

**АБЕРРАЦИИ ОБЪЕМНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО  
ГОЛОГРАММНОГО ОПТИЧЕСКОГО ЭЛЕМЕНТА \***

Методом характеристической функции получены аналитические выражения, позволяющие рассчитать монохроматические и хроматические aberrации третьего, пятого и седьмого порядков объемного цилиндрического голограммного оптического элемента (ГОЭ). Представлены формулы коэффициентов aberrаций третьего, пятого и седьмого порядков. Указывается, что в этих коэффициентах могут быть выделены коэффициенты aberrаций, возникающих из-за фотоиндуцированного, термоиндуцированного и деформационного изменений показателя преломления и размеров объемного цилиндрического ГОЭ. Показано, что в первом приближении ширина рабочей спектральной области для объемного отражающего цилиндрического ГОЭ обратно пропорциональна его толщине, а для объемного пропускающего ГОЭ – обратно пропорциональна квадрату его толщины.

*Ключевые слова:* голограммный оптический элемент, aberrации голограммы, спектральная селективность голограммы.

Известно, что в дальней ультрафиолетовой (50–100 нм) и в мягкой рентгеновской (1–50 нм) областях спектра из-за сильного поглощения излучения затруднено использование традиционных стеклянных оптических элементов. Известно также, что для отклонения и фокусировки излучения в этих диапазонах могут быть использованы дифракционные и голограммные элементы [1; 2], а в мягкой рентгеновской области – и многокомпонентные рефракционные элементы [3; 4]. Но невысокое относительное отверстие и связанное с этим низкое значение светосилы, а также низкая дифракционная эффективность ограничивают их практическое применение. Поэтому, для формирования изображений в этих областях спектра требуются элементы с более высокой дифракционной эффективностью, например объемные голограммные оптические элементы (ГОЭ). Для объемного ГОЭ, записанного двумя сферическими волнами, учет толщины при расчете aberrаций первого и

третьего порядков рассматривался, например, в [5; 6]. Для повышения светосилы объемного ГОЭ требуется увеличение его относительного отверстия, но при этом возрастают aberrации высших порядков, и возникает необходимость их исправления [7; 8]. Внеосевые aberrации высших порядков рассматривались только для тонких ГОЭ, например, в [9–11].

Целью работы является вывод аналитических выражений для коэффициентов aberrаций, позволяющих рассчитывать монохроматические и хроматические aberrации с первого по седьмой порядок объемного ГОЭ, регистрируемого двумя цилиндрическими волнами. В дальнейшем в работе этот объемный ГОЭ будем называть ГОЭ.

При расчете aberrаций ГОЭ предполагается, что его средний показатель преломления совпадает со средним показателем преломления окружающей диэлектрической среды. Также считается, что рабочая длина волны  $\lambda_c$  может отличаться от длины волны

---

\* Работа выполнена в рамках НИР № ГР 012008.03159, поддержанной Федеральной целевой программой «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 годы)».

записи  $\lambda_o$ , а средний показатель преломления  $n_c$  на стадии использования ГОЭ отличается от его среднего показателя  $n_o$  на стадии записи. Толщина образца голографической среды, в объеме которой формируется ГОЭ, предполагается меньше длины и ширины образца.

На рисунке (а) представлена рабочая схема пропускающего ГОЭ в сагиттальной плоскости, где  $P_c(x_c, 0, z_c)$  – точка предмета, и соответствующая ей  $P_i(x_i, 0, z_i)$  – точка изображения,  $M(x, 0, z)$  – произвольная точка объема ГОЭ. На рисунке (а, б) ось  $Oz$  декартовой системы координат является оптической осью ГОЭ и направлена перпендикулярно его поверхностям; представлена сагиттальная плоскость схемы записи этого ГОЭ опорной и объектной цилиндрическими волнами (б), где  $P_r(0, 0, z_r)$  – положение линейного источника (параллельного оси  $Oy$ ) опорной цилиндрической волны,  $P_o(0, 0, z_o)$  – положение линии схождения (параллельной оси  $Oy$ ) объектной цилиндрической волны,  $M'(x', 0, z')$  – точка объема ГОЭ при записи, соответствующая точке  $M(x, 0, z)$  при его использовании. Координаты точки  $M'(x', 0, z')$  равны

$$x' = \frac{x}{m_x}, z' = \frac{z}{m_z},$$

где  $m_x, m_z$  – коэффициенты усадки (набухания) объема ГОЭ вдоль осей  $Ox$  и  $Oz$  декартовой системы координат. Расстояния, указанные в рабочей схеме, обозначены как  $P_cM = l_c, MP_i = l_i$ , а в схеме записи как  $P_rM' = l_r, M'P_o = l_o, P_rO = z_r, OP_o = z_o$ .

Характеристическая функция  $V(x, 0, z)$  ГОЭ в сагиттальной плоскости записывается в виде [6; 12]

$$V(x, 0, z) = l_c - z_c \pm (l_i - z_i) - km(x, 0, z) \left( \frac{\lambda_c}{n_c} \right), \quad (1)$$

где  $m(x, 0, z) = (l_r - z_r \pm (l_o - z_o)) \left( \frac{n_o}{\lambda_o} \right)$  – количество периодов модуляции показателя преломления, коэффициента поглощения или толщины ГОЭ;  $n_o$  и  $n_c$  – значения показателя преломления ГОЭ при записи и использовании;  $\lambda_o$  – длина волны лазера при записи ГОЭ;  $\lambda_c$  – рабочая длина волны;  $k$  – порядок дифракции.

