

УДК 532.516:537.84

Р. И. Мулляджанов¹, Н. И. Яворский^{1,2}

¹ Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 1, Новосибирск, 630090, Россия

² Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: rustammul@gmail.com

ЗАТОПЛЕННАЯ СТРУЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассматривается стационарное течение вязкой несжимаемой проводящей жидкости. Найдено новое точное решение уравнений магнитной гидродинамики (МГД), вызванное источником гидродинамического импульса, расположенным на конце полубесконечного линейного проводника с током. Обнаружены эффект запираания плотности электрического тока и явление потери существования решения при конечных значениях электрического тока в проводнике и различных значениях чисел Рейнольдса и Бэтчелора (магнитного числа Прандтля). Рассмотрена неавтомодельная задача струйного МГД течения, вызванного точечными источниками импульса, момента импульса, расхода жидкости и электрического тока, расположенными в начале координат. В этом случае главный член асимптотического разложения поля скорости на бесконечности описывается точным решением уравнений Навье – Стокса для затопленной струи (решением Слэзкина – Ландау – Сквайра). Анализируется роль интегралов сохранения. Показано, что возникающее магнитное поле приводит к ослаблению струйного движения.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, точное решение, струйные течения.

Введение

Струйные течения проводящей жидкости являются объектом активных фундаментальных исследований и часто встречаются в приложениях. В промышленности МГД струи возникают при воздействии магнитного поля на проводящую среду. В ряде практических приложений электрический ток протекает через жидкий металл, как при электродуговой сварке и в дуговой электропечи [1] или в ртутном дуговом выпрямителе. Впервые в работе [2] было обнаружено, что электрический ток в жидкой проводящей среде может возбуждать струйные течения, но некоторое время не существовало объяснения этого явления с точки зрения механики жидкости. Далее последовали теоретические работы [3–5], где исследовалась задача, актуальная для электротехники. Рассматривалось полупространство, занятое

проводящей жидкостью, причем на твердой границе располагался точечный электрод, из которого растекался радиальный электрический ток по жидкости. Решение задачи принадлежит автомодельному классу конических течений, в котором функции скорости жидкости и магнитного поля обратно пропорциональны расстоянию от электрода. Класс конических течений хорошо известен в гидродинамике. К нему принадлежит точное решение, описывающее затопленную струю в безграничном пространстве, вызванную точечной силой, которое было получено независимо Слэзкиным [6], Ландау [7] и Сквайром [8]. Позже Сквайр [9] получил автомодельное решение для струи, бьющей из отверстия в стене (решение в полупространстве). Следует отметить, что в этом случае не удастся удовлетворить на стене условию прилипания или условию на свободной поверхности.

Конический класс течений обнаруживает ряд парадоксальных свойств [10]. Для задачи о взаимодействии вихревой нити с плоскостью [11] было показано, что регулярное решение существует лишь при малых числах Рейнольдса, которые определены по циркуляции вихревой нити, причем при достижении определенного критического значения числа Рейнольдса скорость на оси струи стремится к бесконечности. Серрин [12] обобщил задачу о вихревой нити, допустив логарифмическую особенность скорости на оси. При этом решение существует при всех числах Рейнольдса. Подобное течение жидкости, вызванное полубесконечной вихревой нитью, может быть интерпретировано как движение воздуха в торнадо.

Впервые класс конических течений был расширен на уравнения магнитной гидродинамики в [13]. Далее задачи данного автомодельного класса рассматривались в [14–16] и обобщены в монографии [1]. В [5] обнаружено, что решение не может быть найдено при некоторых значениях параметров задачи, как и в [11]. При конечной величине электрического тока решение перестает существовать.

В известной экспериментальной работе, впервые выполненной Бояревичем, Миллере и Чайковским и описанной в [1], был открыт феномен, который связан со спонтанным возникновением вращения проводящей жидкости. В полусферическом контейнере, заполненном ртутью, к свободной поверхности прикладывался электрод. Подавался ток, который тек радиально от электрода к стенкам контейнера. При определенном значении тока появлялась азимутальная скорость жидкости, причем вращение могло быть более интенсивным, чем полоидальное движение жидкости. Этот феномен до сих пор не имеет общепринятого объяснения. В частности, в работе [17], постановка задачи которой совпадает с [5], был обнаружен эффект самовозбуждения полоидального магнитного поля и азимутальной скорости.

Мощные струйные течения обнаружены вблизи молодых звезд и ядер галактик [18; 19]. Их гидродинамическая модель, базирующаяся на решении Сквайра [9], предложена в работах [20; 21]. Известно, что в течение некоторой характерной фазы их существования происходит интенсивная эжекция массы с поверхности звезд. Однако конический класс не способен описать про-

извольное струйное течение. Помимо закона сохранения импульса, уравнения Навье – Стокса содержат также закон сохранения массы и момента импульса для стационарного струйного течения в безграничном пространстве, которые требуют другой структуры решения. Учет многих эффектов, наблюдаемых экспериментально, таких как закрутка струи, возвратное течение, асимметрия требуют построения общего неавтомодельного решения, главный член разложения которого будет принадлежать коническому классу. Румер [22] поставил задачу описать струю, не только обладающую импульсом [6–8], но и имеющую ненулевой расход (источник массы), заданный также в начале координат. Считая, что бесконечно удаленная точка является аналитической, помимо члена $1/r$, где r – сферический радиус, было учтено слагаемое пропорциональное $1/r^2$, однако полученное решение для угловой функции обладает логарифмической особенностью на оси симметрии. В работе [23] показано, что общее решение задачи о затопленной струе не является аналитическим на бесконечности, причем неаналитичность проявляется уже во втором слагаемом разложения по степеням обратного сферического радиуса, что и является причиной появления особенности в задаче Румера. Также показано, что для описания струи с ненулевым расходом необходимо помимо слагаемого, пропорционального $1/r^2$, учитывать $\ln r/r^2$. Позже похожие результаты были получены в [24]. В [25] описана закрученная струя с помощью слагаемого, пропорционального $1/r^2$ у азимутальной скорости. Неавтомодельную закрученную струю в приближении пограничного слоя рассмотрел Лойцянский [26].

Постановка автомодельной задачи

Рассмотрим стационарное осесимметричное МГД течение однородной вязкой несжимаемой проводящей жидкости в безграничном пространстве, вызванное точечным источником импульса P_z , расположенным на конце полубесконечного проводника и направленным вдоль него. Проводник изолирован и по нему течет электрический ток величиной I (рис. 1). Электрический ток вытекает из проводника

Рассмотрим уравнение Ампера

$$\nabla \times \mathbf{h} = 4\pi \mathbf{j} / c$$

(током смещения пренебрегаем), тогда вектор плотности электрического тока \mathbf{j} имеет только радиальную компоненту

$$\mathbf{j} = -vc\sqrt{\rho/4\pi}L'(x)\mathbf{e}_r / r^2,$$

где \mathbf{e}_r – единичный вектор. Выпишем закон сохранения электрического заряда

$$\begin{aligned} \oint_{S_r} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS &= 2\pi r^2 \int_0^\pi j_r \sin \theta d\theta = \\ &= vc\sqrt{\pi\rho}(L(-1) - L(1)) = I. \end{aligned}$$

Интегрирование производится по сфере S_r произвольного радиуса r с центром в начале координат, $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ – элемент сферической поверхности, \mathbf{n} – вектор внешней нормали к сфере S . Таким образом, поскольку $L(1) = 0$, то

$$L(-1) = I / vc\sqrt{\pi\rho} = J.$$

Из уравнения (6) с помощью (11) можно получить, что $F(\pm 1) = 0$.

