

Институт теоретической  
и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН  
ул. Институтская, 4/1, Новосибирск, 630090, Россия

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН  
пр. Акад. Лаврентьева, 1, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: boiko@itam.nsc.ru; kulik@itp.nsc.ru

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ НАД ПОДАТЛИВЫМИ ПОКРЫТИЯМИ ПОВЫШЕННОЙ ПРОЧНОСТИ \*

В работе представлены результаты расчетов устойчивости пограничного слоя Блазиуса над однослойными податливыми покрытиями в рамках полной линейной задачи устойчивости (с полным учетом граничных условий) в плоскопараллельном приближении. Используются данные о поведении вязкоупругих свойств покрытий (модуль упругости и коэффициент потерь) в зависимости от частоты, полученные в процессе экспериментов. Определен диапазон значений параметров покрытий, при которых обеспечивается компромисс между их жесткостью и интенсивностью взаимодействия с течением. На основе  $e^n$ -метода сделаны оценки числа Рейнольдса перехода к турбулентности в пограничном слое.

*Ключевые слова:* податливые покрытия, пограничный слой, гидродинамическая неустойчивость.

### Введение

Идея снижения сопротивления трения с помощью податливых покрытий была подсмотрена у природы. Первые покрытия имитировали кожу дельфина и состояли из нескольких слоев [1; 2]. В дальнейшем получили распространение покрытия из одного слоя вязкоупругого материала или из слоя пористого материала, покрытого сверху тонкой эластичной пленкой. Это позволило в эксперименте широко варьировать свойства покрытия путем натяжения пленки в различных направлениях и пропитки поролона жидкостями различной вязкости. Обзоры результатов соответствующих теоретических и экспериментальных исследований по снижению турбулентного трения можно найти в обзорах [3; 4], в которых проанализированы в основном эксперименты с так называемыми «мягкими», податливыми покрытиями (например, желеобразные

материалы или упомянутые губки, покрытые пленкой).

В турбулентных потоках такие мягкие покрытия, как правило, приводят к увеличению сопротивления трения, так как на их поверхности возникают складки и бегущие волны [5]. Однако в области ламинарного течения в эксперименте и расчетах на определенных режимах было достигнуто существенное затягивание перехода к турбулентности [6–9], что опосредованно приводит к уменьшению сопротивления трения, так как коэффициенты ламинарного трения существенно ниже, чем для турбулентного потока.

В целом, потенциальная возможность существенного затягивания перехода к турбулентности в пограничном слое обтекаемых тел хорошо известна. Она основывается на том факте, что в пограничном слое турбулентность возникает в результате роста малых возмущений различной природы, ко-

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 10-08-00276-а.

торами можно управлять. Для этого используют как не прямые методы, воздействуя на средние характеристики течения в пограничном слое, так и методы, направленные на непосредственное подавление генерации и развития возмущений, приводящих к переходу. К последним относится и модификация устойчивости течения над податливыми поверхностями.

К настоящему времени существует большое количество работ по устойчивости пограничных слоев над различными идеализированными моделями вязкоупругих покрытий, см., например, [10–12]. Выделяют два общих подхода к построению соответствующих моделей. В одном из них покрытие представляется в виде армированной податливой стенки, состоящей из тонкой оболочки (пластины), закрепленной на подложке из равномерно или анизотропно расположенных пружин и демпферов [10]. Такой подход позволяет не рассматривать динамику возмущений внутри покрытия, а выписать дифференциальное уравнение импульсов для пластины, которое связывает возмущения давления в пограничном слое (определяемые из линеаризованных уравнений Навье – Стокса и уравнения неразрывности) со смещениями поверхности в вертикальном направлении. Для этого необходимо задать толщину пластины, ее плотность, изгибную жесткость (определяемую комплексным модулем упругости и коэффициентом Пуассона), удельную жесткость пружины и параметры анизотропии (если они есть). Смещениями точек пластины в направлении потока при этом пренебрегают. Ограничения этой модели достаточно хорошо исследованы (см., например, [13]). В частности отмечается, что такой подход справедлив лишь при длине волны возмущения много больше толщины пластины, что в свою очередь ограничивает применимость модели по числам Рейнольдса.

При другом подходе рассматривается полная динамика возмущений в системе, состоящей из вязкоупругого покрытия и жидкости, движущейся над ним [12]. Как и в предыдущем случае, развитие возмущений в потоке описывается линеаризованными уравнениями Навье – Стокса и неразрывности. В то же время волны внутри покрытия описываются динамическими линейными уравнениями теории упругости (уравнениями Навье), определяющими па-

раметрами в которых служат продольная и сдвиговая скорости распространения возмущений (выражающиеся через комплексный модуль упругости и коэффициент Пуассона). Такая модель свободна от недостатков предыдущего подхода, но при решении соответствующей задачи устойчивости требует больших вычислительных ресурсов, что долгое время было одним из лимитирующих факторов ее широкого использования. С развитием вычислительной техники и численных методов этот аспект в настоящее время не является существенным, а на первый план при попытках практического использования результатов задачи устойчивости выходит необходимость знания динамических вязкоупругих свойств покрытия.

Несмотря на отмеченную выше возможность варьирования в широких пределах вязкоупругих свойств покрытий в экспериментах, определение этих свойств в диапазоне частот важном для устойчивости течений до последнего времени не представлялось возможным. В частности, в [9] расчеты устойчивости проводились для предполагаемого покрытия, с тем чтобы максимально близко воспроизвести экспериментальные данные [8], так как измерений вязкоупругих свойств покрытия выполнено не было.

Все остальные расчеты устойчивости потоков над податливыми покрытиями до сих пор также выполнялись для модельных покрытий. Как правило, предполагается, что их вязкоупругие свойства описываются моделью Кельвина – Фойгта [12] в одномерной постановке, связывающей напряжения  $\tau$  и деформации  $\varepsilon$  в вязкоупругой среде следующим образом:

$$\tau(t) = E\varepsilon(t) + d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}.$$

Здесь  $E$  – вещественный модуль упругости, а  $d$  – вязкость. Таким образом, первое слагаемое призвано моделировать упругие, а второе – демпфирующие свойства материала. Рассматривая гармонические возмущения

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \exp(-i\omega t),$$

модельное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\tau_\omega}{\varepsilon_0} = E - i\omega d = E \left( 1 - i \frac{\omega d}{E} \right) = E(1 - i\mu),$$

где  $\mu = \omega d / E$  – так называемый коэффициент потерь. В этой модели должны быть заданы эмпирические зависимости  $E(\omega)$  и  $\mu(\omega)$  в существенном для исследования устойчивости диапазоне частот. Например, в работе [12] при отсутствии экспериментальных данных они полагались константами, не зависящими от частоты.

Поэтому наиболее обоснованным в настоящее время можно считать определение требуемых зависимостей с помощью эмпирических или полуэмпирических формул, аппроксимирующих экспериментальные данные. Вместе с тем такие данные были получены лишь в последние годы для некоторых материалов, перспективных с точки зрения их применимости на практике в качестве вязкоупругих покрытий (для кремнийорганических резин) [14–16]. Перспективность таких покрытий определяется прежде всего тем, что они обладают достаточной жесткостью (порядка 1 МПа).

В связи с вышеизложенным в данной работе представлены результаты расчетов устойчивости пограничного слоя Блазиуса над монолитными податливыми покрытиями в рамках полной (с полным учетом граничных условий) линейной задачи устойчивости в плоскопараллельном приближении. Используются данные о поведении вязкоупругих свойств покрытий в зависимости от частоты (модуле упругости и коэффициенте потерь), полученные в ходе экспериментов [14–16]. Для проведения расчетов эти данные были сглажены и аппроксимированы аналитическими функциями.

Определен диапазон значений параметров покрытий, при которых обеспечивается компромисс между их жесткостью и интенсивностью взаимодействия с течением в пограничном слое. Проведенный анализ позволяет объяснить сравнительно небольшой эффект, полученный предшественниками в экспериментах с жесткими податливыми покрытиями.

### Теория

После линеаризации двумерные линеаризованные уравнения Навье – Стокса в декартовых координатах в предположении квазипараллельности линий тока основного потока принимают вид [17]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} v &= -\frac{1}{\rho_{\text{ж}}} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_{\text{ж}}} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\bar{U}$  – зависящее от  $x$  и  $y$  распределение скорости основного потока в двумерном пограничном слое;  $u, v, p$  – также зависящие от  $x$  и  $y$  распределения продольной и нормальной к стенке скоростей возмущений и давление, вызванное возмущениями; соответственно  $x$  и  $y$  – продольная и нормальная к стенке декартовы координаты;  $\nu$  – вязкость;  $\rho_{\text{ж}}$  – плотность жидкости.