Верхний знак «плюс» в выражениях для  $V(x, 0, z)$ ,  $m(x, 0, z)$  и в последующих выра-

жениях соответствует отражающим ГОЭ, а нижний знак «минус» – пропускающим ГОЭ. Из-за пространственной и угловой селективности объемных ГОЭ практический интерес представляет случай, когда его поперечные размеры (диаметр) намного меньше расстояний  $z_c, z_i$  до плоскостей предмета и изображения, но больше размеров предмета и изображения. Кроме этого, считаем, что при записи отклонение от оптической оси источников опорной и объектной волн меньше поперечных размеров ГОЭ, а размеры ГОЭ меньше расстояний  $z_r, z_o$  от нее до источников опорной и объектной волн. Также считаем, что толщина ГОЭ много меньше расстояний  $z_c, z_i, z_r, z_o$ . В этом случае, разлагая расстояния  $l_c, l_i, l_r, l_o$  в ряд соответственно по величинам малости  $\frac{x_j}{z_j}, \frac{x}{z_j}, \frac{z}{z_j}$  ( $j = c, i, r, o$ ) и подставляя полу-

ченные выражения в (1), можно представить характеристическую функцию  $V(x, 0, z)$  в первых порядках разложения в виде суммы

$$V(x, 0, z) = V_{1r}(x) + V_{1v}(x, z) + V_{3r}(x) + V_{3v}(x, z) + V_{5r}(x) + V_{5v}(x, z) + V_{7r}(x) + V_{7v}(x, z) + \dots, \quad (2)$$

где

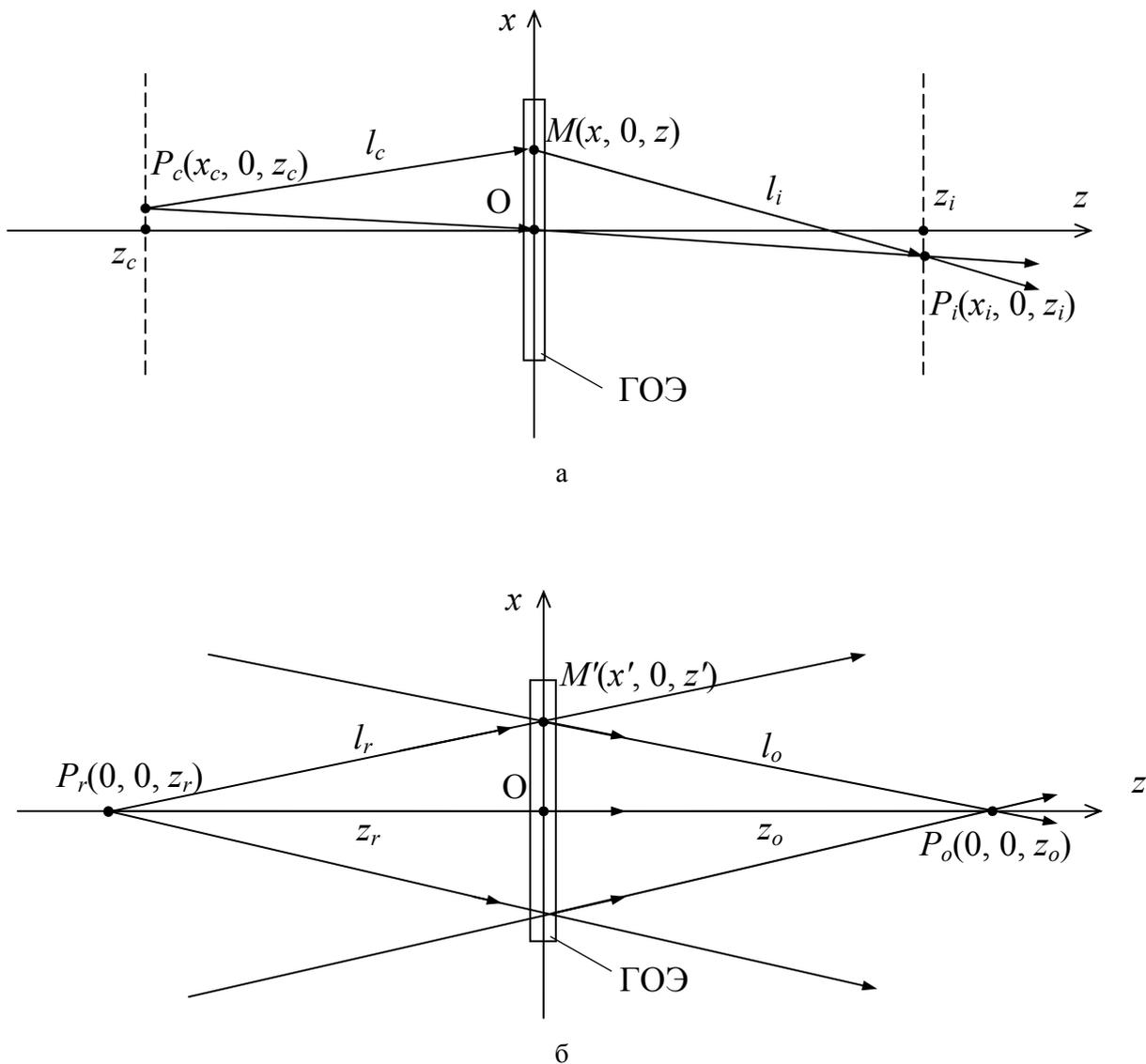
$V_{1r}(x) = 0,5x^2F_{200} - xB_{100}$  – члены разложения, характеризующие aberrации первого порядка тонкого ГОЭ;

$V_{1v}(x, z) = 0,5x^2(zF_{201} + z^2F_{202}) - z(B_{001} + zB_{002}) - xz(B_{101} + zB_{102})$  – члены разложения, характеризующие объемные aberrации первого порядка;

$V_{3r}(x), V_{5r}(x), V_{7r}(x)$  – члены разложения, характеризующие aberrации третьего, пятого и седьмого порядков тонкого ГОЭ;

$V_{3v}(x, z), V_{5v}(x, z), V_{7v}(x, z)$  – члены разложения, характеризующие объемные aberrации третьего, пятого и седьмого порядков.