Система уравнений пятого порядка (6)–(8) имеет следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} y'(1) &= -\text{Re}, \quad L(-1) = J, \\ F(\pm 1) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что для уравнений (6)–(8) с граничными условиями (12) соотношения $y(\pm 1) = 0$ выполняются автоматически. Это следует из уравнения (7).

Алгоритм расчета

Следует отметить, что для корректного численного расчета системы уравнений (6)–(8), необходимо найти асимптотические разложения для искомых функций в окрестности особых точек системы уравнений. Тогда расчет можно будет начинать в подходящей окрестности особых точек, где функции аналитичны и работают хорошо апробированные численные методы. Особая точка $x=1$ принадлежит области течения, поэтому искомое решение задачи в ее окрестности аналитично и функции представимы рядом Тейлора

$$y(x) = -\text{Re}(1-x) + y_2(1-x)^2 + O(1-x)^3, \quad (13)$$

$$F(x) = f_2(1-x)^2 + O(1-x)^3, \quad (14)$$

$$L(x) = L_1(1-x) + L_2(1-x)^2 + O(1-x)^3. \quad (15)$$

Подставляя разложения (13)–(15) в уравнения (6)–(8), найдем выражения для коэффициентов: $L_2 = -\text{Bt}L_1 \text{Re} / 2$. Коэффициенты f_2, L_2 остаются пока неопределенными.

Особая точка $x=-1$ не принадлежит области течения, поэтому решение в этой точке может содержать особенность и не быть аналитичным. Можно показать, что решение задачи имеет логарифмическую особенность в точке $x=-1$ следующего вида:

$$\begin{aligned} y &= (y_{10} + J^2 \ln \varepsilon / 4)\varepsilon + \\ &+ (y_{20} + y_{21} \ln \varepsilon + y_{22} \ln^2 \varepsilon + \text{Bt}J^4 \ln^3 \varepsilon / 192)\varepsilon^2 + \\ &+ O(\varepsilon^3 \ln^4 \varepsilon), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} F &= J^2 \varepsilon / 2 + \\ &+ (f_{20} + f_{21} \ln \varepsilon + f_{22} \ln^2 \varepsilon + \text{Bt}J^4 \ln^3 \varepsilon / 96)\varepsilon^2 + \\ &+ O(\varepsilon^3 \ln^4 \varepsilon), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} L &= J + (L_{10} + L_{11} \ln \varepsilon + \text{Bt}J^3 \ln^2 \varepsilon / 16)\varepsilon + \\ &+ (L_{20} + L_{21} \ln \varepsilon + L_{22} \ln^2 \varepsilon + \text{Bt}^2 J^5 \ln^3 \varepsilon / 256)\varepsilon^2 + \\ &+ O(\varepsilon^3 \ln^5 \varepsilon). \end{aligned} \quad (18)$$

Следует отметить, что главный член разложения особенности для поля скорости пропорционален квадрату электрического тока (16). Если тока нет, то задача сводится к известному решению СЛС. Разложения (16)–(18) переходят в ряды Тейлора, если положить $J=0$. Коэффициенты разложения $y_{21}, y_{22}, f_{20}, f_{21}, L_{11}, L_{20}, L_{21}, L_{22}$ выражаются через y_{10}, y_{20}, L_{10} (выражения для коэффициентов не приводятся в силу их громоздкости). Величины f_2, L_2 и y_{10}, y_{20}, L_{10} определяются из граничных условий.

Численное интегрирование производилось до точки сшивки x_s , начиная из малой окрестности каждой особой точки. Выбор начальной точки интегрирования определялся по заданной точности расчета (в частности, при увеличении J требовалось начинать интегрирование из точки более близкой к $x=-1$, поэтому использовался диапазон стартовых значений координаты от $-1+10^{-4}$ до $-1+10^{-10}$) так, чтобы разло-

жения (16)–(18) представляли решение с погрешностью, обеспечивающей необходимую точность. Для удобства расчетов вместо заданного тока в проводнике задавался параметр f_2 , а величины $y_{10}, y_{20}, J, L_{10}$ и L_1 находились из условий сшивки аналитических функций в точке x_s . Для системы (6)–(8) эти условия есть

$$\begin{aligned} y_-(x_s) &= y_+(x_s), \quad F_-(x_s) = F_+(x_s), \\ F'_-(x_s) &= F'_+(x_s), \quad L_-(x_s) = L_+(x_s), \\ L'_-(x_s) &= L'_+(x_s), \end{aligned}$$

где индекс «-» означает результат интегрирования от точки $x = -1$, а индекс «+» – результат интегрирования от точки $x = 1$. Re, Bt – параметры задачи. Для численного счета использовался метод Рунге – Кутты с автоматическим выбором шага. Точка x_s выбиралась в области наибольших производных функций задачи для увеличения точности расчета. Относительная погрешность не превышала 10^{-5} .

Результаты

Поскольку $y'(x)|_{x \rightarrow -1} < 0$ при $J > 0$, согласно (16), то функция $y(x)$ перестает быть положительно определенной (рис. 2), появляется и растет область отрицательных значений около точки $x = -1$. Это означает, что около проводника возникает область возвратного течения (рис. 3), граница которой определяется нулем функции $y(x)$. Пондеромоторная сила магнитного поля имеет только одну θ -компоненту и выражается следующим образом:

$$F_\theta = \rho v^2 L(x) L'(x) / (r^3 \sqrt{1-x^2}).$$

Она является отрицательной почти во всей области течения ($L(x) > 0, L'(x) < 0$), однако в малой окрестности точки $x = -1$ эта сила направлена против потока и может вызвать возвратное течение жидкости. Появление зоны возвратного течения является принципиально важным для объяснения эффектов, которые будут описаны ниже.

Одним из новых эффектов, присутствующих в нашей задаче, является эффект запирания плотности электрического тока, который состоит в следующем: при увеличении J от нуля до некоторого значения

$J_*(Re, Bt)$ плотность тока j_r растет в любой точке пространства, однако при $J > J_*$ плотность тока j_r начинает монотонно убывать и стремится к нулю при $J \rightarrow \infty$ во всей области течения за исключением некоторой окрестности вблизи проводника с током (рис. 4). Когда магнитное поле небольшое, оно не оказывает достаточного влияния на скорость жидкости, j_r растет линейно с ростом J . Далее под воздействием магнитного поля появляется область возвратного течения, в которую вовлекается существенная часть жидкости, и вместе с ней переносится существенная часть зарядов. При больших значениях J практически весь электрический ток, вытекающий из начала координат, течет в обратном направлении в узкой области вблизи проводника. В пределе $J \rightarrow \infty$ плотность тока $j_r \sim -L'(x)$, нормированная на величину J , стремится к нулю во всем пространстве за исключением окрестности проводника с током.