Распространение малых возмущений в податливом покрытии описывается, в свою очередь, уравнениями Навье, которые в декартовых координатах имеют вид [18]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= C_T^2 \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) + (C_T^2 - C_L^2) \frac{\partial \Delta}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= C_T^2 \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + (C_T^2 - C_L^2) \frac{\partial \Delta}{\partial y}, \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Величина  $C_T$  имеет смысл скорости поперечной волны или волны сдвига в покрытии, а  $C_L$  – скорости продольной волны. Введем характерные масштабы длины  $L$  и скорости  $\bar{U}_0$  и нормируем  $x, y, \xi, \eta$  на  $L$ , скорости  $C_T, C_L, u, v$  на  $\bar{U}_0$  и давление  $p$  на  $\rho \bar{U}_0^2$ . Если использовать те же обозначения для координат, скоростей и давления, что и в размерных уравнениях, вид безразмерных уравнений Навье не изменится, а уравнения Навье – Стокса примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} v &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\text{Re} = \bar{U}_0 L / \nu$  – число Рейнольдса.

Нормированные скорости  $C_T$  и  $C_L$  можно связать с модулями объемной деформации  $K$  и сдвига  $G$  как

$$C_T = \frac{1}{\bar{U}_0} \sqrt{\frac{G}{\rho_n}},$$

$$C_L = \frac{1}{\bar{U}_0} \sqrt{\frac{3K + 4G}{3\rho_n}},$$

где  $\rho_n$  – плотность материала покрытия. Так как распространение возмущений сопровождается их затуханием,  $C_T$  и  $C_L$ , а значит,  $K$  и  $G$  – комплексные величины. Будем предполагать, что затухание продольных и сдвиговых волн происходит по одному закону, т. е. отношение  $C_L/C_T$  является вещественной величиной, и, следовательно, коэффициент Пуассона  $\sigma$  – тоже вещественная величина (что для рассматриваемых ниже резин с хорошей точностью подтверждается по меньшей мере до частот в несколько сотен Герц экспериментами [15]). В частности, используемые в экспериментах кремнийорганические резины имеют коэффициент Пуассона 0,47–0,48 [15], при этом  $C_L/C_T = 4,2 - 5,1$ . Полагая  $\sigma$  вещественной величиной, нормированные скорости распространения возмущений можно выразить через комплексный модуль упругости (модуль растяжения)  $E^* = E(1 - i\mu)$  как

$$C_T = \frac{1}{\bar{U}_0} \sqrt{\frac{E^*}{2\rho_n(1 + \sigma)}},$$

$$C_L = \frac{1}{\bar{U}_0} \sqrt{\frac{E^*}{\rho_n(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}}.$$

Предположим, что возмущения в потоке и покрытия можно представить в виде суперпозиции бегущих волн, имеющих фиксированные частоту  $\omega$  и продольное волновое число  $\alpha$ :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} (x, y, t) = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{p} \\ \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} (y) \exp[i(\alpha x - \omega t)].$$

Подстановка этого выражения для волн в уравнения Навье и Навье – Стокса приводит соответственно к следующим системам обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\omega^2 \hat{\xi} + c_T^2 (-\alpha^2 \hat{\xi} + \hat{\xi}''') + (C_L^2 - C_T^2) \frac{\partial \hat{\Delta}}{\partial x} = 0,$$

$$\omega^2 \hat{\eta} + c_T^2 (-\alpha^2 \hat{\eta} + \hat{\eta}''') + (C_L^2 - C_T^2) \frac{\partial \hat{\Delta}}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где  $\hat{\Delta} = i\alpha \hat{\xi} + \hat{\eta}'$ , и

$$i(\alpha \bar{U} - \omega) \hat{u} + \bar{U}' \hat{v} + i\alpha \hat{p} - \frac{1}{\text{Re}} [\hat{u}'' - (\alpha^2 + \beta^2) \hat{u}] = 0,$$

$$i(\alpha \bar{U} - \omega) \hat{v} + \hat{p}' - \frac{1}{\text{Re}} [\hat{v}'' - (\alpha^2 + \beta^2) \hat{v}] = 0, \quad (2)$$

$$i\alpha \hat{u} + \hat{v}' = 0,$$

где штрихи означают дифференцирование по  $y$ .

Разберемся теперь с граничными условиями, рассмотрев случай пограничного слоя над покрытием, имеющим толщину  $h$ , которое приклеено к твердому основанию (рис. 1). Кинематические условия прикрепления покрытия к основанию и затухания возмущений во внешнем потоке сводятся к следующему:

$$\hat{\xi}(y = -h) = \hat{\eta}(y = -h) = 0,$$

$$\hat{u}(y \rightarrow \infty) = \hat{v}(y \rightarrow \infty) = 0. \quad (3)$$

Между покрытием и жидкостью должны выполняться условия прилипания:

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|_{(x,0)} = U(x + \xi, \eta, t),$$

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial t} \right|_{(x,0)} = V(x + \xi, \eta, t),$$

где  $U = \bar{U} + u$  и  $V = \bar{V} + v$ . Для постановки этих условий в расчетах необходимо знать форму поверхности, что существенно усложняет задачу. Поскольку используемое приближение линейное, будем считать, что смещения поверхности малы. Это легко позволяет получить приближенные условия. Разложение в ряд Тейлора около невозмущенного положения дает

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = U(x, 0, z, t) + \xi \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{y=0} + \eta \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} + \dots,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = V(x, 0, z, t) + \xi \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{y=0} + \eta \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{y=0} + \dots,$$

Так как смещения  $\xi$  вдоль оси  $x$  малы и производные от компонент скорости основного потока по  $x$  также малы (в соответствии с предположением о квазипараллельности линий тока основного потока), можно опустить вторые слагаемые в правых частях разложения. Учитывая, что в квазипараллельном приближении можно также пренебречь  $\bar{V}$ , и, отделяя условия для среднего потока и оставляя только линейные члены,

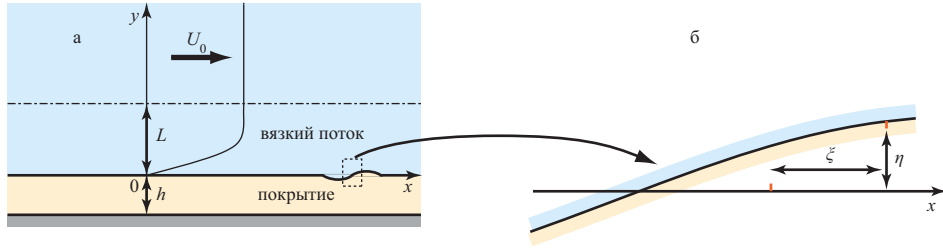


Рис. 1. К постановке граничных условий: схема течения (а) и поверхности раздела между покрытием и потоком (б)

получим уравнения для возмущений на границе

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = u + \eta \bar{U}', \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = v,$$

откуда

$$-i\omega \hat{\xi} = \hat{u} + \hat{\eta} \bar{U}', \quad -i\omega \hat{\eta} = \hat{v}. \quad (4)$$

Динамические условия состоят в требовании непрерывности полных нормальных и касательных напряжений между покрытием и жидкостью:

$$(\mathbf{T}_n)_{y=0} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}_j(x + \xi, \eta) \cdot \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n} = (-\partial \eta / \partial x, 1 + \partial \xi / \partial x)$  – нормаль к касательной поверхности  $(1 + \partial \xi / \partial x, \partial \eta / \partial x)$  в точке границы  $(x + \xi, \eta)$ , а  $\mathbf{T}$  – полный тензор напряжений, имеющий в плоских декартовых координатах компоненты  $T_x$ ,  $T_{xy}$  и  $T_y$  [18; 19]. Разложение тензора напряжений в ряд Тейлора около невозмущенного положения  $(x, 0)$  дает [12]

$$\begin{aligned} & \left( \bar{\mathbf{T}}_n \Big|_{(x,0)} + \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}_n}{\partial x} \Big|_{(x,0)} \xi + \tau_n \Big|_{(x,0)} + \dots \right) \cdot \mathbf{n} = \\ & = \left( \bar{\mathbf{T}}_j \Big|_{(x+\xi,\eta)} + \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}_j}{\partial x} \Big|_{(x+\xi,\eta)} \xi + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}_j}{\partial y} \Big|_{(x+\xi,\eta)} \eta + \tau_j \Big|_{(x+\xi,\eta)} + \dots \right) \cdot \mathbf{n}, \end{aligned}$$

где  $\bar{\mathbf{T}}$  – тензор напряжений исходного равновесного положения, а  $\tau$  – тензор напряжений для возмущений. Отделяя условия для равновесного положения, оставляя только линейные члены и учитывая малость  $\xi$ , получим

$$\tau_n \Big|_{(x,0)} \cdot \mathbf{n} = \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}_j}{\partial y} \Big|_{(x+\xi,\eta)} \eta + \tau_j \Big|_{(x+\xi,\eta)} \right) \cdot \mathbf{n},$$