В аналитическом виде выражения для  $V_{3r}(x), V_{3v}(x, z), V_{5r}(x), V_{5v}(x, z), V_{7r}(x), V_{7v}(x, z)$  и их коэффициентов aberrаций приведены в приложении. Известно, что характеристическая функция  $V(x, 0, z)$  может быть представлена в виде суммы характеристических функций тонкого ГОЭ и объемного ГОЭ [6]. В отличие от известной характеристической функции тонкого ГОЭ, в членах разложения  $V_{1v}(x, z), V_{3v}(x, z), V_{5v}(x, z), V_{7v}(x, z)$  учтены толщина, изменения толщины и показателя преломления ГОЭ. Аналитические выраже-



Сагиттальная плоскость рабочей схемы (а) и схемы записи (б) объемного цилиндрического ГОЭ

ния коэффициентов аберраций первого порядка ГОЭ

$$B_{100} = \frac{x_c}{z_c} \pm \frac{x_i}{z_i}, \quad B_{101} = \frac{x_c}{z_c^2} \pm \frac{x_i}{z_i^2},$$

$$B_{102} = \frac{x_c}{z_c^3} \pm \frac{x_i}{z_i^3},$$

$$F_{200} = \frac{1}{z_c} \pm \frac{1}{z_i} - \left( \frac{kn_o\lambda_c}{n_c\lambda_o m_x^2} \right) \left( \frac{1}{z_r} \pm \frac{1}{z_o} \right),$$

$$F_{201} = \frac{1}{z_c^2} \pm \frac{1}{z_i^2} - \left( \frac{kn_o\lambda_c}{n_c\lambda_o m_x^2 m_z} \right) \left( \frac{1}{z_r^2} \pm \frac{1}{z_o^2} \right),$$

$$F_{202} = \frac{1}{z_c^3} \pm \frac{1}{z_i^3} - \left( \frac{kn_o\lambda_c}{n_c\lambda_o m_x^2 m_z^2} \right) \left( \frac{1}{z_r^3} \pm \frac{1}{z_o^3} \right),$$

где  $\lambda_o, \lambda_c$  – длины волн при записи и использовании ГОЭ;  $n_o, n_c$  – значения показателя преломления ГОЭ при записи и использовании;  $m_x, m_z$  – коэффициенты усадки (набухания) объема ГОЭ вдоль осей  $Ox, Oz$ ;  $k$  – порядок дифракции.

Из характеристической функции  $V(x, 0, z)$  ГОЭ могут быть определены геометрические аберрации  $\Delta x$  изображения в сагиттальной плоскости по известной формуле

$$\Delta x = d_i \left( \frac{\partial V(x, 0, z)}{\partial x} \right), \quad (3)$$

где  $d_i = (x_i + z_i)^{1/2}$  – расстояние от центра ГОЭ до точки параксиального изображения. При этом отклонение  $\Delta x$  лучей от безаберрационного параксиального изображения представляется в виде суммы двух компонентов – aberrаций тонкого ГОЭ и объемных aberrаций. Например, соответственно для осевых aberrаций  $\Delta x_3$ ,  $\Delta x_5$ ,  $\Delta x_7$  третьего, пятого и седьмого порядков из (2), (3) получаем

$$\Delta x_3 = - \left( \frac{x^3 d_i}{2} \right) (S_{400} + 3zS_{401} + 6z^2 S_{402}),$$

$$\Delta x_5 = \left( \frac{3x^5 d_i}{8} \right) (S_{600} + 5zS_{601} + 15z^2 S_{602}),$$

$$\Delta x_7 = - \left( \frac{5x^7 d_i}{16} \right) (S_{800} + 7zS_{801}).$$

Аналогичным образом по формуле (3) могут быть получены выражения для вычисления других типов геометрических aberrаций высших порядков.

Выражения, описывающие поперечные геометрические хроматические aberrации, т. е. отклонения координат лучей в плоскости изображения на величину  $\Delta x_\lambda$  от параксиальной точки изображения, могут быть получены вычислением частной производной по рабочей длине волны  $\lambda_c$  из (3)

$$\Delta x_\lambda = \frac{\partial(\Delta x)}{\partial \lambda_c} \Delta \lambda_c, \quad (4)$$

где  $\Delta \lambda_c$  – изменение рабочей длины волны ГОЭ от заданного значения. В (4) диапазон изменений величины  $\Delta \lambda_c$  может быть определен из условия спектральной селективности ГОЭ

$$\left( \frac{\partial V_{1v}(x, z)}{\partial \lambda_c} + \frac{\partial V_{3v}(x, z)}{\partial \lambda_c} + \frac{\partial V_{5v}(x, z)}{\partial \lambda_c} + \frac{\partial V_{7v}(x, z)}{\partial \lambda_c} \right) \times \\ \times \Delta \lambda_c = \frac{\xi_x(x, z) \lambda_c}{2\pi}, \quad (5)$$

где  $\xi_x(x, z)$  – параметр, характеризующий отклонение от условия дифракции Брэгга. Для пропускающего ГОЭ при условии, что  $\frac{\partial V_{1v}(x, z)}{\partial \lambda_c}$  много больше

$$\frac{\partial V_{3v}(x, z)}{\partial \lambda_c}, \quad \frac{\partial V_{5v}(x, z)}{\partial \lambda_c}, \quad \frac{\partial V_{7v}(x, z)}{\partial \lambda_c},$$

