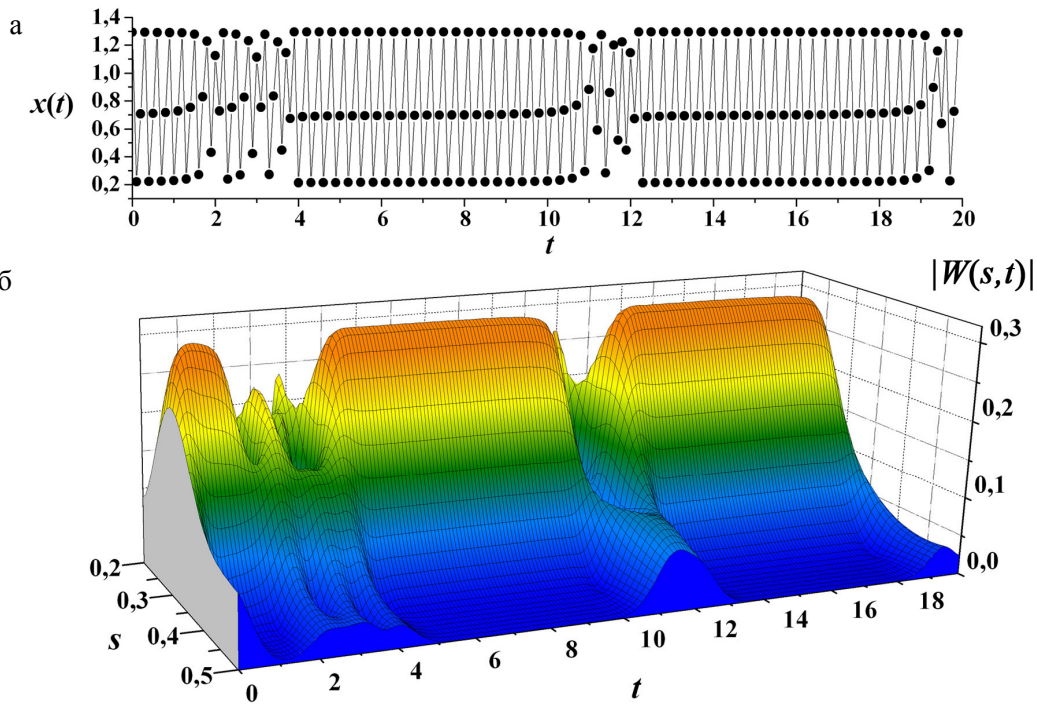


Рис. 2. Сигнал $x(t)$, соответствующий последовательности итераций отображения (1) при $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$ (а), и его вейвлет-преобразование (б)

Длины последовательностей итераций составляли 1 000 000 для каждого значения ε . Шаг по параметру сдвига был выбран равным $\Delta t = 0,1$. Тогда основная частота ламинарных фаз $f = 1/0,3$. Поэтому максимумы $|W(s,t)|$ в ламинарных областях приходятся на значение параметра масштаба $s_0 \cong 0,3$. При уменьшении Δt максимум перемещается в область меньших s и расширяется, так как в области высоких частот разрешение по частоте ухудшается. При увеличении Δt максимум перемещается в область больших s , что приводит к усилению краевых эффектов, связанных с увеличением длины вейвлета. Поэтому величина шага $\Delta t = 0,1$ представляется оптимальной. Шаг по параметру масштаба был выбран $\Delta s = 0,01$ – на порядок меньше значения s_0 .

В работе [3] моменты начала и окончания ламинарной фазы идентифицировались по попаданию итераций в окрестность одной из трех точек цикла, что требует знания положений этих точек. В достаточно сложных системах это может представлять проблему. Вейвлет-анализ позволяет ввести не требующий такого знания более общий критерий, основанный на различии спектра частот в ламинарной и турбулентной фазах. Требуется лишь следить за попаданием значений модулей вейвлет-коэффициентов в окрестность только одной величины $W_{кр}$, за которую выбирается $|W(s_0,t)|$ при t , соответствующем центру ламинарной фазы с наибольшей длиной. Полагалось, что при выполнении неравенства $|W(s_0,t)| \geq 0,9W_{кр}$ итерация принадлежит ламинарной фазе.

При определении длины ламинарной фазы учитывалось также, что вследствие краевых эффектов значение параметра t , которому соответствует особенность исследуемого сигнала, может быть определено с помощью вейвлета Морле с точностью, порядка $\tau = \pm\sqrt{2}s$ [5]. При $s = s_0$ получаем, что погрешность в определении длины ламинарной фазы – порядка 9 итераций.