откуда

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{xy,n} \Big|_{(x,0)} &= \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}_{xy,j}}{\partial y} \Big|_{(x+\xi,\eta)} \hat{\eta} + \hat{\tau}_{xy,j} \Big|_{(x+\xi,\eta)} \right), \\ \hat{\tau}_{yy,n} \Big|_{(x,0)} &= \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}_{yy,j}}{\partial y} \Big|_{(x+\xi,\eta)} \hat{\eta} + \hat{\tau}_{yy,j} \Big|_{(x+\xi,\eta)} \right). \end{aligned}$$

Существенные в данном случае компоненты тензора для податливого покрытия имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{xy,p} &= \rho C_T^2 \left( \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} \right), \\ \hat{\tau}_{yy,p} &= 2\rho C_T^2 \left[ \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial y} + \left( \frac{c_L^2}{2c_T^2} - 1 \right) \hat{\Delta} \right], \end{aligned}$$

где  $\rho = \rho_n / \rho_j$ , а для ньютоновской (изотропной) жидкости

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{xy,j} &= \rho_j \nu \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right), \\ \hat{\tau}_{yy,j} &= 2\rho_j \nu \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} - \hat{p}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}_{xy,j}}{\partial y} &= \rho_j \nu \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}_{yy,j}}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем окончательно

$$\begin{aligned} 2\rho C_T^2 \left[ \hat{\eta}' + \left( \frac{C_L^2}{2C_T^2} - 1 \right) \hat{\Delta} \right] &= \frac{2}{\text{Re}} \hat{v}' - \hat{p}_0, \\ \rho C_T^2 (\hat{\xi}' + i\alpha \hat{\eta}) &= \frac{1}{\text{Re}} (\hat{u}' + i\alpha \hat{v} + \bar{U}'' \hat{\eta}). \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим также, что для пограничного слоя Блазиуса, рассматриваемого ниже,  $\bar{U}'' = 0$ .

Хотя в дальнейших расчетах использовались граничные условия вида (5), опреде-

ленный интерес представляет рассмотрение некоторых специальных случаев. В частности, если  $Re \gg 1$ , то первые слагаемые в правых частях (5) можно опустить, откуда следует, что основная связь между колебаниями в контактирующих средах осуществляется в этом случае через пульсации давления. Более того, если покрытие достаточно жесткое, члены, зависящие от продольной деформации  $\hat{\xi}$ , тоже можно опустить, так что динамические граничные уравнения принимают вид

$$\hat{\eta}' \approx -\frac{\hat{p}_0}{\rho C_L^2}, \quad \hat{\eta} \approx 0.$$

Так как  $C_L$  и  $\hat{p}_0$  – комплексные величины, отклик покрытия на возмущение давления происходит с некоторым сдвигом фазы, что в благоприятном случае и приводит к увеличению устойчивости возмущения. Видно, что член с правой стороны первого уравнения и соответственно взаимодействие велики, если безразмерные величины  $\rho$  и  $C_L$  малы, т. е. влияние податливых покрытий при прочих равных условиях в наибольшей степени проявляется в плотных жидкостях при больших скоростях набегающего потока.

В данной работе используется следующее определение числа Рейнольдса:

$$Re = \frac{\delta^* \bar{U}_0}{\nu},$$

где в качестве масштаба длины выбрана толщина вытеснения пограничного слоя

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\bar{U}}{\bar{U}_0}\right) dy.$$

Так как  $\delta^*$  увеличивается в пограничном слое Блазиуса вниз по потоку  $\sim \sqrt{x}$ , то соответственно относительная толщина покрытия уменьшается тоже  $\sim \sqrt{x}$ . Поэтому для перемасштабирования в расчетах толщины покрытия при различных  $Re$  использовалось число Рейнольдса покрытия

$$Re_{\pi} = \frac{h \bar{U}_0}{\nu}.$$

### Численный метод

Уравнения (1) и (2) с граничными условиями (3)–(5) формируют обобщенную задачу на собственные значения  $\alpha$ , которую можно решать стандартными методами ли-

нейной алгебры. После обрывания расчетной области потока по координате  $y$  на некотором расстоянии вдали от стенки,  $y_{\max} \gg \delta^*$ , использовался метод коллокаций, в котором в качестве узлов интерполяции выбраны корни полиномов Чебышева второго рода и точки  $\pm 1$  (точки Гаусса – Лобатто). Отображение области  $\zeta \in [-1; +1]$  на физическую область, занятую потоком  $y \in [0; y_{\max}]$ , осуществлялось с помощью преобразования координат

$$y = l \frac{1 + \zeta}{b - \zeta},$$

где  $l$  – масштабный множитель, а  $b = 1 + 2l / y_{\max}$  – подстроечная константа для контроля распределения узлов дискретизации. Отображение области  $\zeta \in [-1; +1]$  на физическую область, занятую покрытием  $y \in [-h; 0]$ , осуществлялось преобразованием

$$y = \frac{h}{2} (\zeta - 1).$$

Более детальное описание этого метода, а также использованного метода расчета профиля пограничного слоя Блазиуса дано в [17]. Ниже приведены данные для  $N = 70$  узлов в каждой области (для потока и в покрытии),  $y_{\max} = 20$ ,  $b = 2,86$ . Ранее данный подход многократно использовался при решении задач линейной устойчивости различными авторами и показал хорошую точность результатов уже при числе узлов  $N = 40$ – $100$  при числах Рейнольдса, актуальных для ламинарно-турбулентного перехода (для поддержания точности с увеличением числа Рейнольдса требуется больше узлов), что обеспечивает возможность решения на ПК без дополнительных ухищрений стандартными пакетами линейной алгебры.

В полученную задачу на собственные значения параметр  $\alpha$  входит нелинейным образом:

$$(\alpha^2 A + \alpha B + C) \hat{q} = 0.$$

Здесь  $\hat{q} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{p}, \hat{\xi}, \hat{\eta})^T$ , а  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – квадратные матрицы с размерностью  $5N \times 5N$ . Задача сводится к линейной обобщенной задаче на собственные значения с помощью введения вспомогательных переменных. В частности, степень  $\alpha$  в (2) можно понизить стандартным способом введением вспомогательных переменных  $\hat{g} = \alpha \hat{\xi}$ ,  $\hat{h} = \alpha \hat{\eta}$  и

формированием сопровождающей матрицы вдвое большей размерности [20]. В системе (1) более оптимально, с точки зрения размерности получающихся матриц, применить подстановку, используя уравнение неразрывности, приводящую первое уравнение к виду

$$i(\alpha U - \omega)\hat{u} + U'\hat{v} + i\alpha\hat{p} - \frac{1}{\text{Re}}(\hat{u}'' - i\alpha\hat{v}') = 0.$$

Теперь, с введением новой переменной  $\hat{f} = \alpha\hat{v}$ , система уравнений (1) преобразуется в следующую систему:

$$i(\alpha U - \omega)\hat{u} + U'\hat{v} + i\alpha\hat{p} - \frac{1}{\text{Re}}(\hat{u}'' - i\alpha\hat{v}') = 0,$$

$$i(\alpha U - \omega)\hat{v} + \hat{p}' - \frac{1}{\text{Re}}(\hat{v}'' - \alpha\hat{f}) = 0,$$

$$i\alpha\hat{u} + \hat{v}' = 0,$$

$$\alpha\hat{v} - \hat{f} = 0.$$

После дискретизации соответствующая полная система уравнений принимает вид линейной обобщенной задачи на собственные значения

$$F\hat{s} = \alpha D\hat{s},$$

в которой матрицы  $D$  и  $F$  имеют размерность  $8N \times 8N$ , а  $\hat{s} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{p}, \hat{f}, \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{g}, \hat{h})^T$ .

В интерфейсные условия при  $y=0$  параметр  $\alpha$  входит линейно, поэтому их наложение не представляет дополнительных трудностей. Наложение однородных граничных условий при  $y=-h$  и  $y=y_{\text{макс}}$  сводится к удалению соответствующих столбцов и строк в матрицах  $D$  и  $F$ .

Полученная задача на собственные значения решалась с помощью QZ-алгоритма [21] в среде MATLAB. В результате получается спектр собственных значений матричного пучка  $(F, D)$ , из которого моды, соответствующие физической задаче, выбирались по их сходимости к фиксированным значениям при увеличении  $N$ . Из них далее выбиралась ведущая мода (с минимальной мнимой частью  $\alpha_i$ ), соответствующая распространяющемуся вниз по потоку возмущению (с положительной фазовой скоростью). В области неустойчивости эта мода, как правило (в отсутствие других неустойчивостей), соответствует волне Толлмина – Шлихтинга. В данном случае помимо неустойчивости волны Толлмина – Шлихтинга возможно появление неустойчивостей, связанных с покрытием и характеризующих,

например, возникновение волн на его поверхности [12]. Такие ситуации отслеживались подсчетом всех физически значимых возмущений с отрицательной мнимой частью  $\alpha_i$ .