получаем

$$\frac{\xi_x(x, z) \lambda_c}{2\pi} \approx \left( \frac{x^2 z}{2} \right) \left( \frac{\partial F_{101}}{\partial \lambda_c} + z \frac{\partial F_{102}}{\partial \lambda_c} \right) \Delta \lambda_c.$$

Или в первом приближении (при  $\frac{\partial F_{101}}{\partial \lambda_c}$  много больше  $z \frac{\partial F_{102}}{\partial \lambda_c}$ )

$$\Delta \lambda_c \approx \frac{\xi_x(x, z) \lambda_c}{\pi x^2 z \frac{\partial F_{101}}{\partial \lambda_c}},$$

где

$$\frac{\partial F_{101}}{\partial \lambda_c} = \left( \frac{k\mu}{\lambda_c m_x^2 m_z} \right) \left( \frac{1}{z_r^2} - \frac{1}{z_o^2} \right),$$

т. е. для пропускающего ГОЭ величина  $\Delta \lambda_c$  рабочего диапазона длин волн обратно пропорциональна его толщине и квадрату поперечного размера ( $\mu = \frac{n_o \lambda_c}{n_c \lambda_o}$  – отношение в

среде рабочей длины волны к длине волны записи ГОЭ).

Для отражающего ГОЭ из (5) в первом приближении при условии, что  $\frac{\partial V_{1v}(x, z)}{\partial \lambda_c}$

много больше

$$\frac{\partial V_{3v}(x, z)}{\partial \lambda_c}, \quad \frac{\partial V_{5v}(x, z)}{\partial \lambda_c}, \quad \frac{\partial V_{7v}(x, z)}{\partial \lambda_c},$$

получаем

$$\frac{\xi_x(x, z) \lambda_c}{2\pi} \approx \left( \frac{\partial B_{001}}{\partial \lambda_c} + z \frac{\partial B_{002}}{\partial \lambda_c} \right) z \Delta \lambda_c.$$

Таким образом, для отражающего ГОЭ (при условии, что  $\frac{\partial B_{001}}{\partial \lambda_c}$  много больше

$z \frac{\partial B_{002}}{\partial \lambda_c}$ )

$$\Delta \lambda_c \approx \frac{\xi_x(x, z) \lambda_c}{2\pi z \frac{\partial B_{001}}{\partial \lambda_c}},$$

т. е. величина рабочего диапазона  $\Delta \lambda_c$  длин волн обратно пропорциональна толщине и не зависит от линейного размера ГОЭ. Это важное отличие объемного отражающего ГОЭ как от тонкого отражающего, так и от объемного пропускающего ГОЭ.

Из (4) получаем следующие выражения для определения хроматических aberrаций ГОЭ, приводящих к изменению на  $\Delta x_\lambda$  координат лучей в плоскости изображения:

- при хроматической аберрации увеличения первого порядка

$$\Delta x_\lambda = (B_{100} + zB_{101} + z^2 B_{102}) \Delta d_\lambda,$$

где для пропускающего ГОЭ

$$\begin{aligned} \Delta d_\lambda &= \frac{\partial d_i}{\partial \lambda_c} \Delta \lambda_c \approx \frac{\partial z_i}{\partial \lambda_c} \Delta \lambda_c = \\ &= \left( \frac{k\mu z_i^2}{m_x^2 \lambda_c} \right) \left( \frac{1}{z_r} - \frac{1}{z_o} \right) \Delta \lambda_c; \end{aligned}$$

- при хроматической дефокусировке первого порядка

$$\begin{aligned} \Delta x_\lambda &= \left( \frac{\partial F_{200}}{\partial \lambda_c} + z \frac{\partial F_{201}}{\partial \lambda_c} + z^2 \frac{\partial F_{202}}{\partial \lambda_c} \right) \times \\ &\times x d_i \Delta \lambda_c + (F_{200} + zF_{201} + z^2 F_{202}) x \Delta d_\lambda, \end{aligned}$$

где для пропускающего ГОЭ

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{200}}{\partial \lambda_c} &= \left( \frac{k\mu}{\lambda_c m_x^2} \right) \left( \frac{1}{z_r} - \frac{1}{z_o} \right), \\ \frac{\partial F_{201}}{\partial \lambda_c} &= \left( \frac{k\mu}{\lambda_c m_x^2 m_z} \right) \left( \frac{1}{z_r^2} - \frac{1}{z_o^2} \right), \\ \frac{\partial F_{202}}{\partial \lambda_c} &= \left( \frac{k\mu}{\lambda_c m_x^2 m_z^2} \right) \left( \frac{1}{z_r^3} - \frac{1}{z_o^3} \right); \end{aligned}$$

- при осевой хроматической аберрации третьего порядка

$$\begin{aligned} \Delta x_\lambda &= -0,5 \left( \frac{\partial S_{400}}{\partial \lambda_c} + 3z \frac{\partial S_{401}}{\partial \lambda_c} + 6z^2 \frac{\partial S_{402}}{\partial \lambda_c} \right) \times \\ &\times x^3 d_i \Delta \lambda_c - 0,5 (S_{400} + 3zS_{401} + 6z^2 S_{402}) x^3 \Delta d_\lambda, \end{aligned}$$

где для пропускающего ГОЭ

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{400}}{\partial \lambda_c} &= \left( \frac{k\mu}{\lambda_c m_x^4} \right) \left( \frac{1}{z_r^3} - \frac{1}{z_o^3} \right), \\ \frac{\partial S_{401}}{\partial \lambda_c} &= \left( \frac{k\mu}{\lambda_c m_x^4 m_z} \right) \left( \frac{1}{z_r^4} - \frac{1}{z_o^4} \right), \\ \frac{\partial S_{402}}{\partial \lambda_c} &= \left( \frac{k\mu}{\lambda_c m_x^4 m_z^2} \right) \left( \frac{1}{z_r^5} - \frac{1}{z_o^5} \right); \end{aligned}$$