Исследование показывает, что, как и в некоторых других задачах конического класса течений [6; 12], регулярное решение существует не при всех значениях параметров задачи. Если зафиксировать, например, Re, Bt и увеличивать J , то в окрестности некоторого значения J_∞ коэффициенты асимптотического разложения y_{10}, y_{20} функции $y(x)$ около точки $x = -1$ стремятся к бесконечности по абсолютному значению, так что граничное условие непротекания $y(-1) = 0$ становится невозможно удовлетворить. Изменяя число Re , можно построить кривую $J_\infty(Re, Bt)$ (рис. 5). Решение существует при $Re > -2$ и $-J_\infty < J < J_\infty$, где $J_\infty(Re, Bt) < \infty$ при $Bt < 1$ и $J_\infty(Re, Bt) = \infty$ при $Bt \geq 1$. Можно получить вид предельного решения, когда $Bt \geq 1$. В силу вышеупомянутого эффекта запирания электрического тока при $J \rightarrow \infty$

$$L(x) / J \rightarrow 0,$$

если $-1 < x \leq 1$. Из уравнения (7) нетрудно видеть, что в случае $L(x) \equiv 0$ при $-1 < x \leq 1$ функция $F(x)$ пропорциональна $(1-x)^2$. Полагая $L(x) \equiv 0$ при $-1 < x \leq 1$ и снимая условие непротекания на оси $x = -1$, можно найти предельное аналитическое решение уравнения (6):

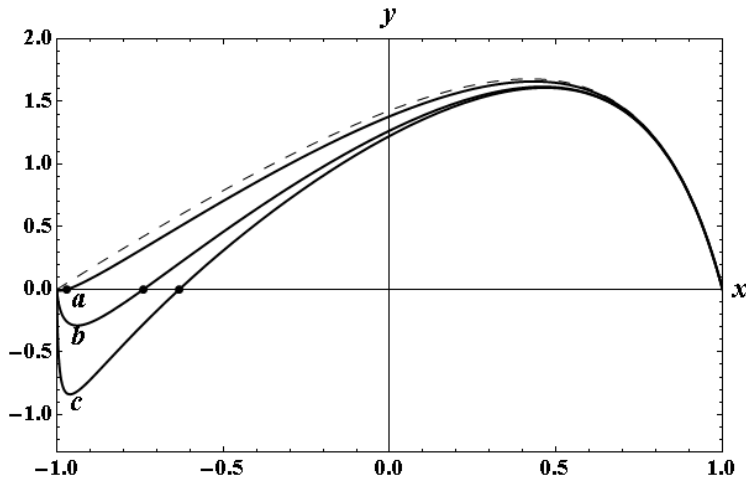


Рис. 2. График функции $y(x)$ при различных значениях параметра J .
 $Re = 10, Bt = 1$.
 Штриховой линией показано решение СЛС, что соответствует значению $J = 0$.
 Значения J : 2 (a); 5,54 (b); 15,68 (c)

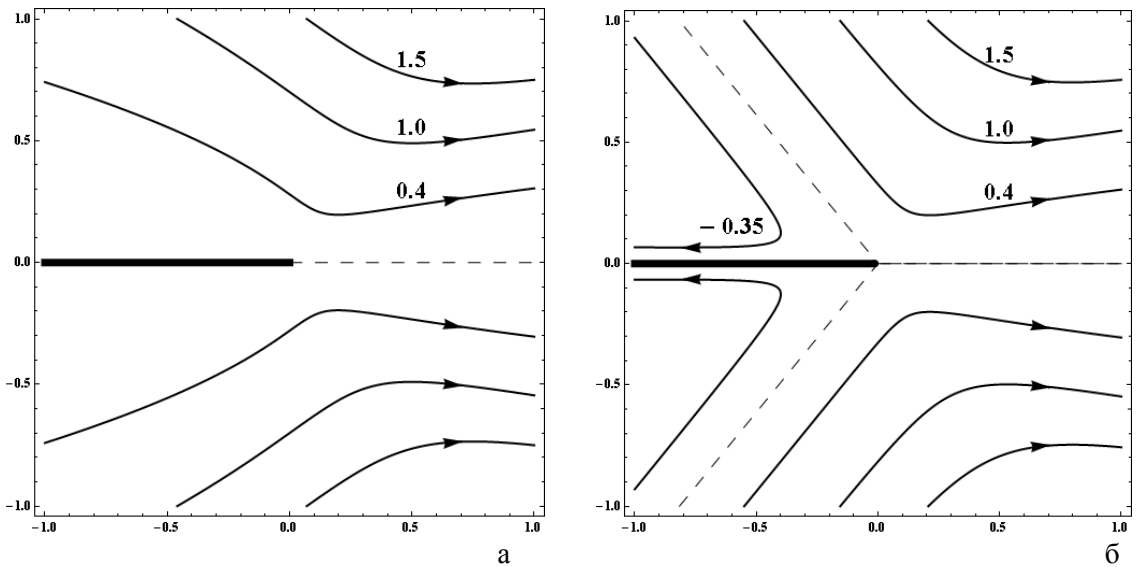


Рис. 3. График линий тока при значениях J : 0 (a); 15,68 (б). $Re = 10, Bt = 1$. Пунктирной линией показана область $y(x) = 0$. На графике (б) есть область возвратного течения, где жидкость движется вдоль проводника с током

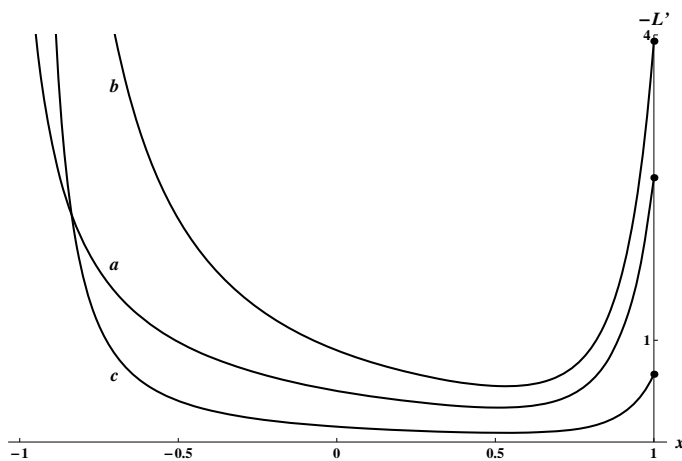
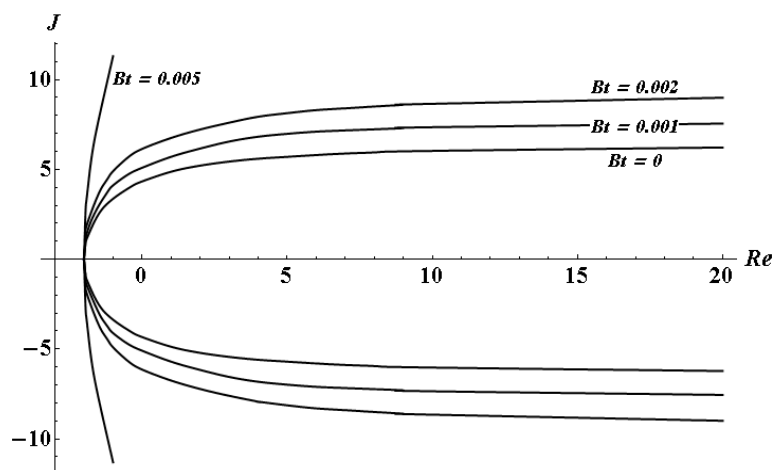