### Использованные экспериментальные данные

В данной работе использованы экспериментальные данные по динамическим вязкоупругим свойствам силиконовой резины Silastic S-2 (фирма-производитель «Dow Corning»), которые детально исследовались в серии работ [14–16]. Модуль упругости  $E$  этих резин можно менять в определенных пределах, изменяя количество катализатора. Кроме того, со временем в процессе старения коэффициент потерь  $\mu$  резин уменьшается. Вместе с тем в интересующем нас диапазоне частот поведение величин  $E(\omega)$  и  $\mu(\omega)$  во всех случаях остается сходным в том смысле, что кривые можно наложить друг на друга с достаточно хорошей точностью параллельным переносом вдоль оси ординат. Знание общего вида этих зависимостей позволяет определять без проведения предварительных дорогостоящих экспериментов требуемые свойства податливых покрытий для последующего изготовления и проведения целенаправленных тестов.

Типичные результаты измерений для одного и того же материала представлены на рис. 2 символами. Видно, что модуль упругости увеличивается почти в два раза на участке от 40 Гц до 2,5 кГц, причем этот рост близок к линейному, если использовать логарифмическую шкалу по горизонтальной оси. Коэффициент потерь меняется значительно слабее: его отклонения не превышают 15 % от среднего в указанном диапазоне частот. Интерполяции приведенных зависимостей методом наименьших квадратов эмпирическими формулами

$$E_0(f) = (0,287 \log f - 0,036) \cdot 10^6 \text{ Па}, \quad (6)$$

$$\mu_0(f) = 0,358 \quad (7)$$

показаны на рис. 2 линиями.

Для дальнейших расчетов необходимо также задать коэффициент Пуассона  $\sigma$ , безразмерную толщину покрытия  $\text{Re}_n$ , отношение плотности покрытия к плотности жидкости  $\rho$  и размерную скорость набегающего

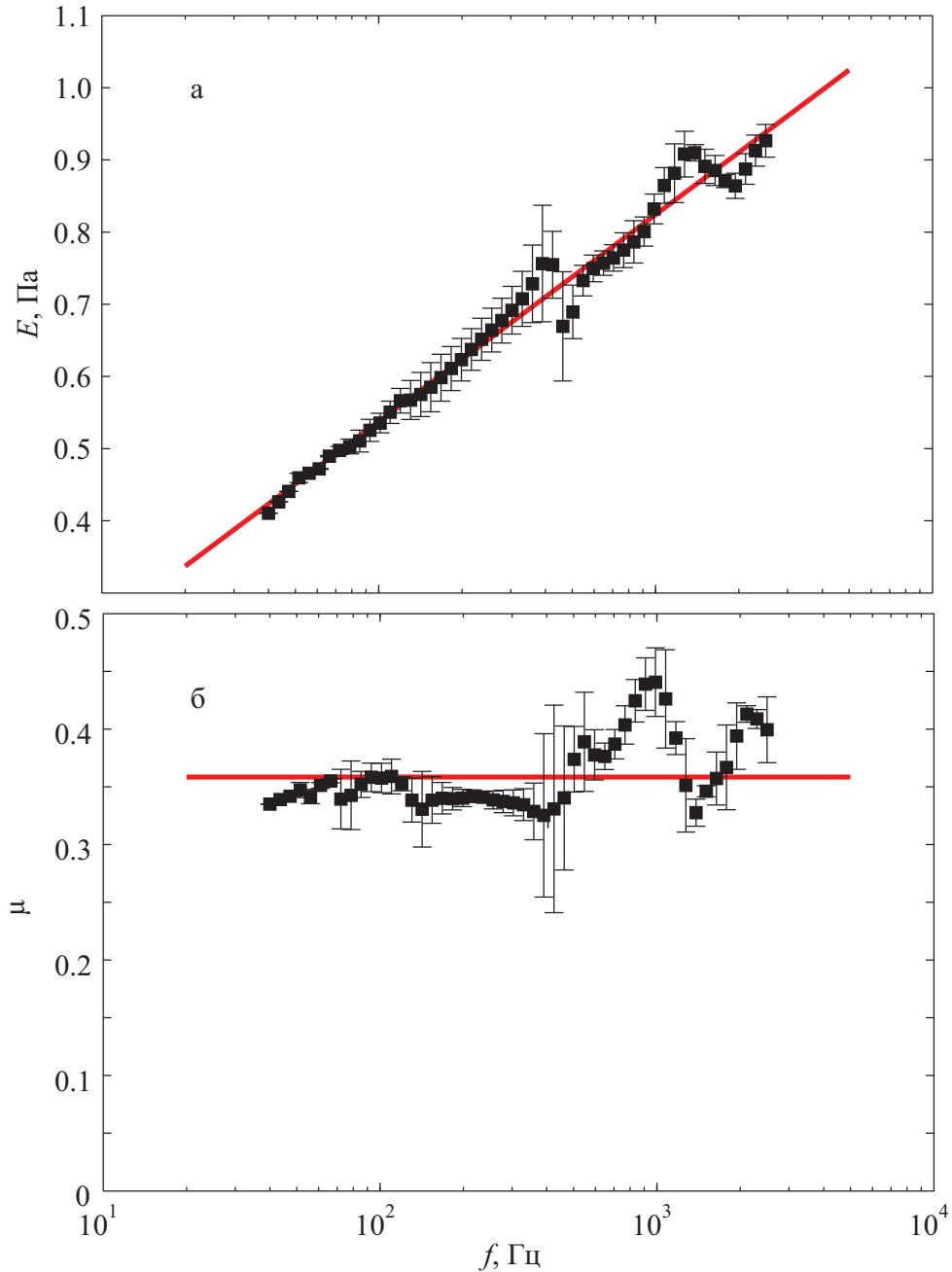


Рис. 2. Используемые экспериментальные (■) данные и аппроксимирующие зависимости (линии) по зависимости модуля упругости (а) и коэффициента потерь (б) от частоты. Среднеквадратичные отклонения показаны вертикальными чертами

потока  $\bar{U}_0$ , которая требуется для нормировки скоростей распространения волн в покрытии  $C_T$  и  $C_L$ . В [15] показано, что для различных резин на основе Silastic S-2 коэффициент Пуассона  $\sigma \approx 0,48$  и практически не зависит от частоты, по крайней мере в диапазоне частот от 50 до 350 Гц, поэтому эта величина принята во всех расчетах. Из оценок, приведенных ниже, следует, что

плотность жидкости должна быть того же порядка, что и у резин. Плотность резин составляла  $1100 \text{ кг/м}^3$ , что лишь немногим больше плотности воды. Поэтому расчеты проводились для отношения плотностей  $\rho = 1,1$ .

При этих параметрах размерная скорость

$$C_T = \sqrt{\frac{E^*}{2\rho_n(1+\sigma)}}$$



для данных, приведенных на рис. 2, составляет примерно 12 м/с на частоте 50 Гц и увеличивается до 18 м/с к частоте 2,5 кГц. Из предыдущих исследований [22; 23] известно, что при близких скоростях  $C_T$  и  $\bar{U}_0$ , взаимодействие между колебаниями в покрытии и пограничном слое максимальное. Отметим, что эти скорости также характерны для реальных судов. Поэтому ниже для сравнения будут представлены результаты для скоростей  $\bar{U}_0 = 10, 15$  и 20 м/с и анализ оптимальной толщины покрытия.

Диапазон неустойчивых частот при малых числах Рейнольдса зависит от свойств покрытия и скорости потока. При определенных значениях этих параметров верхний предел этого диапазона превышает 2 500 Гц (см. рис. 2). В этом случае использовалась экстраполяция зависимости  $E_0(f)$  по формулам (6) и (7). В то же время при числах Рейнольдса, на которых можно ожидать возникновения ламинарно-турбулентного перехода, нижний предел варьируется от нескольких сотен Герц и выше, т. е. соответствует области, где коэффициент потерь меняется слабо.

В связи с отмеченным выше подобием экспериментальных данных для различных резин модули упругости варьировались в расчетах по формуле

$$E(f) = kE_0(f),$$

где коэффициент  $k$  менялся в пределах [0,3; 1,1]. Так как в рассматриваемом диапазоне частот коэффициент потерь меняется слабо, в расчетах он полагался постоянным, при этом рассматривались покрытия с  $\mu \in [0,1; 0,4]$ .