- при осевой хроматической аберрации пятого порядка

$$\begin{aligned} \Delta x_\lambda &= 0,375 \left( \frac{\partial S_{600}}{\partial \lambda_c} + 5z \frac{\partial S_{601}}{\partial \lambda_c} + 15z^2 \frac{\partial S_{602}}{\partial \lambda_c} \right) \times \\ &\times x^5 d_i \Delta \lambda_c + 0,375 (S_{600} + 5zS_{601} + 15z^2 S_{602}) x^5 \Delta d_\lambda, \end{aligned}$$

где для пропускающего ГОЭ

$$\frac{\partial S_{600}}{\partial \lambda_c} = \left( \frac{k\mu}{\lambda_c m_x^6} \right) \left( \frac{1}{z_r^5} - \frac{1}{z_o^5} \right),$$

$$\frac{\partial S_{601}}{\partial \lambda_c} = \left( \frac{k\mu}{\lambda_c m_x^6 m_z} \right) \left( \frac{1}{z_r^6} - \frac{1}{z_o^6} \right),$$

$$\frac{\partial S_{602}}{\partial \lambda_c} = \left( \frac{k\mu}{\lambda_c m_x^6 m_z^2} \right) \left( \frac{1}{z_r^7} - \frac{1}{z_o^7} \right);$$

- при осевой хроматической аберрации седьмого порядка

$$\Delta x_\lambda = -0,3125 \left( \frac{\partial S_{800}}{\partial \lambda_c} + 7z \frac{\partial S_{801}}{\partial \lambda_c} \right) \times$$

$$\times x^7 d_i \Delta \lambda_c - 0,3125 (S_{800} + 7zS_{801}) x^7 \Delta d_\lambda,$$

где для пропускающего ГОЭ

$$\frac{\partial S_{800}}{\partial \lambda_c} = \left( \frac{k\mu}{\lambda_c m_x^8} \right) \left( \frac{1}{z_r^7} - \frac{1}{z_o^7} \right),$$

$$\frac{\partial S_{801}}{\partial \lambda_c} = \left( \frac{k\mu}{\lambda_c m_x^8 m_z} \right) \left( \frac{1}{z_r^8} - \frac{1}{z_o^8} \right).$$

Получаем, что хроматические аберрации ГОЭ складываются из хроматических аберраций тонкого ГОЭ и объемной хроматической аберрации, зависящей от толщины ГОЭ. Аналогичным образом по формуле (4) могут быть вычислены другие типы хроматических аберраций высших порядков ГОЭ. Следует отметить, что учет угловой и пространственной селективности ГОЭ приводит к уменьшению всех аберраций по сравнению с соответствующими аберрациями тонкого ГОЭ [12]. Причиной этого является уменьшение объема ГОЭ, в котором еще выполняется условие дифракции Брэгга. Меньший «рабочий» объем ГОЭ одновременно снижает его дифракционную эффективность. С практической точки зрения важной особенностью является повышение глубины резкости изображения вследствие уменьшения аберраций [12]. Повышенная глубина резкости ГОЭ особенно важна в таких областях спектра, как дальний ультрафиолетовый (50–100 нм) и мягкий рентгеновский диапазоны, где процессы юстировки и настройки ГОЭ выполняются в вакууме.

Изменение  $\Delta n_c$  показателя преломления ГОЭ на стадии его использования может быть представлено в виде

$$\Delta n_c = n_c - n = \Delta n_f + \Delta n_t + \Delta n_d, \quad (6)$$

где  $n$  – начальное значение показателя преломления при использовании ГОЭ;  $\Delta n_f$  и  $\Delta n_t$  – фото- и термоиндуцированные изменения показателя преломления;  $\Delta n_d$  – изменение показателя преломления из-за деформации ГОЭ. При этом изменение пока-

зателя преломления  $\Delta n_c$  много меньше его начального значения  $n$ .

Относительные изменения  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_z$  размеров ГОЭ вдоль осей  $Ox$ ,  $Oz$  системы координат могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \Delta m_x &= 1 - m_x = \Delta m_{x,f} + \Delta m_{x,t} + \Delta m_{x,d}, \\ \Delta m_z &= 1 - m_z = \Delta m_{z,f} + \Delta m_{z,t} - \Delta m_{z,d}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\Delta m_{x,f}$ ,  $\Delta m_{z,f}$  – относительные фотоиндуцированные, а  $\Delta m_{x,t}$ ,  $\Delta m_{z,t}$  – относительные термоиндуцированные изменения размеров ГОЭ,  $\Delta m_{x,d}$ ,  $\Delta m_{z,d}$  – относительные изменения размеров из-за деформации объема ГОЭ. Предполагается, что в (7) относительные изменения размеров ГОЭ  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_z$  много меньше единицы. Под относительным изменением размера ГОЭ подразумевается отношение изменения размера к его начальной величине. Известно, что фотоиндуцированные изменения показателя преломления и размеров динамического ГОЭ возникают, например, из-за протекающих в его объеме фотохимических реакций (просветление или потемнение фотохромных и фотополимерных голографических материалов). При значительной интенсивности световой волны следует учитывать зависимость показателя преломления ГОЭ от интенсивности этой волны, т. е. влияние оптических нелинейных эффектов (оптический эффект Керра, самофокусировка, самодифракция) на aberrации ГОЭ. Термоиндуцированные изменения показателя преломления и размеров возникают из-за увеличения температуры ГОЭ и характеризуются соответственно его термооптическим коэффициентом и коэффициентом температурного расширения. Упругие деформационные изменения показателя преломления и размеров ГОЭ возникают из-за изменения внутреннего напряжения ГОЭ и характеризуются соответственно коэффициентом фотоупругости и модулем упругости. Неупругие деформационные изменения показателя преломления и размеров имеют место при пластической деформации ГОЭ.