Рис. 4. Уменьшение плотности тока на оси струи с ростом величины электрического тока в проводнике.
 Режимы те же, что и на рис. 2: $Re = 10, Bt = 1$;
 значения J : 2 (a), 5,54 (b), 15,68 (c)

Рис. 5. Область существования решения для параметров $Bt = 0; 0,001; 0,002; 0,005$



$$y(x) = y_p(x) = (1-x) \times \frac{(p^2 - (1 + \text{Re})) \left(1 - \left(\frac{1+x}{2}\right)^p\right) + p \text{Re} \left(1 + \left(\frac{1+x}{2}\right)^p\right)}{(1 + \text{Re}) \left(1 - \left(\frac{1+x}{2}\right)^p\right) + p \left(1 + \left(\frac{1+x}{2}\right)^p\right)}, \quad (19)$$

$$F(x) = F_p(x) = \frac{1-p^2}{2} (1-x)^2, \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} y_p(x) = 2(|p| - 1).$$

Определим параметр p . Для этого представим $y(x)$, $L(x)/J$ в виде кусочно-линейных функций так, чтобы были выполнены граничные условия

$$y(-1) = F(-1) = 0,$$

и, интегрируя уравнение (8), найдем

$$y_p(-1) = -2/Bt,$$

откуда следует, что параметр $|p| = 1 - 1/Bt$. Полученные аналитические выражения y_p, F_p очень хорошо согласуются с расчетными значениями функций y, F при больших значениях J . Единственным отличием является их поведение в непосредственной окрестности точки $x = -1$, поскольку $y_p(-1), F_p(-1)$ не равны нулю, согласно выражениям (20). Отсюда видно, что при $J \rightarrow \infty$ предельным решением является течение со стоком жидкости на оси $x = -1$.

Постановка неавтономной задачи

Рассмотрим теперь стационарное осесимметричное МГД течение в отсутствие проводника с током в безграничном про-

странстве. В этом случае можно считать, что течение вызвано точечной особенностью или источником ограниченного размера. В качестве источника ограниченного размера можно взять сферу радиусом R_0 с центром в начале координат, на которой заданы распределение скорости (v_r, v_θ, v_ϕ) и магнитного поля. Для магнитного поля достаточно задать только две независимые касательные компоненты h_θ, h_ϕ , поскольку уравнения магнитной гидродинамики (2), (3) переопределены (имеется 4 уравнения на 3 неизвестных) и невозможно независимо задать третью компоненту магнитного поля. Ее легко определить из уравнения неразрывности магнитного поля. На бесконечности будем предполагать отсутствие движения и магнитного поля. Будем изучать задачу при больших значениях сферического радиуса, т. е. асимптотику решения на бесконечности. В этом случае движение жидкости определяются основными интегралами движения. При больших значениях сферического радиуса можно считать, что движение жидкости вызвано источником импульса P_z , источником массы (расход жидкости Q) и магнитного поля, заданными в начале координат. Главный член асимптотического разложения, следуя работе [18], отвечает закону сохранения импульса, а поле скорости убывает как $1/r$ и совпадает с решением СЛС v_1 (10). Остальные слагаемые асимптотического разложения скорости убывают быстрее, чем $1/r$. Асимптотическое разложение для магнитного поля, кото-

рое в этом случае не принадлежит коническому классу, также начинается с членов порядка $o(1/r)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} = o(1/r), \\ \mathbf{h} &= o(1/r), \\ p &= p_\infty + p_1 + q, \quad p_1 = o(1/r^2), \\ q &= o(1/r^2),\end{aligned}$$

Определим параметр A через полный импульс струи [2]

$$\begin{aligned}P_z &= \oint_S \Pi_{zn} d\sigma = \\ &= 2\pi r^2 \int_0^\pi (\Pi_{rr} \cos\theta - \Pi_{\theta r} \sin\theta) \sin\theta d\theta = \\ &= 16\pi r v^2 A \left(1 + \frac{4}{3(A^2 - 1)} - \frac{A}{2} \ln \frac{A+1}{A-1} \right),\end{aligned}\quad (21)$$

где

$$\begin{aligned}\Pi_{ij} &= \rho v_i v_j - \rho v \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \\ &+ \left(p + \frac{h^2}{8\pi} \right) \delta_{ij} - \frac{h_i h_j}{4\pi}\end{aligned}$$

есть тензор полного потока импульса в соответствии с уравнением (1). Отметим, что в данной задаче магнитное поле не дает вклада в величину импульса струи (21). Число Рейнольдса определим, как это принято в теории затопленных струй, через полный импульс $Re = \sqrt{P_z} / \rho v^2$ [27].

Линеаризуем уравнения (1)–(3) относительно точного решения уравнений Навье – Стокса (в данном приближении и уравнений магнитной гидродинамики) \mathbf{v}_1, p_1 , получим

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_1, \nabla) \mathbf{w} &= -\frac{1}{\rho} \nabla q + \nu \Delta \mathbf{w}, \\ (\mathbf{v}_1, \nabla) \mathbf{h} &= (\mathbf{h}, \nabla) \mathbf{v}_1 + \nu_m \Delta \mathbf{h}, \\ \nabla \cdot \mathbf{w} &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{h} = 0.\end{aligned}$$

Можно заметить, что, поскольку \mathbf{v}_1 пропорциональна $1/r$, полученная система линейных дифференциальных уравнений в частных производных допускает решения со степенной зависимостью от сферического радиуса. В случае аналитичности скорости на бесконечности эта зависимость представляла бы целые степени обратного сферического радиуса. Будем искать решение осесимметричной линеаризованной задачи в следующем виде:

$$w_r = -\frac{\nu y'_\alpha(x)}{r^\alpha}, \quad w_\theta = -\frac{\nu(2-\alpha)y_\alpha(x)}{r^\alpha \sqrt{1-x^2}}, \quad (22)$$

$$w_\varphi = -\frac{\nu \Gamma'_\alpha(x)}{r^\alpha \sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{q}{\rho} = -\frac{\nu^2 g_\alpha(x)}{r^{\alpha+1}},$$

$$h_r = -\frac{B F'_\alpha(x)}{r^\alpha}, \quad h_\theta = -\frac{B(2-\alpha)F_\alpha(x)}{r^\alpha \sqrt{1-x^2}}, \quad (23)$$