### Результаты расчетов

Примеры кривых нейтральной устойчивости, полученных при некоторых параметрах рассматриваемых покрытий и  $\bar{U}_0 = 20$  м/с, показаны на рис. 3. Области внутри этих кривых соответствуют неустойчивому течению, а вне кривых – устойчивому. Видно, что в зависимости от этих параметров критические числа Рейнольдса  $Re_{крит}$  могут быть как больше, так и меньше, чем  $Re_{крит}^0 = 520$  для жесткой стенки. Кроме того, в случаях, когда  $Re_{крит} > Re_{крит}^0$ ,

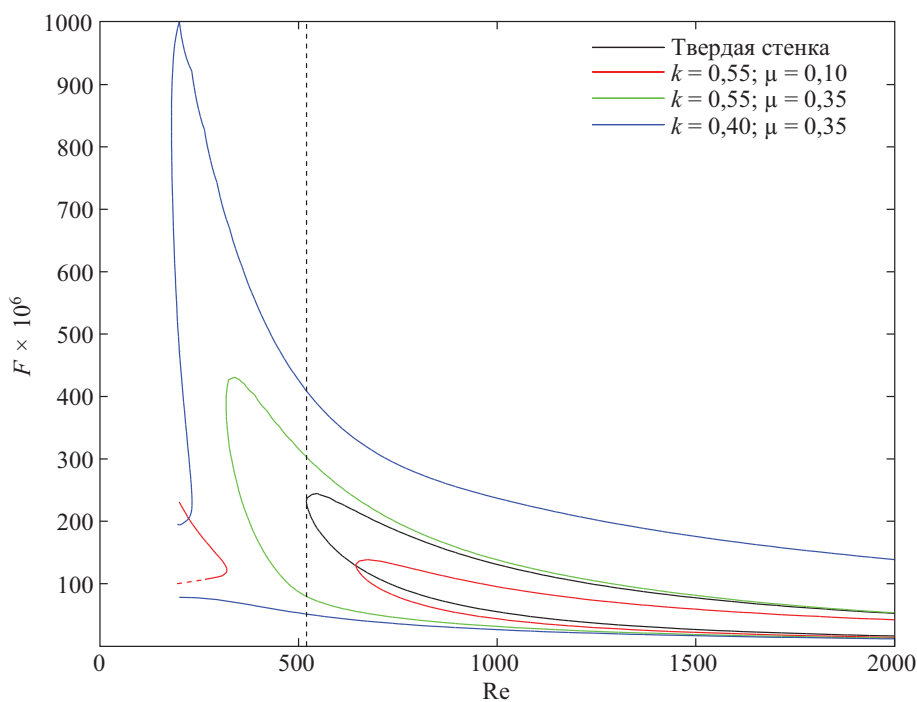


Рис. 3. Примеры нейтральных кривых при  $Re_n = 2 \cdot 10^4$  и различных параметрах вязкоупругости покрытий и  $\bar{U}_0 = 20$  м/с

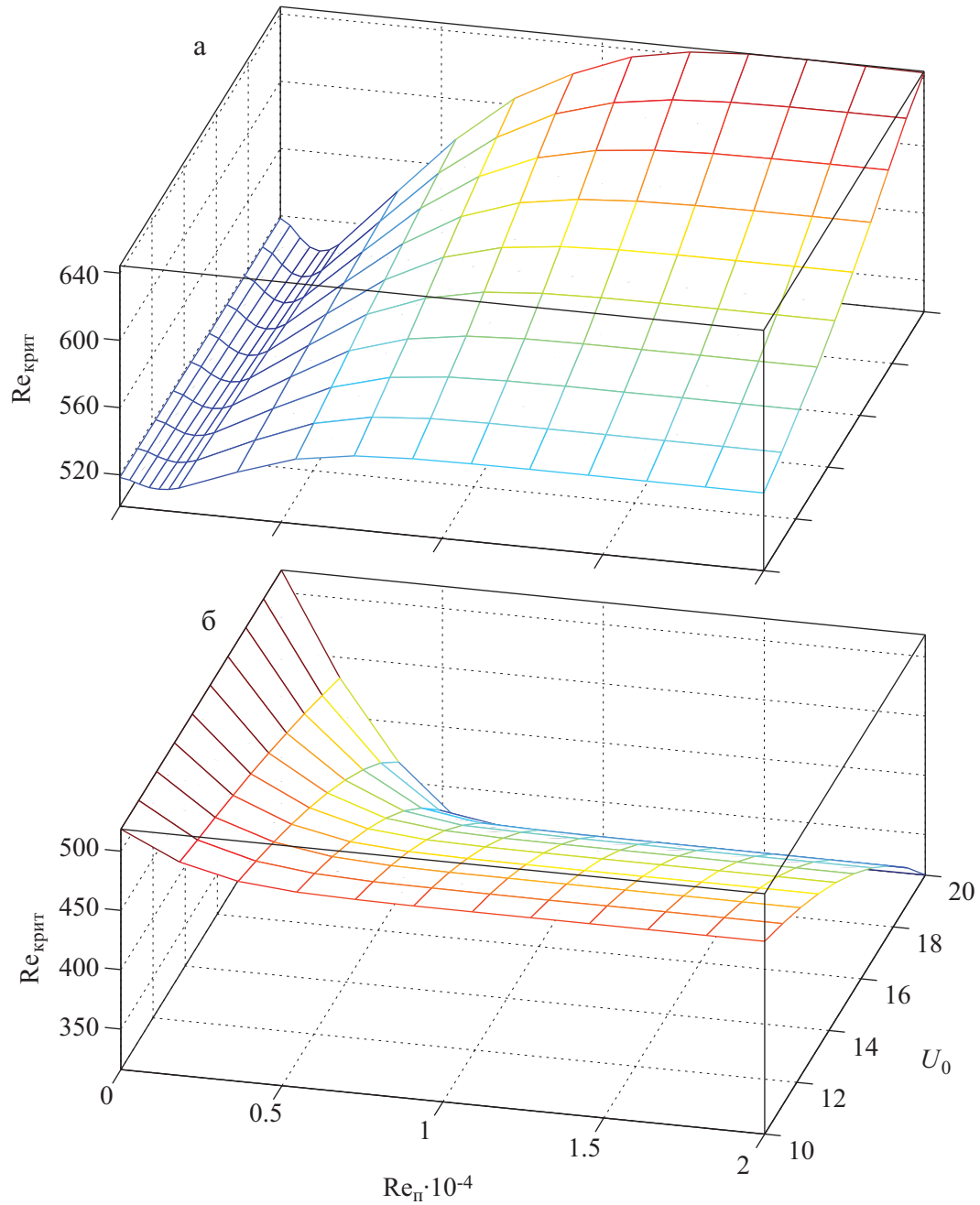


Рис. 4. Зависимость  $Re_{крит}$  от толщины покрытия и скорости потока при  $k = 0,55$ : для  $\mu = 0,10$  (а) и  $\mu = 0,35$  (б)

частота  $F_{крит}$ , соответствующая  $Re_{крит}$ , и диапазон частот, при которых возникают неустойчивые возмущения, уменьшаются. Наоборот, в случаях, когда  $Re_{крит} < Re_{крит}^0$ , диапазон частот, при которых возникают неустойчивые возмущения, увеличивается, а частота, соответствующая  $Re_{крит}$ , становится выше. Кроме того, существуют режимы, в

которых при низких числах Рейнольдса формируется еще одна область неустойчивости, отсутствующая в пограничном слое над твердой стенкой и, таким образом связанная с податливостью покрытия. Она может как отделяться, так и сливаться с основной нейтральной кривой. Однако при малых числах Рейнольдса предположение квазипараллельности линий тока у стенки перестает

работать, поэтому эта область требует дополнительного специального рассмотрения, которое не является темой данной статьи. В целом, показанные на рис. 3 кривые демонстрируют особенности устойчивости, наблюдаемые при различных скоростях  $\bar{U}_0$ .

Ниже представлены результаты решения задачи о нахождении так называемого критического числа Рейнольдса  $Re_{\text{крит}}$  линейной теории устойчивости в зависимости от частоты возмущения, т. е. минимального числа Рейнольдса, при котором существует нейтральное возмущение в заданном диапазоне частот и чисел Рейнольдса. Поиск  $Re_{\text{крит}}$  осуществлялся в диапазоне  $Re \in [200; 2000]$  и частотных параметров, обычно используемых при описании устойчивости пограничного слоя  $F = \omega / Re \in [50 \cdot 10^6; 1000 \cdot 10^6]$ . Особенность рассматриваемой задачи – большое количество определяющих параметров, от которых может зависеть результат расчетов  $Re_{\text{крит}}$ . Часть из них зафиксирована выше. Отдельный интерес представляет исследование влияния толщины покрытия на  $Re_{\text{крит}}$ .

Типичные результаты соответствующих расчетов в диапазоне  $\bar{U}_0 = 10\text{--}20$  м/с и безразмерной толщины покрытия  $Re_{\text{п}} = 0\text{--}2 \cdot 10^4$  показаны на рис. 4 для модуля упругости, соответствующего  $k = 1$ , и двух различных значений коэффициентов потерь  $\mu = 0,4$  и  $\mu = 0,1$ . Как и ожидалось, при малой толщине покрытия величина  $Re_{\text{крит}}$  близка к величине  $Re_{\text{крит}}^0 = 520$  для пограничного слоя над жесткой стенкой. С увеличением толщины покрытия  $Re_{\text{крит}}$  отклоняется от  $Re_{\text{крит}}^0$  и при  $Re_{\text{п}} \approx 10^4$  выходит на насыщение.