Из условия  $F_{200} = 0$  получаем, что изменения (6), (7) показателя преломления и размеров ГОЭ приводят к изменению  $z_i$  на величину

$$\begin{aligned} \Delta z_i &\approx \left( \frac{k\lambda_c z_i^2}{\lambda_o} \right) \left( \frac{1}{z_r} \pm \frac{1}{z_o} \right) \times \\ &\times \left( 1 - \frac{n}{n_o} - \frac{\Delta n_c}{n_o} - 2\Delta m_x \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (6)–(8) в выражения коэффициентов aberrаций, можно в явном виде выделить в их вклад aberrаций, возникающих из-за фотоиндуцированного, термоиндуцированного и деформационного изменений показателя преломления и размеров ГОЭ. Этот вклад может быть достаточно значительным. Так, относительное изменение размера  $\Delta m_x$  динамических фотополимерных голографических сред может достигать 0,05. Тогда из (8), пренебрегая изменением показателя преломления ( $n = n_o$ ,  $\Delta n_c \ll n_o$ ), получаем, например, для полимерного пропускающего ГОЭ (с рабочей длиной волны  $\lambda_c = 46$  нм, фокусным расстоянием  $F = 1$  мм) относительное изменение  $\Delta z_i/z_i \sim 0,1z_i/F$ . Расчеты показывают, что это приводит к увеличению коэффициентов aberrаций пятого и седьмого порядков и к росту, например, остаточной осевой aberrации пятого порядка этого ГОЭ более чем в 5 раз, а осевой aberrации седьмого порядка более чем в 3 раза. Для ГОЭ с исправленными aberrациями высших порядков [8] изменение показателя преломления приводит к уменьшению его «эффективного» диаметра и соответственно к увеличению дифракционного пятна Эри, что, в свою очередь, приводит к ухудшению разрешения ГОЭ.

Таким образом, разложением характеристической функции получены аналитические выражения для коэффициентов двух типов aberrаций первого порядка, пяти типов aberrаций третьего порядка, девяти типов aberrаций пятого порядка и четырнадцати типов aberrаций седьмого порядка. В качестве примеров приводятся выражения, позволяющие рассчитать осевые монохроматические и хроматические aberrации третьего, пятого и седьмого порядков объемного цилиндрического ГОЭ с неизотропной усадкой. Показано, что в первом приближении ширина рабочей спектральной области для объемного отражающего цилиндрического ГОЭ обратно пропорциональна его толщине, а для объемного пропускающего ГОЭ – обратно пропорциональна квадрату его толщины. Полученные формулы применимы для расчета aberrаций не только объемного цилиндрического ГОЭ (с большим относительным отверстием), но и объемной цилиндрической зонной пластины.

**Список литературы**

1. Глушкин Е. С., Кулипанов Г. Н., Кезерашвили Г. Я., Пиндюрин В. Ф., Скринский Л. Н., Соколов А. С., Ильинский П. П. Исследование излучения из спирального ондулятора, установленного на накопителе ВЭПП-2М, как источника для рентгеновской микроскопии и голографии // Рентгеновская оптика и микроскопия: Пер. с англ. / Под ред. Г. Шмала, Д. Рудольфа. М.: Мир, 1987. 463 с.

2. Rudolph D., Schmahl G., Johnson R. L., Speer R. J. Soft X-Ray Performance of a Plane Reflection Hologram // Appl. Opt. 1973. Vol. 12. No. 8. P. 1731–1732.

3. Snigirev A., Kohn V., Snigireva I., Lengeler B. A Compound Refractive Lens for Focusing High-Energy X-Rays // Nature. 1996. Vol. 384. No. 6604. P. 49–51.

4. Аристов В. В., Шабельников Л. Г. Современные достижения рентгеновской оптики преломления // УФН. 2008. Т. 178, № 1. С. 61–83.

5. Forshaw M. R. B. The Imaging Properties and Aberrations of Thick Transmission Holograms // Opt. Acta. 1973. Vol. 20. No. 9. P. 669–686.

6. Ган М. А. Теория и методы расчета голограммных и киноформных оптических элементов. Л.: ГОИ, 1984. 140 с.

7. Грейсх Г. И., Степанов С. А. Голографическое формирование зонной структуры дифракционных линз с заданными оптическими характеристиками // Голографические оптические элементы и системы. СПб.: Наука, 1994. С. 98–103.

8. Батомункуев Ю. Ц., Мещеряков Н. А. Расчет рентгеновской голограммной линзы для нанометрового диапазона спектра // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Физика. 2009. Т. 4, вып. 2. С. 3–7.

9. Latta J. N. Fifth-Order Hologram Aberrations // Appl. Optics. 1971. Vol. 10. No. 3. P. 666–667.

10. Mehta P. S., Rao K., Syam Sunder, Hradaynath R. Higher Order Aberrations in Holographic Lenses // Appl. Opt. 1982. Vol. 21. No. 24. P. 4553–4558.

11. Rebordão J. M. General Form for Aberration Coefficients in Holography // J. Opt. Soc. Am. A. 1984. Vol. 1. No. 7. P. 788–790.

12. Батомункуев Ю. Ц. Особенности расчета рентгеновских объемных голограммных элементов // Тр. V Междунар. конф. «ГОЛО-ЭКСПО-2008». СПб., 2008. С. 249–253.