$$h_\varphi = -\frac{B G_\alpha(x)}{r^\alpha \sqrt{1-x^2}},$$

где α – пока неизвестный показатель степени. Функция $y_\alpha(x)$ является угловой частью функции тока, $F_\alpha(x)$ имеет аналогичный смысл для магнитного поля. После подстановки (22), (23) в линеаризованные уравнения МГД и исключения $g_\alpha(x)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}((1-x^2)y''_\alpha)' - (1-x^2)y_1 y''_\alpha - (1-x^2) \times \\ \times ((\alpha+2)y'_1 - 2\alpha(\alpha-1)) - \\ - (3(1-x^2)y''_1 + (\alpha-1)(\alpha-2)y_1) y'_\alpha - \\ - ((1-x^2)(\alpha-2)y'''_1 + (\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-2)y'_1 - \\ - 2x(\alpha-1)(\alpha-2)y_1 / (1-x^2)) y_\alpha = 0,\end{aligned}\quad (24)$$

$$\begin{aligned}(1-x^2)\Gamma''_\alpha - y_1 \Gamma'_\alpha - (\alpha-1)y'_1 \Gamma_\alpha + \\ + \alpha(\alpha-1)\Gamma_\alpha = 0,\end{aligned}\quad (25)$$

$$\begin{aligned}(1-x^2)F''_\alpha - \\ - Bt(y_1 F'_\alpha + (\alpha-2)y'_1 F_\alpha - (\alpha-1)(\alpha-2)F_\alpha) = 0,\end{aligned}\quad (26)$$

$$\begin{aligned}(1-x^2)G''_\alpha + \alpha(\alpha-1)G_\alpha - \\ - Bt(y_1 G'_\alpha + (\alpha+1)y'_1 G_\alpha + 2xy_1 G_\alpha / (1-x^2)) = 0.\end{aligned}\quad (27)$$

Эта система уравнений имеет особые точки $x = \pm 1$ и относится к уравнениям типа Лежандра, теория которых в настоящее время достаточно хорошо развита. Условие ограниченности решения в особых точках, согласно (22), (23), приводит к следующим однородным граничным условиям, которые в данном случае совпадают с условиями аналитичности функций в особых точках:

$$\Gamma_\alpha(\pm 1) = G_\alpha(\pm 1) = 0, \quad (28)$$

$$y_\alpha(\pm 1) = F_\alpha(\pm 1) = 0, \quad \text{если } \alpha \neq 2. \quad (29)$$

Однородная система уравнений с однородными граничными условиями, как правило, имеет только тривиальное решение. Нетривиальные решения возможны лишь

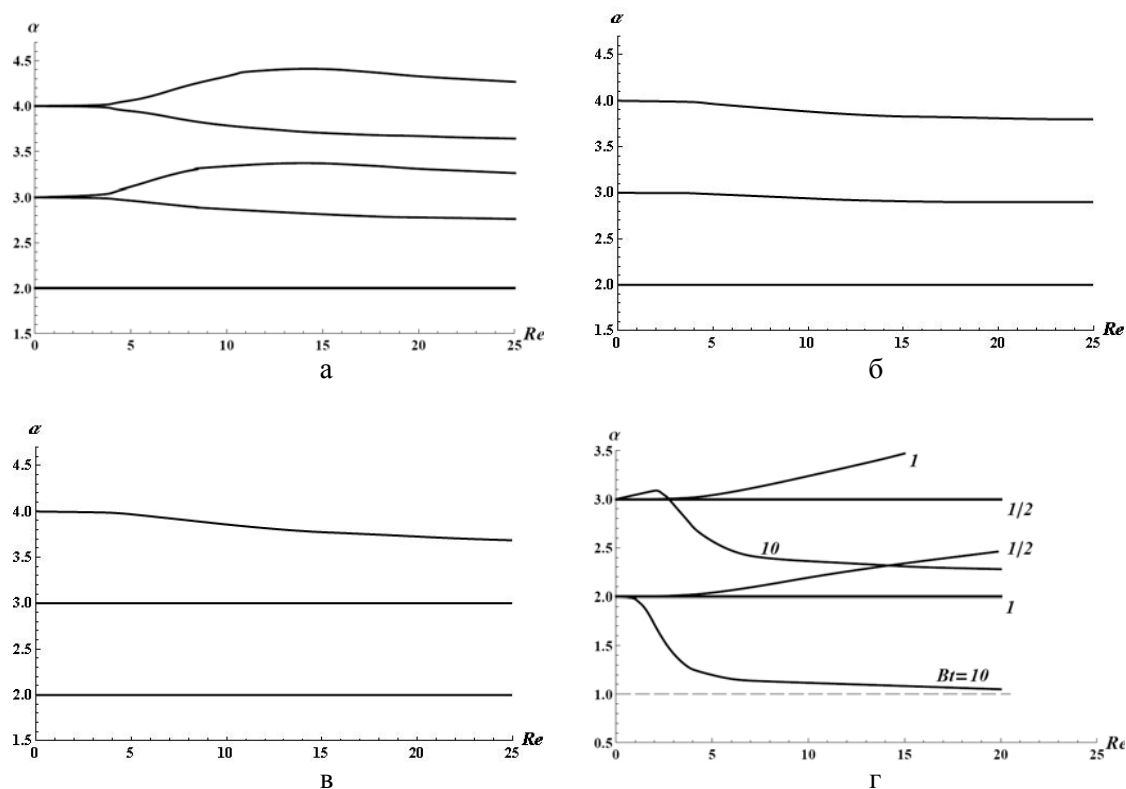


Рис. 6. Спектр $\alpha(\text{Re}, \text{Bt})$ функций задачи: а – $\alpha(\text{Re})$ для функции $y_\alpha(x)$, значение $\alpha(\text{Re}) = 2$ постоянно и кратно двум; б – $\alpha(\text{Re})$ для функции $\Gamma_\alpha(x)$, значение $\alpha(\text{Re}) = 2$ постоянно; в – $\alpha(\text{Re}, \text{Bt} = 1)$ для функции $F_\alpha(x)$, значения $\alpha(\text{Re}, \text{Bt}) = 2, \alpha(\text{Re}, \text{Bt}) = 3$ постоянны; г – $\alpha(\text{Re}, \text{Bt})$ для функции $G_\alpha(x)$, значения $\alpha(\text{Re}, \text{Bt} = 1) = 2, \alpha(\text{Re}, \text{Bt} = 1/2) = 3$ постоянны

в особых случаях. Поэтому, если задать показатель степени α целым числом, нетривиальные решения могут отсутствовать. Целые степени характерны для уравнения Лапласа и соответствуют решениям в виде мультиполей. Это согласуется с хорошо известным фактом, что спектр оператора Лапласа целочисленный. В нашем случае спектр может быть иным и зависеть от параметров задачи – чисел Рейнольдса и Бэтчелора. Таким образом, возникает задача на нахождение собственных функций $y_\alpha, \Gamma_\alpha, F_\alpha, G_\alpha$, отвечающих определенным собственным показателям степени $\alpha = \alpha(\text{Re}, \text{Bt})$. Зависимости $\alpha = \alpha(\text{Re}, \text{Bt})$ ищутся из условия аналитичности функций $y_\alpha, \Gamma_\alpha, F_\alpha, G_\alpha$ в области течения (рис. 6). Уравнения (24), (25) изучены в работе [18].