Сходные результаты получены и при других комбинациях модулей упругости и коэффициентов потерь из рассмотренного диапазона. Основное отличие полученных зависимостей состоит в том, что с увеличением  $Re_{\text{п}}$  при больших коэффициентах потерь  $Re_{\text{крит}}$  монотонно уменьшается (до выхода на насыщение), а при меньших вначале испытывает небольшое уменьшение, и лишь потом увеличивается и выходит на насыщение. Такое немонотонное поведение объяс-

няется, видимо, большой ролью резонансных явлений, связанных с распространением волн в покрытиях малой толщины [22; 23]. При фиксированной толщине покрытия влияние на критическое число Рейнольдса тем больше, чем больше скорость потока (по крайней мере в приведенном диапазоне скоростей). Отношение  $Re_{\text{п}} / Re_{\text{крит}} = h / \delta^*$  характеризует толщину покрытия относительно толщины вытеснения в точке потери устойчивости. Таким образом, насыщение в обоих случаях наступает при  $h / \delta^* \approx 15\text{--}25$ . При дальнейшем увеличении толщины покрытия величина  $Re_{\text{крит}}$  перестает зависеть от  $h$ . Поэтому все дальнейшие расчеты проводились при  $Re_{\text{п}} = 2 \cdot 10^4$ .

Итак, рассмотрим зависимость  $Re_{\text{крит}}$  от  $E$ ,  $\mu$  и  $\bar{U}_0$ . Соответствующие графики  $Re_{\text{крит}}(E_{\text{крит}}, \mu)$  при трех скоростях потока  $\bar{U}_0$  приведены на рис. 5. Здесь  $E_{\text{крит}}$  – модуль упругости на частоте возмущений, при которой происходит потеря устойчивости. Для сравнения показана также горизонтальная плоскость при  $Re_{\text{крит}} = Re_{\text{крит}}^0 = 520$ , характеризующая критическое число Рейнольдса пограничного слоя на твердой плоской пластине. Как уже было отмечено, с уменьшением коэффициента потерь критическое число Рейнольдса возрастает, причем кривые, показанные на рис. 5 сплошными линиями, разделяющие области уменьшения и увеличения  $Re_{\text{крит}}$ , довольно слабо зависят от  $E_{\text{крит}}$  и проходят вблизи  $\mu = 0,15\text{--}0,18$ .

Эта зависимость становится несколько более выраженной с увеличением скорости потока при малых величинах  $E_{\text{крит}}$ , хотя проследить ее становится труднее. Это связано с тем, что при больших скоростях потока с уменьшением  $E_{\text{крит}}$ , не удастся определить  $Re_{\text{крит}}$  из-за наличия второй области неустойчивости при малых числах Рейнольдса, как было показано на рис. 3. При скорости потока  $\bar{U}_0 = 20$  м/с вторая мода неустойчивости начинает проявляться при  $k \approx 0,4$  ( $E_{\text{крит}} \approx 0,4\text{--}0,6$  МПа), поэтому данные для более мягких покрытий на рис. 3 не отражены, так как они не представляют

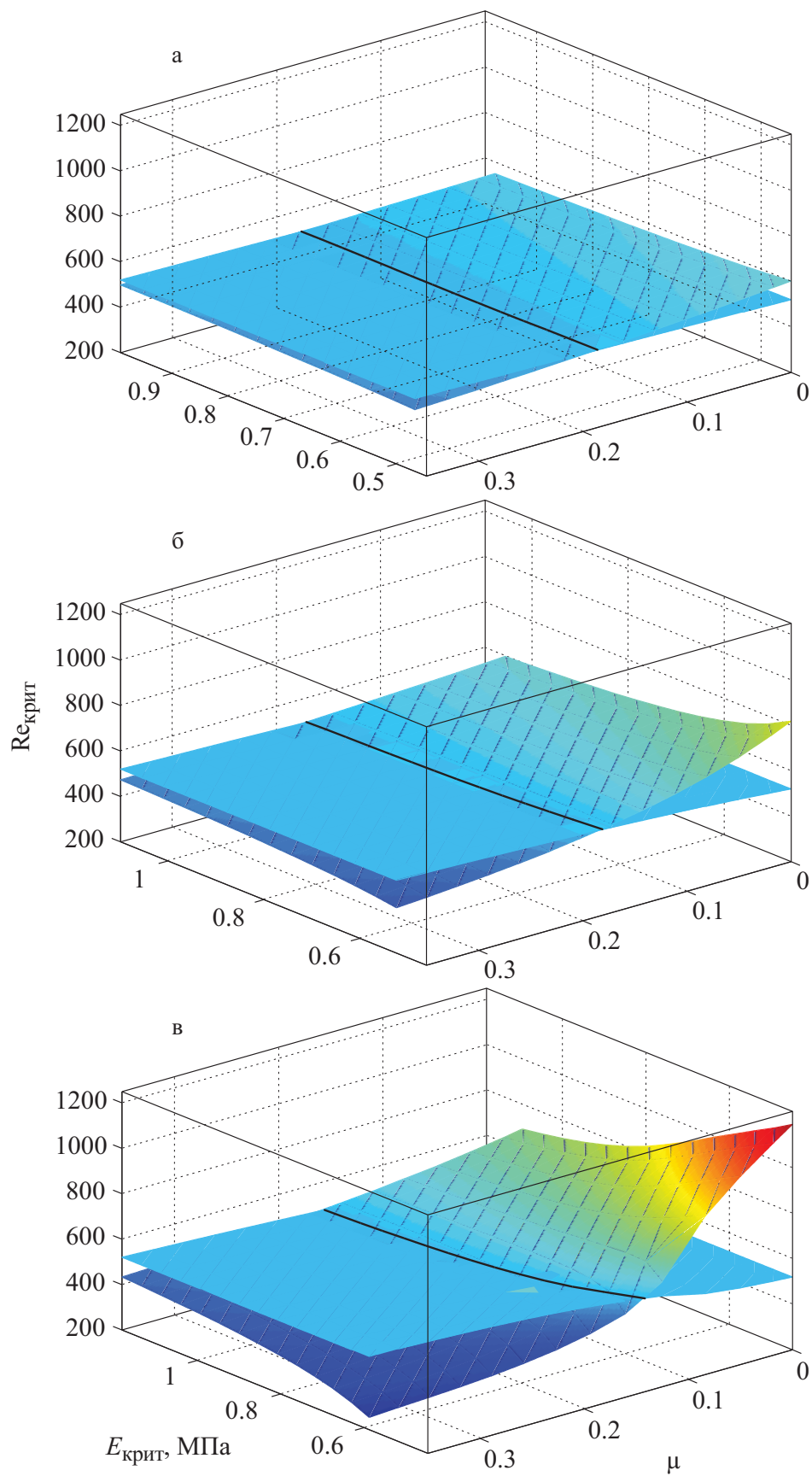


Рис. 5. Зависимость  $Re_{крит}$  от свойств покрытий при скоростях потока  $\bar{U}_0 = 10$  (а), 15 (б) и 20 (в) м/с

интереса с точки зрения затягивания перехода к турбулентности.

С ростом скорости потока  $\bar{U}_0$  эффект податливости становится более ярко выраженным. В частности, при скорости  $\bar{U}_0 = 10$  м/с удается повысить критическое число Рейнольдса в рассмотренном диапазоне параметров лишь с  $Re_{крит} \approx 520$  до  $Re_{крит} \approx 551-614$ , в то время как при  $\bar{U}_0 = 20$  м/с – до  $Re_{крит} \approx 693-1192$ , т. е.  $Re_{крит}$  можно увеличить более чем в два раза, хотя для этого потребуются экстремально низкая величина коэффициента потерь. С увеличением  $E_{крит}$  эффективность покрытий уменьшается.

Эти данные позволяют объяснить сравнительно небольшой эффект, полученный предшественниками в экспериментах с жесткими податливыми покрытиями. С одной стороны, необходимо повышать жесткость покрытий, чтобы избежать появления второй моды неустойчивости, а с другой – делать их достаточно мягкими и упругими для

получения заметного выигрыша в величине  $Re_{крит}$ . Без априорного знания вязкоупругих свойств используемых покрытий достичь оптимального результата практически невозможно.

Отметим, что без исследования величин коэффициентов нарастания  $-\alpha_i$  внутри нейтральной кривой, вообще говоря, нельзя сделать однозначный вывод о затягивании перехода к турбулентности при увеличении  $Re_{крит}$ , так как одновременно с этим не исключены ситуации, при которых  $-\alpha_i$  внутри области неустойчивости тоже возрастают. В связи с этим наиболее показательными, на наш взгляд, являются оценки влияния податливости покрытия на число Рейнольдса перехода  $Re_T$ , которые можно сделать на основе этих коэффициентов нарастания.