Материал поступил в редколлегию 09.06.2012

*Приложение*

Члены разложения третьего порядка характеристической функции объемного цилиндрического ГОЭ

$$V_{3f}(x) = -\frac{S_{400}x^4}{8} + \frac{C_{300}x^3}{2} - \frac{A_{200}x^2}{2} - \frac{E_{200}x^2}{4} + \frac{D_{100}x}{2},$$

$$V_{3v}(x, z) = -\frac{(3zS_{401} + 6z^2S_{402})x^4}{8} + \frac{(3zC_{301} + 6z^2C_{302})x^3}{2} - \frac{(3zA_{201} + 6z^2A_{202})x^2}{2} - \frac{(3zE_{201} + 6z^2E_{202})x^2}{4} + \frac{(3zD_{101} + 6z^2D_{102})x}{2},$$

где коэффициенты аберраций третьего порядка  $\left( \mu = \frac{n_o \lambda_c}{n_c \lambda_o} \right)$

$$S_{400} = \frac{1}{z_c^3} \pm \frac{1}{z_i^3} - \left( \frac{k\mu}{m_x^4} \right) \left( \frac{1}{z_r^3} \pm \frac{1}{z_o^3} \right),$$

$$\begin{aligned}
S_{401} &= \frac{1}{z_c^4} \pm \frac{1}{z_i^4} - \left( \frac{k\mu}{m_x^4 m_z} \right) \left( \frac{1}{z_r^4} \pm \frac{1}{z_o^4} \right), \\
S_{402} &= \frac{1}{z_c^5} \pm \frac{1}{z_i^5} - \left( \frac{k\mu}{m_x^4 m_z^2} \right) \left( \frac{1}{z_r^5} \pm \frac{1}{z_o^5} \right), \\
C_{300} &= \frac{x_c}{z_c^3} \pm \frac{x_i}{z_i^3}, \quad C_{301} = \frac{x_c}{z_c^4} \pm \frac{x_i}{z_i^4}, \quad C_{302} = \frac{x_c}{z_c^5} \pm \frac{x_i}{z_i^5}, \\
A_{200} &= \frac{x_c^2}{z_c^3} \pm \frac{x_i^2}{z_i^3}, \quad A_{201} = \frac{x_c^2}{z_c^4} \pm \frac{x_i^2}{z_i^4}, \quad A_{202} = \frac{x_c^2}{z_c^5} \pm \frac{x_i^2}{z_i^5}, \\
E_{200} &= \frac{x_c^2}{z_c^3} \pm \frac{x_i^2}{z_i^3}, \quad E_{201} = \frac{x_c^2}{z_c^4} \pm \frac{x_i^2}{z_i^4}, \quad E_{202} = \frac{x_c^2}{z_c^5} \pm \frac{x_i^2}{z_i^5}, \\
D_{100} &= \frac{x_c^3}{z_c^3} \pm \frac{x_i^3}{z_i^3}, \quad D_{101} = \frac{x_c^3}{z_c^4} \pm \frac{x_i^3}{z_i^4}, \quad D_{102} = \frac{x_c^3}{z_c^5} \pm \frac{x_i^3}{z_i^5}.
\end{aligned}$$

Члены разложения пятого порядка характеристической функции объемного цилиндрического ГОЭ

$$\begin{aligned}
V_{5r}(x) &= \frac{S_{600}x^6}{16} - \frac{3C_{500}x^5}{8} + \frac{3S_{400}x^4}{16} + \frac{3P_{400}x^4}{4} - \frac{3C_{300}x^3}{4} - \frac{Z_{300}x^3}{2} + \frac{3A_{200}x^2}{4} + \frac{3E_{200}x^2}{16} - \frac{3D_{100}x}{8}, \\
V_{5v}(x, z) &= \frac{5S_{601}x^6z}{16} - \frac{15C_{501}x^5z}{8} + \frac{15S_{401}x^4z}{16} + \frac{15P_{401}x^4z}{4} - \frac{15C_{301}x^3z}{4} - \\
&\quad - \frac{5Z_{301}x^3z}{2} + \frac{15A_{201}x^2z}{4} + \frac{15E_{201}x^2z}{16} - \frac{15D_{101}xz}{8},
\end{aligned}$$

где коэффициенты аберраций пятого порядка  $\left( \mu = \frac{n_o \lambda_c}{n_c \lambda_o} \right)$

$$\begin{aligned}
S_{600} &= \frac{1}{z_c^5} \pm \frac{1}{z_i^5} - \left( \frac{k\mu}{m_x^6} \right) \left( \frac{1}{z_r^5} \pm \frac{1}{z_o^5} \right), \quad S_{601} = \frac{1}{z_c^6} \pm \frac{1}{z_i^6} - \left( \frac{k\mu}{m_x^6 m_z} \right) \left( \frac{1}{z_r^6} \pm \frac{1}{z_o^6} \right), \\
S_{602} &= \frac{1}{z_c^7} \pm \frac{1}{z_i^7} - \left( \frac{k\mu}{m_x^6 m_z^2} \right) \left( \frac{1}{z_r^7} \pm \frac{1}{z_o^7} \right), \\
C_{500} &= \frac{x_c}{z_c^5} \pm \frac{x_i}{z_i^5}, \quad C_{501} = \frac{x_c}{z_c^6} \pm \frac{x_i}{z_i^6}, \\
S_{400} = P_{400} &= \frac{x_c^2}{z_c^5} \pm \frac{x_i^2}{z_i^5}, \quad S_{401} = P_{401} = \frac{x_c^2}{z_c^6} \pm \frac{x_i^2}{z_i^6}, \\
C_{300} = Z_{300} &= \frac{x_c^3}{z_c^5} \pm \frac{x_i^3}{z_i^5}, \quad C_{301} = Z_{301} = \frac{x_c^3}{z_c^6} \pm \frac{x_i^3}{z_i^6}, \\
A_{200} = E_{200} &= \frac{x_c^4}{z_c^5} \pm \frac{x_i^4}{z_i^5}, \quad A_{201} = E_{201} = \frac{x_c^4}{z_c^6} \pm \frac{x_i^4}{z_i^6}, \\
D_{100} &= \frac{x_c^5}{z_c^5} \pm \frac{x_i^5}{z_i^5}, \quad D_{101} = \frac{x_c^5}{z_c^6} \pm \frac{x_i^5}{z_i^6}.
\end{aligned}$$