Оказывается, что в некоторых случаях собственные показатели степени остаются целыми. Согласно [18], это связано с наличием интегралов сохранения. Так, закон со-

хранения массы и закон сохранения момента количества движения обеспечивают равенство $\alpha = 2$ для всех чисел Рейнольдса. Это нетрудно увидеть из соотношений (30):

$$Q = \oint_{S_r} v_n dS = 2\pi r^2 \int_0^\pi v_r \sin \theta d\theta = \text{const}$$

$$L_z = \oint_{S_r} (\mathbf{r} \times \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n})_z dS = \quad (30)$$

$$= 2\pi r^3 \int_0^\pi \Pi_{r\varphi} \sin^2 \theta d\theta = \text{const},$$

в которых интегрирование производится по сфере S_r произвольного радиуса r с центром в начале координат. Аналогичное соотношение имеет место и для магнитного поля:

$$Q_h = \oint_{S_r} h_n dS = 2\pi r^2 \int_0^\pi h_r \sin \theta d\theta = \text{const}. \quad (31)$$

Этим законам сохранения соответствуют следующие собственные функции:

$$y_2(x) = c_0 \frac{(1-x^2)(1-Ax)}{A(A-x)^2}, \quad (32)$$

$$\Gamma_2(x) = d_0 \frac{(1-x^2)}{(A-x)^2},$$

$$F_2(x) = f_0 \frac{(A-x)^{1-2Bt}}{2Bt-1},$$

где c_0, d_0, f_0 – произвольные постоянные. Решение $y_2(x)$ найдено Румером [17], $\Gamma_2(x)$ – Цуккером [20], $F_2(x)$ получена в настоящей работе, нетривиальное решение с $\alpha=2$ существует при всех числах Рейнольдса и Бэтчелора.

Для полоидального магнитного поля собственный показатель степени $\alpha=3$ также для всех чисел Рейнольдса и Бэтчелора. Ему соответствует собственная функция

$$F_3(x) = p_0 \frac{(1-x^2)}{(A-x)^{2Bt}}. \quad (33)$$

Интересно отметить, что для азимутального магнитного поля при $Bt=1$ имеется нетривиальное решение при всех числах Рейнольдса для $\alpha=2$, а при $Bt=1/2$ нетривиальное решение существует для показателя степени $\alpha=3$. Соответствующие собственные функции представлены ниже:

$$G_2(x) = q_0 \frac{(1-x^2)}{(A-x)^3},$$

$$(Bt=1),$$

$$G_3(x) = t_0 \frac{(1-x^2)(1-2Ax+x^2)}{(A-x)^2},$$

$$(Bt=1/2). \quad (34)$$

В формулах (33), (34) p_0, q_0, t_0 – произвольные постоянные. Наличие нетривиального решения при $Bt=1$ связано с появлением дополнительной симметрии в уравнениях магнитной гидродинамики. В этом случае уравнения для магнитного поля по форме совпадают с уравнениями на завихренность с точностью до замены \mathbf{h} на $\boldsymbol{\omega}$ ($\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$). Решения $F_3(x), G_3(x)$ для $\alpha=3$, по-видимому, также соответствуют некоторым скрытым интегралам сохранения.

Следует отметить, что собственная функция для поля скорости $y_2(x)$ отвечает течению с нулевым расходом (это видно из ее аналитического выражения (32)). Поэтому для описания течения с ненулевым расходом этого решения недостаточно. В работе [18] показано, что, поскольку значение

для функции $y_\alpha(x)$ $\alpha(\text{Re})=2$ кратно двум (рис. 6, а), систему собственных функций необходимо пополнить присоединенной собственной функцией. В данном случае такой функцией будет $b_0 y_2(x) \ln r / r^2$. Это означает, что бесконечно удаленная точка $r \rightarrow \infty$ является неаналитической. Было показано, что параметр b_0 для этого слагаемого определяется величиной расхода жидкости Q . Величина d_0 определяется z -компонентой момента количества движения L_z [20], f_0 – величиной Q_h .

В общем случае показатели степени $\alpha_n = \alpha_n(\text{Re}, Bt)$ составляют бесконечную последовательность, а соответствующие им собственные функции по аналогии с уравнением Лапласа имеют смысл магнитогидродинамических мультиполей (см. рис. 6). Произвольные постоянные, возникающие при собственных решениях, могут быть определены из краевых условий по заданным компонентам поля скорости и магнитного поля на сфере радиусом R_0 . Кроме этого, поскольку уравнения магнитной гидродинамики нелинейные, к общему решению линейной задачи нужно прибавить члены, возникающие из-за конвективных слагаемых. Выпишем первые несколько членов разложения скорости и магнитного поля так, чтобы учесть влияние магнитного поля на меридиональное течение жидкости, при этом положим $Bt=1$, чтобы первый член асимптотического разложения азимутального магнитного поля был порядка $1/r^2$:

$$w_r = -\frac{v}{r_0} \left(\left(u'_2 + y'_2 \ln \frac{r}{r_0} \right) \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 + u'_{23} \left(\frac{r_0}{r} \right)^\alpha + \right. \\ \left. + \left(u'_3 + v'_3 + 2z'_3 + (v'_3 + 2z'_3) \ln \frac{r}{r_0} + z'_3 \ln^2 \frac{r}{r_0} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 \right) + o(r^{-3}), \quad (35)$$

$$w_\theta = -\frac{v}{r_0 \sqrt{1-x^2}} \times \\ \times \left(y_2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 + (2-\alpha) u_{23} \left(\frac{r_0}{r} \right)^\alpha - \right. \\ \left. - \left(u_3 + v_3 \ln \frac{r}{r_0} + z_3 \ln^2 \frac{r}{r_0} \right) \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 \right) + o(r^{-3}), \quad (36)$$