Как правило, при ламинарно-турбулентном переходе нелинейные процессы протекают столь быстро, что на большей части пограничного слоя до точки перехода (90–95 % его протяженности) имеет место

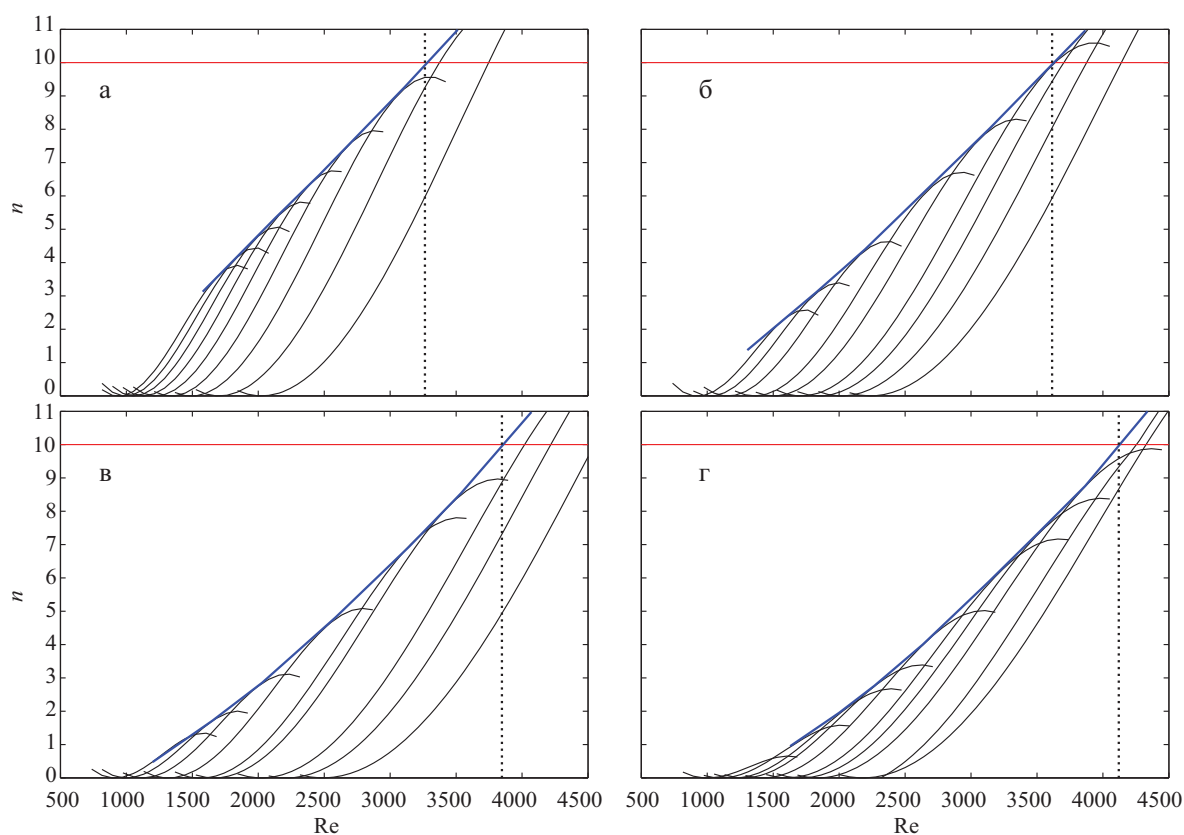


Рис. 6. Оценка положения перехода к турбулентности  $e^n$ -методом для пограничного слоя плоской пластины над твердой поверхностью (а) и при  $k = 0,47$ ;  $\mu = 0,05$ :  $\bar{U}_0 = 10$  (б), 15 (в), 20 (г) м/с

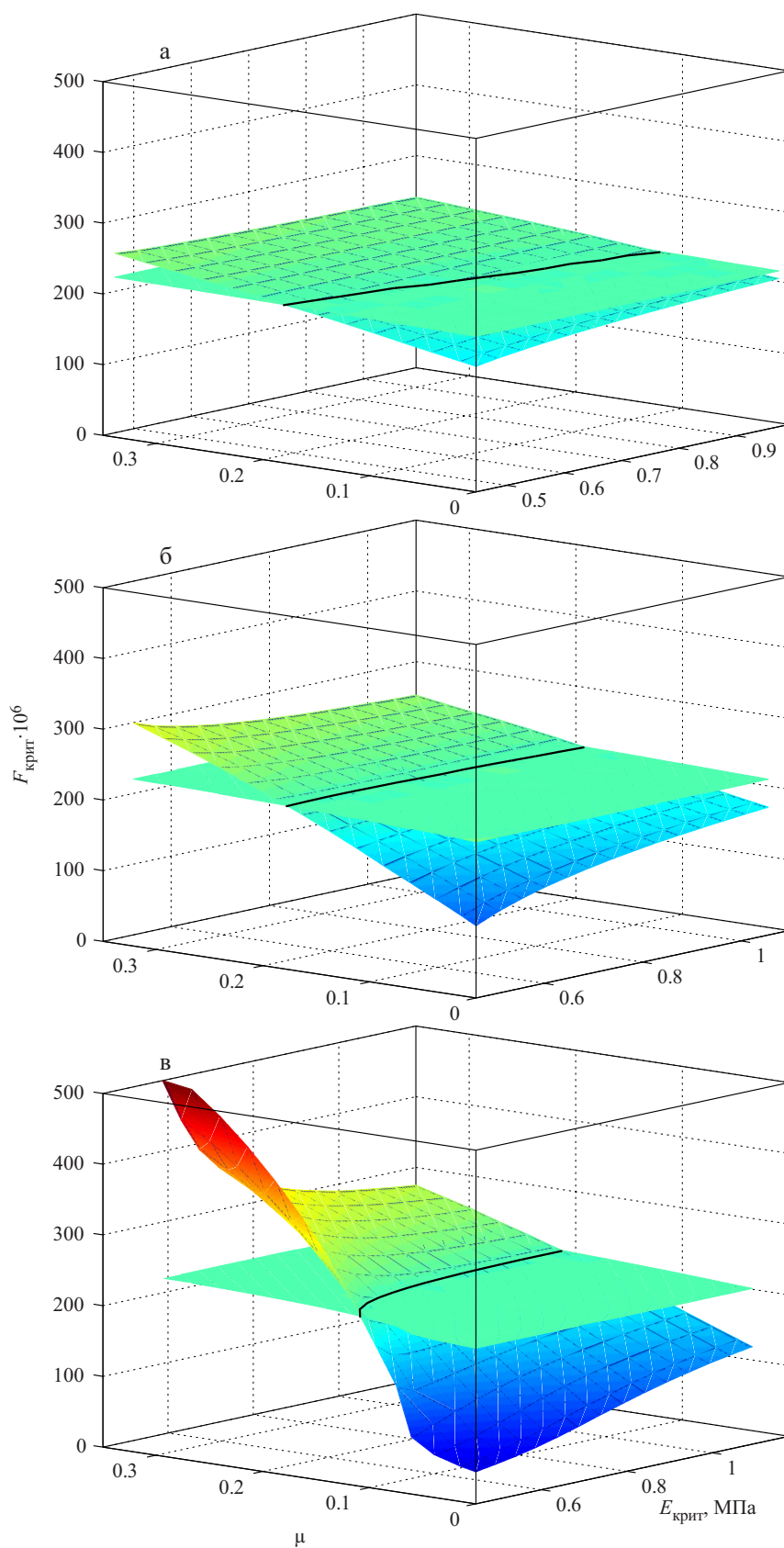


Рис. 7. Зависимость частотного параметра  $F$  нейтральной моды от свойств покрытий при скоростях потока  $\bar{U}_0 = 10$  (а), 15 (б) и 20 (в) м/с

развитие малых возмущений. В этом случае экспоненциальный закон роста возмущений в линейной области делает расчетное число  $Re_T$  малочувствительным к небольшому произволу протяженности нелинейной стадии перехода. Это дает возможность для определения  $Re_T$  использовать так называемый  $e^n$ -метод, получивший широкое распространение (см., например, обзор в [17]) в связи с его эффективностью для широкого круга течений.

Согласно этому методу  $Re_T$  определяется минимальным числом Рейнольдса, при котором огибающая кривых нарастания для волн неустойчивости различных частот

$$n(Re) = \ln(u/u_0) = - \int_{x(Re_F)}^{x(Re)} \alpha_i dx$$

достигает заданного значения  $n$ . Здесь  $Re_F$  соответствует числу Рейнольдса на нижней ветви кривой нейтральной устойчивости для волны с частотным параметром  $F$ , а  $u/u_0$  – нормированная амплитуда волны. Обычно для пограничного слоя над плоской пластиной при низкой степени набегающего потока  $n(Re_T) \approx 8-10$ . При существенно различающихся внешних возмущениях величина  $n$  меняется.

Оценки положения перехода к турбулентности  $e^n$ -методом для пограничного слоя плоской пластины над жесткой поверхностью и для одного из покрытий при трех скоростях потока приведены на рис. 6. В качестве критерия перехода к турбулентности выбрана величина  $n = 10$ . Как можно видеть, над жестким покрытием  $Re_T \approx 3300$ . Над рассматриваемой податливой поверхностью при  $\bar{U}_0 = 10$  м/с число Рейнольдса перехода возрастает до  $Re_T \approx 3600$ . При скоростях  $\bar{U}_0 = 15$  и  $\bar{U}_0 = 20$  м/с величина  $Re_T$  становится равной 3800 и 4100 соответственно, т. е. увеличение в последнем случае составляет примерно 20% по сравнению с твердой поверхностью.