На рис. 3 приведены проекции на плоскость «параметр масштаба s – параметр сдвига t » фрагментов поверхностей модулей вейвлет-коэффициентов (чем темнее окраска, тем выше значение коэффициентов). Рис. 3, *a* соответствует $\varepsilon = 0$, т. е. устойчивому циклу с периодом 3, при этом вейвлет-коэффициенты не меняются при

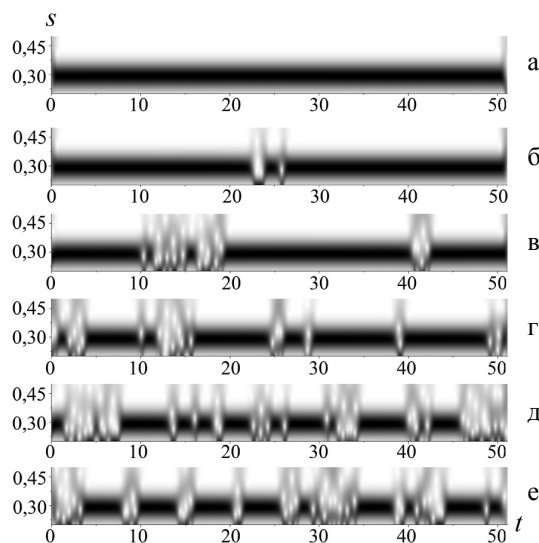


Рис. 3. Проекция поверхностей модулей вейвлет-коэффициентов: $a - \varepsilon = 0$; $b - \varepsilon = 7 \cdot 10^{-6}$; $v - \varepsilon = 2,7 \cdot 10^{-5}$; $z - \varepsilon = 1,3 \cdot 10^{-4}$; $d - \varepsilon = 3,3 \cdot 10^{-4}$; $e - \varepsilon = 5,3 \cdot 10^{-4}$

изменении параметра сдвига. Число ламинарных фаз, по которым определялись $\langle l \rangle$, составляло от 2 700 до 16 000 (по мере уменьшения ε число фаз уменьшалось). При очень малой величине отклонения ε с его ростом сначала наблюдается крайне нелинейный спад длительностей ламинарных фаз, т. е. одинаковым приращениям ε соответствуют значительно различающиеся приращения $\langle l \rangle$. Затем спад становится близким к линейному, т. е. одинаковым приращениям ε соответствуют приблизительно одинаковые приращения $\langle l \rangle$. Средняя длительность турбулентной фазы остается почти постоянной со слабой тенденцией к росту.

Зависимость $\ln \langle l \rangle$ от $\ln \varepsilon$ близка к линейной (рис. 4) и аппроксимируется прямой:

$$\ln \langle l \rangle = k \ln \varepsilon + b, \quad k = -0,540 \pm 0,004,$$

$$b = -0,910 \pm 0,035,$$

коэффициент корреляции [6] $R = -0,999$. Таким образом, (2) подтверждается.

Средняя длительность ламинарной фазы в присутствии белого гауссова шума заданного уровня g аппроксимируется выражением $\langle l \rangle_\alpha = F(\alpha) / \sqrt{\varepsilon}$ [3], где $\alpha = g^2 / \varepsilon^{3/2}$;

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \int_0^\infty \exp \left\{ -2u \left(1 + \frac{a\alpha^2}{12} u^2 \right) \right\} \frac{du}{\sqrt{u}}, \quad (5)$$

$a = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^3}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=x_c \\ \lambda=\lambda_c}}$, x_c – одна из точек устойчивого цикла с периодом 3, $f^3(x) \equiv f(f(f(x)))$ – 3-я итерация отображения (1). $\frac{\langle l \rangle_\alpha}{\langle l \rangle_0} \sim F(\alpha)$.

При малых α (малом уровне шума) $F(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \int_0^\infty \exp\{-2u\} \frac{du}{\sqrt{u}}$, функция $F(\alpha)$ от α не зависит, и $\langle l \rangle_\alpha \sim \varepsilon^{-1/2}$. При больших α (большом уровне шума) (5) можно записать в виде

$$F(\alpha) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \sqrt{\frac{6}{a\alpha^2}} \int_0^\infty \exp\{-v\} \frac{dv}{v^{5/6}}, \quad (6)$$

что дает $\langle l \rangle_\alpha \sim \alpha^{-1/3} \varepsilon^{-1/2}$.

Описанные зависимости подтверждены с помощью вейвлет-анализа. Длины последовательностей итераций составляли 1000000 для каждого значения α . Расчет вейвлет-коэффициентов выполнялся так же, как при отсутствии шума. На рис. 5 приведены проекции фрагментов поверхностей модулей вейвлет-коэффициентов, соответствующие различным уровням шума (чем темнее окраска, тем выше значения коэффициентов). Малый уровень шума α практически не сказывается на структуре поверхности модуля вейвлет-коэффициентов, но при больших α влияние шума существенно и нелинейно.

На рис. 6 приведены зависимости от параметра α средних длительностей ламинарной фазы в присутствии шума и при его отсутствии при некоторых значениях ε .