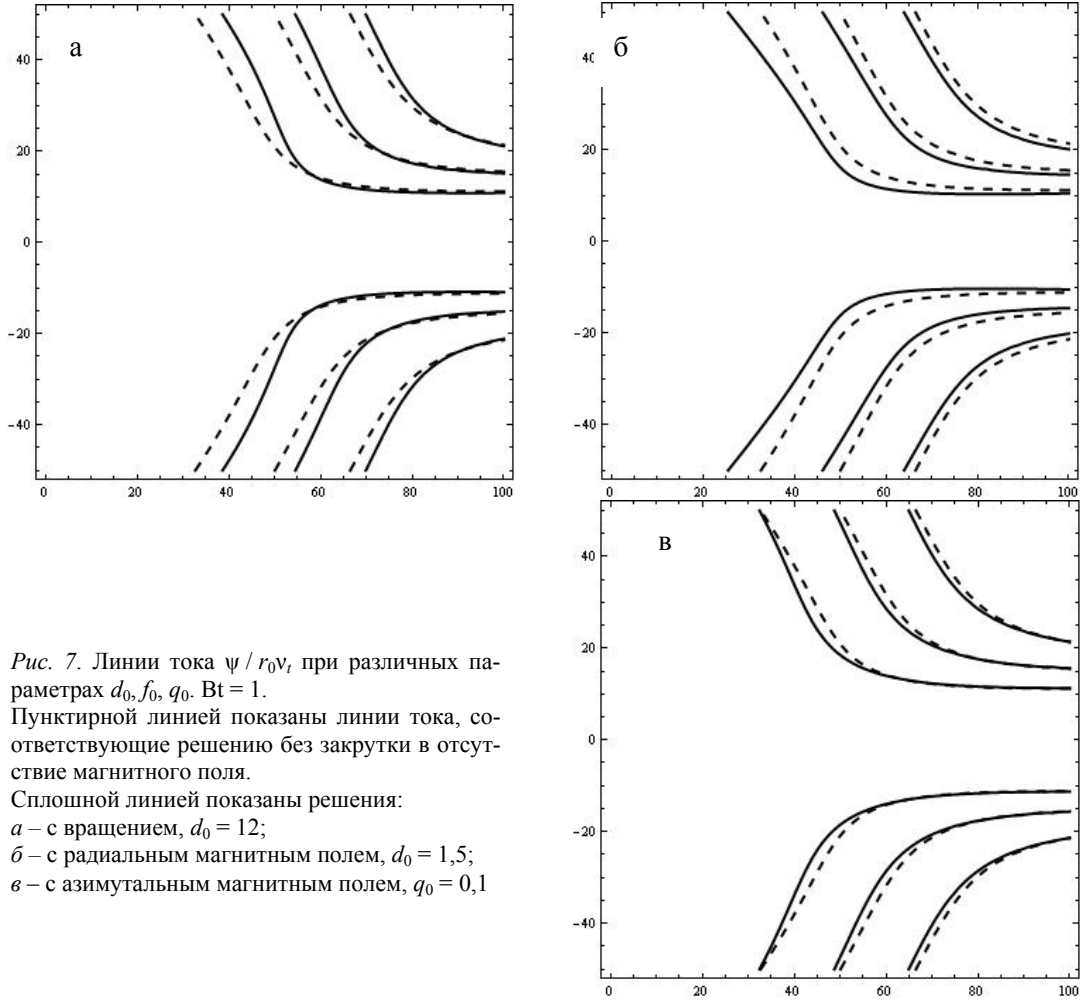


Рис. 7. Линии тока $\psi / r_0 v_t$ при различных параметрах d_0, f_0, q_0 . $Vt = 1$.

Пунктирной линией показаны линии тока, соответствующие решению без закрутки в отсутствие магнитного поля.

Сплошной линией показаны решения:

a – с вращением, $d_0 = 12$;

б – с радиальным магнитным полем, $d_0 = 1, 5$;

в – с азимутальным магнитным полем, $q_0 = 0, 1$

$$w_\varphi = \frac{v}{r_0 \sqrt{1-x^2}} \Gamma_2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 + o(r^{-2}), \quad (37)$$

$$H_r = -\frac{B}{r_0} F_2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 + o(r^{-2}),$$

$$H_\theta = 0 + o(r^{-2}),$$

$$H_\varphi = -\frac{B}{r_0 \sqrt{1-x^2}} G_2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 + o(r^{-2}), \quad (38)$$

где r_0 – характерный размер задачи. Если струйное течение создается вытекающей в затопленное жидкостью пространство той же жидкостью из подводящей трубки, то r_0 – радиус этой трубки. Значение $\alpha = \alpha(\text{Re})$ лежит в пределах $2 < \alpha < 3$ (рис. 6, *a*), u_{23} – соответствующее ему решение уравнения (24). Слагаемые скорости порядка r^{-3} появляются из-за конвективных членов.

Если подставить представление (35)–(38) в уравнения (1), (2), то можно получить громоздкие дифференциальные уравнения

на функции u_2, u_3, v_3, z_3 , которые приведены в [27] без учета магнитного поля. Функция u_2 определяет расход Q . В уравнение на u_3 функции Γ_2, F_2, G_2 входят квадратичным образом, в этом проявляется влияние закрутки струи и магнитного поля на меридиональное течение. Выпишем функцию тока

$$\begin{aligned} \frac{\Psi}{v r_0} = & y_1 \frac{r}{r_0} + y_2 \ln \frac{r}{r_0} + u_2 + u_{23} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\alpha-2} + \frac{r_0}{r} \times \\ & \times \left(u_3 + v_3 + 2z_3 + (v_3 + 2z_3) \ln \frac{r}{r_0} + z_3 \ln^2 \frac{r}{r_0} \right) + \\ & + o(1/r). \end{aligned}$$

Определим параметры течения, которые характеризуют три первых слагаемых функции тока. Ими являются $A, b_0, u_2'(1)$, а также r_0, v . Воспользуемся гипотезой о постоянстве турбулентной вязкости $v = v_t$ [28]. Основываясь на экспериментальных данных работы [29], где измерено дальнее поле

затопленной незакрученной круглой турбулентной струи воздуха, определены значения следующих параметров:

$$A = 1,0115,$$

$$b_0 = 0,3355,$$

$$u_2'(1) = -3039,2,$$

$$r_0 = 1,27 \text{ см},$$

$$v_i = 0,02374 \text{ м}^2/\text{с}.$$

Сравнение теории и эксперимента дает хорошее совпадение, причем поле скорости струи качественно описывается в конусе с раствором примерно 20° . Это ограничение связано с использованием гипотезы о постоянстве турбулентной вязкости и применении теории, разработанной для ламинарных течений, к турбулентным струям. Для указанных выше значений параметров течения проведены расчеты для оценки влияния закрутки струи и магнитного поля на распределение скорости (рис. 7). Благодаря закрутке, жидкость «подсасывается» к оси струи быстрее, характерный вид линий тока существенно меняется. В свою очередь магнитное поле подавляет движение. Аналогичный эффект существует и для осесимметричных струй в поперечном магнитном поле [30].

Выводы

В работе найдено новое семейство точных решений уравнений магнитной гидродинамики в классе конических течений, когда и скорость, и магнитное поле убывают как $1/r$ от начала координат. Разработан алгоритм расчета системы нелинейных дифференциальных уравнений, соответствующих автомодельной постановке задачи, когда течение вызвано источником гидродинамического импульса, расположенного на конце полубесконечного линейного проводника с током. Обнаружено, что при увеличении электрического тока в проводнике J в окрестности проводника возникает возвратное течение жидкости. Кроме этого, при увеличении J от нуля до некоторого значения $J_*(\text{Re}, \text{Bt})$ плотность тока j_r растет в любой точке пространства, однако при $J > J_*$ плотность тока j_r начинает монотонно убывать и стремится к нулю при

$J \rightarrow \infty$ во всей области течения за исключением некоторой окрестности вблизи проводника с током. При больших значениях J практически весь электрический ток, вытекающий из начала координат, течет в обратном направлении в узкой области вблизи проводника. Обнаруженный эффект записывания электрического тока имеет важные следствия. Исследования показали, что, как и в некоторых других задачах конического класса течений, регулярное решение существует не при всех значениях параметров задачи. При заданных Re , Bt увеличение электрического тока J может привести к потере существования автомодельного решения при некотором, рассчитанном в работе, значении $J_\infty(\text{Re}, \text{Bt})$. Величина $J_\infty(\text{Re}, \text{Bt})$ конечна при $\text{Bt} < 1$ и бесконечна в противном случае. По достижении этого значения становится невозможно удовлетворить граничное условие непротекания на полуоси с проводником. Получено аналитическое решение для этого случая.