Зависимость частотного параметра  $F_{крит}$  нейтральной моды от свойств покрытий при трех скоростях потока показана на рис. 7. Из сравнения рис. 5 и 7 видно, что отмеченный выше эффект уменьшения  $F_{крит}$  с увеличением  $Re_{крит}$  носит систематический харак-

тер и наблюдается во всех рассмотренных режимах. Так как  $F_{крит}$  довольно близко по величине к наибольшей частоте, при которой может возникнуть неустойчивость (см. рис. 3), то можно утверждать, что уменьшение диапазона частот неустойчивости тоже носит систематический характер. Это дополнительное позитивное свойство покрытий, так как при прочих равных условиях полная начальная энергия возмущений, способных турбулизовать течение, становится меньше, что должно опосредованно способствовать затягиванию перехода, особенно на стадии нелинейного развития возмущений, поэтому приведенные выше оценки  $Re_T$  могут оказаться даже несколько заниженными для рассматриваемых покрытий.

## Выводы

Для задания зависимостей модуля упругости и коэффициента потерь от частоты использованы реальные зависимости, которые существенно отличаются от использовавшихся ранее теоретических моделей. Эти зависимости были аппроксимированы аналитическими функциями в области частот, характерных для области линейной неустойчивости течения в пограничном слое плоской пластины. Знание общего вида этих зависимостей позволило определять без проведения предварительных дорогостоящих экспериментов требуемые свойства податливых покрытий для последующего изготовления и проведения целенаправленных лабораторных тестов.

Показано, что эффекты, связанные с податливостью покрытий, перестают зависеть от толщины покрытия при ее увеличении до  $Re_n = 0,7-1,0 \cdot 10^4$  (около 20 толщин вытеснения при  $Re = 520$ ).

Проведенные расчеты свидетельствуют о том, что с ростом скорости потока влияние податливости рассматриваемых покрытий на критическое число Рейнольдса становится более ярко выраженным, приводя (при коэффициенте потерь  $\mu = 0,05$ ) к увеличению  $Re_T$  до 20% (по оценке  $e^n$ -методом) и увеличению  $Re_{крит}$  до двух раз при скорости потока  $U = 20$  м/с. Кроме того, область частот неустойчивости существенно сужается.

В дальнейшем представляется целесообразным рассмотреть устойчивость погра-

ничного слоя по отношению к трехмерным возмущениям (известно, что теорема Сквайра не применима в данном случае [12]), поведение полосчатых структур, в частности оптимальных возмущений [16], изучение развития которых позволяет получить число Рейнольдса, ниже которого любые возмущения затухают, а также рассмотреть многослойные покрытия с жестким тонким наружным слоем и более мягким внутренним слоем или слоями для тестирования их эффективности в подавлении второй моды неустойчивости. Кроме того, в дальнейшем потребуется большая база данных, для того чтобы уточнить полученные соотношения, а также улучшение методики определения вязкоупругих свойств на высоких частотах.

### Список литературы

1. *Kramer M. O.* Boundary Layer Stabilization by Distributed Damping // *J. Aero. Sci.* 1957. Vol. 24. No. 6. P. 459–460.
2. *Kramer M. O.* Boundary Layer Stabilization by Distributed Damping // *Naval Engrs. J.* 1962. Vol. 74. No. 2. P. 341–348.
3. *Bushnell D. M., Hefner J. N., Ash R. L.* Effect of Compliant Wall Motion on Turbulent Boundary Layers // *Phys. Fluids.* 1977. Vol. 20. P. S31–S48.
4. *Gad-el-Hak M.* Compliant Coatings: A Decade of Progress // *Appl. Mech. Rev.* 1996. Vol. 49. No. 10. Pt. 2. P. S147–S157.
5. *Gad-el-Hak M., Blackwelder R. F., Riley J. J.* On the Interaction of Compliant Coatings with Boundary Layer Flows // *J. Fluid Mech.* 1984. Vol. 140. P. 257–280.
6. *Carpenter P. W.* Status of Transition Delay Using Compliant Walls // *Viscous Drag Reduction in Boundary Layers* / Eds. D. M. Bushnell, J. N. Heffner. Washington: Progress in Astronautics and Aeronautics, 1990. P. 79–113.
7. *Carpenter P. W., Garrad A. D.* The Hydrodynamic Stability of Flows over Kramertype Compliant Surfaces. Pt. 1: Tollmien – Schlichting Instabilities // *J. Fluid Mech.* 1985. Vol. 155. P. 465–510.
8. *Gaster M.* Is the Dolphin a Red Herring? // *Proc. IUTAM Symp. on Turbulent Management and Relaminarization* / Eds. H. W. Liepmann, R. Narasimha. Berlin: Springer Verlag, 1987. P. 285–304.
9. *Lucey A. D., Carpenter P. W.* Boundary Layer Instability over Compliant Walls: Comparison between Theory and Experiment // *Phys. Fluids.* 1995. Vol. 7. No. 10. P. 2355–2363.
10. *Riley J. J., Gad-el-Hak M., Metcalfe R. W.* Compliant Coatings // *Ann. Rev. Fluid Mechanics.* 1988. Vol. 20. P. 393–420.
11. *Carpenter P. W., Lucey A. D., Dixon A. E.* The Optimization of Compliant Walls for Drag Reduction // *Recent Developments in Turbulence Management* / Ed. by K.-S. Choi. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991. P. 195–221.
12. *Yeo K. S.* The Stability of Boundary-Layer Flow over Single- and Multiple-Layer Viscoelastic Walls // *J. Fluid Mech.* 1988. Vol. 196. P. 359–408.
13. *Carpenter P. W., Gajjar J. S. B.* A General Theory for Two- and Three-Dimensional Wall-Mode Instabilities in Boundary Layers over Isotropic and Anisotropic Compliant Walls // *Theoret. Comput. Fluid Dynamics.* 1990. Vol. 1. P. 349–378.
14. *Kulik V. M., Semenov B. N., Boiko A. V., Seoudi B., Chun H. H., Lee I.* Measurement of Dynamic Properties of Viscoelastic Materials // *Experimental Mechanics.* 2009. Vol. 49. P. 417–425.
15. *Kulik V. M., Boiko A. V., Seoudi B., Chun H. H., Lee I.* Measurement Method of Complex Viscoelastic Material Properties // *Int. J. of Solids and Structures.* 2010. Vol. 47. No. 3. P. 374–382.
16. *Kulik V. M., Boiko A. V., Bardakhanov S. P., Park H., Chun H. H., Lee I.* Viscoelastic Properties of Silicone Rubber with Admixture of SiO<sub>2</sub> Nanoparticles // *Materials Science and Engineering A.* 2011. Vol. 528. Is. 18. P. 5729–5732.
17. *Boiko A. V., Grek G. R., Dovgal A. V., Kozlov V. V.* Physics of Transitional Shear Flows // Berlin: Springer Verlag, 2011. 272 p.
18. *Ландау Л. Д., Лифушиц Е. М.* Теория упругости // М.: Наука, 1987. 248 с.
19. *Duncan J. H., Waxman A. M., Tulin M. P.* The Dynamics of Waves at the Interface between a Viscoelastic Coating and a Fluid Flow // *J. Fluid Mech.* 1985. Vol. 158. P. 177–197.
20. *Bridges T. J., Morris P. J.* Differential Eigenvalue Problems in which the Parameter Appears Nonlinearly // *J. Comp. Phys.* 1984. Vol. 55. P. 437–460.
21. *Moler C. B., Stewart G. W.* An Algorithm for Generalized Matrix Eigenvalue Problems // *SIAM J. Numer. Anal.* 1973. Vol. 10. No. 2. P. 241–256.



22. Кулик В. М. Деформация вязкоупругого покрытия в турбулентном течении // Теплофизика и аэромеханика. 2009. Т. 16, № 1. С. 43–56.

23. Кулик В. М. Особенности деформирования податливых покрытий, обладающих

повышенной прочностью // Теплофизика и аэромеханика. 2011. Т. 18, № 4. С. 567–581

*Материал поступил в редколлегию 18.08.2011*

**A. V. Boiko, V. M. Kulik, V. A. Filimonov**

**STABILITY OF FLAT PLATE BOUNDARY LAYER OVER COMPLIANT COATING  
WITH INCREASED RIGIDITY**

In the paper the results of hydrodynamic stability computations for Blasius boundary layer over single-layer compliant coatings in the framework of complete (in respect to interface conditions) linear quasi-parallel approach are presented. Data on viscoelastic properties (elastic modulus and loss factor) of the coatings as functions of frequency obtained in a series of special experiments were used. A range of the coating parameters, which provide a compromise between their rigidity and intensity of interaction with the flow, was determined. Based on  $e^n$ -method, estimations of the transition Reynolds number were done.

*Keywords:* compliant coatings, boundary layer, hydrodynamic instability.