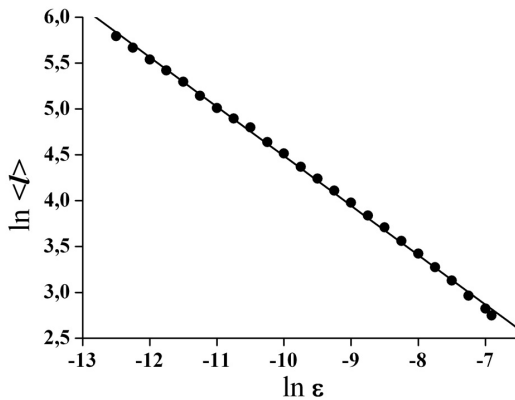


Рис. 4. Зависимость $\ln \langle l \rangle$ от $\ln \varepsilon$

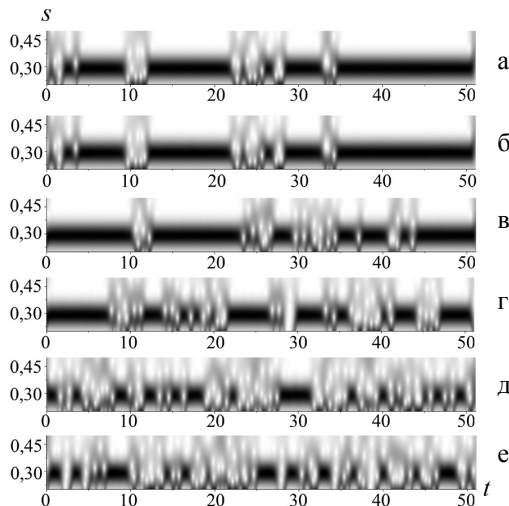


Рис. 5. Проекция поверхностей модулей вейвлет-коэффициентов при $\varepsilon = 10^{-4}$:
 $a - \alpha = 10^{-3}$; $b - \alpha = 10^{-2}$;
 $v - \alpha = 10^{-1}$; $z - \alpha = 10^0$;
 $\partial - \alpha = 10^1$; $e - \alpha = 2 \cdot 10^1$

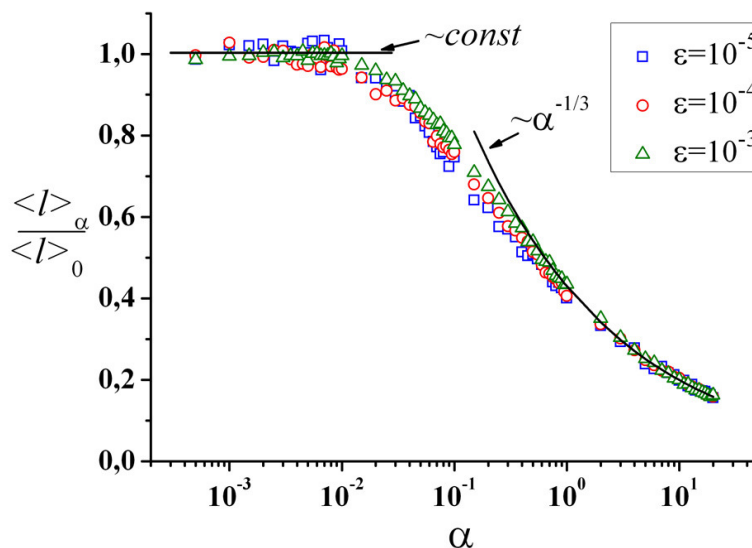


Рис. 6. Отношение средней длительности ламинарной фазы в присутствии шума к средней длительности ламинарной фазы в отсутствии шума для различных ε при фиксированных α

В работе численно исследована зависимость средней длины ламинарной фазы от величины отклонения параметра от критического значения для одномерного квадратичного отображения отрезка на отрезок как при отсутствии шума, так и при наличии белого гауссова шума. Результаты, полученные с использованием вейвлет-анализа, согласуются с результатами [3], полученными ранее другими методами. На примере простой модели продемонстрировано, что вейвлет-анализ может быть использован для исследования характеристик перемежаемости в эволюции нелинейных динамических систем.

Список литературы

1. *Manneville P., Pomeau Y.* Intermittency and the Lorenz Model // *Physics Letters A*. 1979. Vol. 75. No. 1. P. 1–2.

2. *Figliola A., Schuschny F.* Time and Frequency Study of Intermittency // *Chaos, Solitons and Fractals*. 1995. Vol. 6. P. 131–135.

3. *Hirsh J. E., Huberman B. A., Scalapino D. J.* Theory of Intermittency // *Phys. Rev. A*. 1982. Vol. 25. No. 1. P. 519–532.

4. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: введение. М.: Мир, 1988. 240 с.

5. *Короновский А. А., Храмов А. Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 170 с.

6. *Афифи А.* Статистический анализ. Подход с использованием ЭВМ. М.: Мир, 1982. 488 с.

Материал поступил в редколлегию 08.07.2010

V. V. Afonin, T. K. Boletskaya

EXPLOITATION OF WAVELET ANALYSIS FOR INVESTIGATION OF INTERMITTENCY IN DYNAMIC NONLINEAR SYSTEMS

The research of intermittency for one-dimensional quadratic map was carried out both in the absence of external noise and in the presence of white Gaussian noise. The dependences of average laminar phase's length on deviation value of parameter from the critical value were calculated by means of wavelet analysis.

Keywords: dynamic systems, one-dimensional maps, transition to chaos, intermittency, wavelet analysis.