Рассмотрена неавтомодельная задача струйного МГД течения, вызванного точечными источниками импульса, момента импульса, расхода жидкости и электрического тока, расположенными в начале координат. В этом случае главный член асимптотического разложения поля скорости на бесконечности описывается точным решением уравнений Навье – Стокса для затопленной струи (решением Слэзкина – Ландау – Сквайра). Построено общее асимптотическое решение задачи в бесконечно удаленной точке в виде суммы ряда по степеням обратного сферического радиуса, показатели которого $\alpha_n = \alpha_n(\text{Re}, \text{Bt})$ являются функциями числа Рейнольдса и Бэтчелора. Показано, что наличие интегралов сохранения и дополнительной симметрии в магнитогидродинамической системе приводит к постоянству показателей степени. Для полоидального магнитного поля показатели степени $\alpha = 2$ и $\alpha = 3$ для всех чисел Рейнольдса и Бэтчелора. Найдены аналитические выражения для собственных функций в этом случае. Показано, что для азимутального магнитного поля при $\text{Bt} = 1$ имеется нетривиальное решение при всех числах Рейнольдса для $\alpha = 2$, а при $\text{Bt} = 1/2$ нетривиальное решение существует для показателя степени $\alpha = 3$. Такое поведение свидетельствует о наличии скрытых интегралов

сохранения или симметрий для струйных МГД течений.

Для определенных значений параметров течения проведены расчеты для оценки влияния закрутки струи и магнитного поля на распределение скорости в дальнем поле МГД струи. Показано, что возникающее магнитное поле приводит к ослаблению струйного движения.

Список литературы

1. Бояревич В. В., Фрейберг Я. Ж., Шилова Е. И., Щербинин Э. В. Электровихревые течения. Рига: Зинатне, 1985. 315 с.
2. Жигулёв В. Н. Теория электрического разряда в движущейся проводящей среде // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. С. 1226.
3. Lundquist L. D. On the Hydromagnetic Viscous Flow Generated by a Diverging Electric Current // Ark. Fys. 1969. Vol. 40. P. 89.
4. Shercliff J. A. Fluid Motion due to an Electric Current // J. Fluid Mech. 1970. Vol. 40. P. 241.
5. Sozou C. On the Fluid Motion Induced by an Electric Current // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 46. P. 25.
6. Слѣзкин М. А. Об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости // Учен. зап. МГУ. 1934. Т. 2. С. 89.
7. Ландау Л. Д. Об одном новом точном решении уравнений Навье – Стокса // Докл. АН СССР. 1944. Т. 43. С. 299.
8. Squire H. B. The Round Laminar Jet // Q. J. Mech. Appl. Math. 1951. Vol. 4. P. 321.
9. Squire H. B. Jet Emerging from a Hole in a Plane // Phil. Mag. 1952. Ser. 7. Vol. 43. No. 343. P. 942.
10. Гольдитик М. А., Штерн В. Н., Яворский Н. И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука, 1989. 336 с.
11. Гольдитик М. А. Одно парадоксальное решение уравнений Навье – Стокса // ПММ. 1960. Т. 24, вып. 4. С. 610.
12. Serrin J. The Swirling Vortex // Phil. Trans. R. Soc. Lon. A. 1972. Vol. 271 (1214). P. 327.
13. Wu C.-S. A Class of Exact Solutions of the Magnetohydrodynamic Navier – Stokes Equations // Q. J. Mech. Appl. Math. 1961. Vol. 14. P. 1.
14. Щербинин Э. В. Об одном классе точных решений в магнитной гидродинамике // Магнит. гидродинамика 1969. № 4. С. 46.
15. Narain J. P., Uberoi M. S. On the Hydromagnetic Viscous Flow Generated by a Diverging Electric Current // Phys. Fluids. 1971. Vol. 14. P. 2687.
16. Гольдитик М. А., Штерн В. Н. Автомодельное гидромагнитное динамо // ЖЭТФ. 1981. Т. 96, вып. 5. С. 1728.
17. Петрунин А. А., Штерн В. Н. Бифуркация полоидального поля в течении, вызванном радиальным электрическим током // МЖГ. 1993. № 2. С. 4.
18. Lada C. J. Cold Outflows, Energetic Winds, and Enigmatic Jets around Young Stellar Objects // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1985. Vol. 23. P. 267.
19. Königl A. Stellar and Galactic Jets: Theoretical Issues // Can. J. Phys. 1986. Vol. 64. P. 362.
20. Scott H. A., Lovelace R. V. E. Swirling Hydrodynamic Jets in Viscous Accretion Flows // Astrphys. Space Science 1987. Vol. 129. P. 361.
21. Гольдитик М. А., Штерн В. Н. Генерация полоидального поля в струйных течениях // Письма в ЖЭТФ. 1989. Т. 49. С. 266.
22. Румер Ю. Б. Задача о затопленной струе // ПММ. 1952. Т. 16, вып. 2. С. 255.
23. Гольдитик М. А., Яворский Н. И. О затопленных струях // ПММ. 1986. Т. 50, вып. 4. С. 573.
24. Kurdyumov V. N. Far-Field Description of the Flow Produced by a Source of Both Momentum and Mass // J. Fluid Mech. 2005. Vol. 532. P. 191.
25. Цуккер М. С. Закрученная струя, распространяющаяся в пространстве, заполненном той же жидкостью // ПММ. 1955. Т. 19, вып. 4. С. 500.
26. Лойцянский Л. Г. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве // ПММ. 1953. Т. 17, вып. 1. С. 3.

27. Яворский Н. И. Теория затопленных струй и следов. Новосибирск, 1998. 242 с.
28. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
29. Hussein H. J., Capp S. P., George W. K. Velocity Measurements in a High-Reynolds-Number, Momentum-Conserving, Axisymmetric, Turbulent Jet // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 258. P. 31.
30. Davidson P. A. Magnetic Dumping of Jet and Vortices // J. Fluid Mech. 1995. Vol. 299. P. 153.

Материал поступил в редколлегию 22.08.2011

R. I. Mullyadzhyanov, N. I. Yavorsky

SUBMERGED JET OF A CONDUCTING FLUID IN THE PRESENCE OF THE MAGNETIC FIELD

We consider a steady flow of a viscous incompressible conducting fluid. New exact solution of the magnetohydrodynamic (MHD) equations is obtained, when the flow is induced by the point source of hydrodynamic momentum located at the end of a semi-infinite linear conductor with a set value of the electric current. The effects of the confinement of the current density and the loss of existence of the solution with the finite values of electric current and various values of the Reynolds number and the Batchelor number (magnetic Prandtl number) are found. The non-self-similar problem is considered, when the flow is induced by the point source of momentum, angular momentum, flow rate and electric current that are set at the origin. In this case, the first term of the asymptotic expansion of the velocity at the infinity is described by the exact solution of the Navier – Stokes equations of the submerged jet (Slezkin – Landau – Squire solution). We analyze the conservation laws. It is shown that the induced magnetic field reduces the intensity of the jet flow.

Keywords: magnetohydrodynamics, exact solution, jet flows.