Члены разложения седьмого порядка характеристической функции объемного цилиндрического ГОЭ

$$\begin{aligned}
 V_{7i}(x) &= -\frac{5S_{800}x^8}{128} + \frac{5C_{700}x^7}{16} - \frac{5S_{600}x^6}{32} - \frac{15P_{600}x^6}{16} + \frac{15C_{500}x^5}{16} + \frac{5P_{500}x^5}{4} - \frac{15S_{400}x^4}{64} - \\
 &\quad - \frac{15P_{400}x^4}{8} - \frac{5Z_{400}x^4}{8} + \frac{15C_{300}x^3}{16} + \frac{5Z_{300}x^3}{4} - \frac{15A_{200}x^2}{16} - \frac{5E_{200}x^2}{32} + \frac{5D_{100}x}{16}, \\
 V_{7v}(x) &= -\frac{35S_{801}x^8z}{128} + \frac{35C_{701}x^7z}{16} - \frac{35S_{601}x^6z}{32} - \frac{105P_{601}x^6z}{16} + \frac{105C_{501}x^5z}{16} + \frac{35P_{501}x^5z}{4} - \frac{105S_{401}x^4z}{64} - \\
 &\quad - \frac{105P_{401}x^4z}{8} - \frac{35Z_{401}x^4z}{8} + \frac{105C_{301}x^3z}{16} + \frac{35Z_{301}x^3z}{4} - \frac{105A_{201}x^2z}{16} - \frac{35E_{201}x^2z}{32} + \frac{35D_{101}xz}{16},
 \end{aligned}$$

где коэффициенты аберраций седьмого порядка  $\left( \mu = \frac{n_o \lambda_c}{n_c \lambda_o} \right)$

$$\begin{aligned}
 S_{800} &= \frac{1}{z_c^7} \pm \frac{1}{z_i^7} - \left( \frac{k\mu}{m_x^8} \right) \left( \frac{1}{z_r^7} \pm \frac{1}{z_o^7} \right), & S_{801} &= \frac{1}{z_c^8} \pm \frac{1}{z_i^8} - \left( \frac{k\mu}{m_x^8 m_z} \right) \left( \frac{1}{z_r^8} \pm \frac{1}{z_o^8} \right), \\
 C_{700} &= \frac{x_c}{z_c^7} \pm \frac{x_i}{z_i^7}, & C_{701} &= \frac{x_c}{z_c^8} \pm \frac{x_i}{z_i^8}, \\
 S_{600} = P_{600} &= \frac{x_c^2}{z_c^7} \pm \frac{x_i^2}{z_i^7}, & S_{601} = P_{601} &= \frac{x_c^2}{z_c^8} \pm \frac{x_i^2}{z_i^8}, \\
 C_{500} = P_{500} &= \frac{x_c^3}{z_c^7} \pm \frac{x_i^3}{z_i^7}, & C_{501} = P_{501} &= \frac{x_c^3}{z_c^8} \pm \frac{x_i^3}{z_i^8}, \\
 S_{400} = P_{400} = Z_{400} &= \frac{x_c^4}{z_c^7} \pm \frac{x_i^4}{z_i^7}, & C_{401} = P_{401} = Z_{401} &= \frac{x_c^4}{z_c^8} \pm \frac{x_i^4}{z_i^8}, \\
 C_{300} = Z_{300} &= \frac{x_c^5}{z_c^7} \pm \frac{x_i^5}{z_i^7}, & C_{301} = Z_{301} &= \frac{x_c^5}{z_c^8} \pm \frac{x_i^5}{z_i^8}, \\
 A_{200} = E_{200} &= \frac{x_c^6}{z_c^7} \pm \frac{x_i^6}{z_i^7}, & A_{201} = E_{201} &= \frac{x_c^6}{z_c^8} \pm \frac{x_i^6}{z_i^8}, \\
 D_{100} &= \frac{x_c^7}{z_c^7} \pm \frac{x_i^7}{z_i^7}, & D_{101} &= \frac{x_c^7}{z_c^8} \pm \frac{x_i^7}{z_i^8}.
 \end{aligned}$$

Yu. Ts. Batomunkuev

#### ABERRATIONS OF VOLUME CYLINDRICAL HOLOGRAPHIC OPTICAL ELEMENT

The analytical expressions allowed to calculate the third-, fifth- and seventh-order monochromatic and chromatic aberrations are obtained for the cylindrical volume holographic optical element by method of the characteristic function. The formulas for coefficients of third-, fifth- and seventh-order aberrations are presented. It is noted that coefficients of the aberrations arising because of photo induced, thermally induced and deformation changes of refractive index and of sizes of the cylindrical volume holographic optical element can be isolated in these coefficients. It is shown that width of the working spectral range for reflection cylindrical volume holographic optical element is inversely proportional to its thickness and for transmission holographic element is inversely proportional to square its thickness.

*Keywords:* holographic optical element, aberration of hologram, spectral selectivity.