

**С. Н. Яковенко**Институт теоретической и прикладной механики  
им. С. А. Христиановича СО РАН  
ул. Институтская, 4/1, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: yakovenk@itam.nsc.ru

**БЮДЖЕТ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ РЕЙНОЛЬДСА  
В ОБЛАСТИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ  
ПРИ ОБРУШЕНИИ ВНУТРЕННИХ ВОЛН \***

Результаты прямого численного моделирования используются для получения статистических моментов в квазистационарной области турбулентности, формирующейся в устойчиво стратифицированном течении над препятствием после обрушения внутренних волн. Исследованы эволюция по времени и пространственное поведение компонент тензора напряжений Рейнольдса и бюджета уравнений переноса напряжений Рейнольдса. Такой анализ полезен для изучения области турбулентности и ее энергетических характеристик в терминах статистических моментов, для проверки гипотез замыкания в моделях турбулентности и для оценки геофизически важных величин. В частности, вычисленное глобальное значение эффективности перемешивания составляет около 0,2, как и в океанологических приложениях. Предложены простые алгебраические соотношения между турбулентной кинетической энергией и скоростью ее диссипации. В уравнении для тензора напряжений Рейнольдса, член корреляции пульсаций давления и сдвига скорости обеспечивает перераспределение нормальных компонент напряжений согласно аппроксимации стремления к изотропии, тогда как диссипативный тензор приближенно следует предположению локальной изотропии.

*Ключевые слова:* устойчивая стратификация, обрушение внутренних волн, течение над препятствием, прямое численное моделирование, модели турбулентности, статистические моменты, кинетическая энергия турбулентности.

**Введение**

Обрушение внутренних волн, генерируемых топографией, при некоторых параметрах течения может приводить к образованию областей турбулентности, наблюдавшихся в опытах с буксируемым телом [1] и в реальных течениях окружающей среды. Эта проблема недавно исследовалась [2] путем прямого численного моделирования (DNS) уравнений Навье – Стокса при использовании многоблочной архитектуры и параллельных компьютеров в расчетах с высоким разрешением. Изменения плотности учиты-

вались в приближении Буссинеска, а для предотвращения отражения волн от входной и выходной границ вводились поглощающие слои. Внутренние волны генерировались двумерным препятствием косинусоидальной формы (холмом) высотой  $h$  в потоке с постоянными значениями градиента плотности и скорости  $U$  на входе. В DNS-расчетах при числах Рейнольдса  $Re = Uh/\nu = 4000$  и Шмидта  $Sc = \nu/\kappa = 1$ , с разрешением равномерной сетки  $\Delta x = 0,0195h$  имело место условие  $\Delta x/\eta < 3$  (где  $\eta$  – Колмогоровский микромасштаб, приближенно найденный

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00050а) и Президиума СО РАН (Междисциплинарный интеграционный проект № 132 за 2012 г.).

Автор выражает благодарность проф. И. П. Кастро и д-ру Т. Г. Томасу за помощь в получении данных прямого численного моделирования и их обсуждение, а также проф. А. Ф. Курбацкому за внимание к вопросам моделирования статистических моментов второго порядка.

из скорости вязкой диссипации кинетической энергии турбулентности). Обрушение волн воспроизводится, если число Фруда  $F_h$  (основанное на  $h$ ) мало, как и в [1]. Результаты вычислений, полученные в [2] при  $F_h = 0,6$ , были представлены мгновенными и осредненными траекториями частиц жидкости и изолиниями плотности, пространственными и временными спектрами, членами баланса в уравнении для кинетической энергии турбулентности, полученными при осреднении по размаху препятствия в области перемешивания. Было показано, что возникающая область турбулентности является полностью развитой и квазистационарной в течение относительно длительного периода ( $35 \leq t \leq 55$ ), что также было использовано для осреднения по времени.

В настоящей работе на основе данных [2] получены различные характеристики среднего движения и турбулентности в течении с двумерным препятствием и устойчивой стратификацией (как и в [3] для изотермического потока в плоском канале): компоненты векторов средней скорости и завихренности, тензоры напряжений Рейнольдса, турбулентная кинетическая энергия, члены баланса в уравнениях переноса для турбулентных напряжений. Анализ этих величин полезен для изучения поведения области турбулентности и ее энергетики, для проверки моделей турбулентности и оценки таких геофизически важных величин, как, например, эффективность перемешивания.

### Уравнения переноса для напряжений Рейнольдса

Из уравнений Навье – Стокса, записанных в приближении Буссинеска, можно получить безразмерные уравнения переноса для напряжений Рейнольдса  $\langle u'_i u'_j \rangle$  и кинетической энергии турбулентности  $k = \langle u'_i u'_i \rangle / 2$ :

$$\begin{aligned} \partial \langle u'_i u'_j \rangle / \partial t = & - \\ & -A_{ij} + M_{ij} + T_{ij} + D_{ij} + P_{ij} + G_{ij} + F_{ij} - E_{ij}, \\ \partial k / \partial t = & -A_k + M_k + T_k + D_k + P_k + G_k - E_k \\ & (F_k = 0), \end{aligned}$$

где скорость изменения (левая часть) сбалансирована членами адвекции ( $A$ ), молекулярной диффузии ( $M$ ), турбулентной диффузии за счет тройных корреляций ( $T$ ),

диффузии давления ( $D$ ), порождения средним сдвигом скорости ( $P$ ), порождения плавучести ( $G$ ), корреляций с пульсацией давления ( $F$ ), диссипации ( $E$ ):

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \langle u_k \rangle \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_k}, \quad M_{ij} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_k^2}, \\ T_{ij} &= -\frac{\partial \langle u'_i u'_j u'_k \rangle}{\partial x_k}, \quad D_{ij} = -\frac{\partial \langle p' u'_i \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle p' u'_j \rangle}{\partial x_i}, \\ A_k &= \langle u_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i}, \quad M_k = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 k}{\partial x_i^2}, \\ T_k &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \langle u'_i u'_j u'_k \rangle}{\partial x_j}, \quad D_k = -\frac{\partial \langle p' u'_i \rangle}{\partial x_i}, \\ P_{ij} &= -\langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial \langle u'_j \rangle}{\partial x_k} - \langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial \langle u'_i \rangle}{\partial x_k}, \\ G_{ij} &= -\frac{\delta_{i3}}{F_h^2} \langle u'_j f' \rangle - \frac{\delta_{j3}}{F_h^2} \langle u'_i f' \rangle, \\ F_{ij} &= \left\langle p' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle, \\ P_k &= -\langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u'_i \rangle}{\partial x_j}, \quad G_k = -\frac{\delta_{i3}}{F_h^2} \langle u'_i f' \rangle, \\ E_k &= \frac{1}{\text{Re}} \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle, \quad E_{ij} = \frac{2}{\text{Re}} \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle. \end{aligned}$$

Скаляр  $f$  и давление  $p$  представляют собой [2] нормализованные отклонения от гидростатических величин плотности и давления соответственно;  $u_i$  – вектор мгновенной скорости, а  $u'_i$ ,  $f'$  и  $p'$  – пульсации скорости, скаляра и давления соответственно. Бюджет уравнения переноса для  $k$  был рассмотрен в [2]. Ниже приводится анализ бюджета уравнений для компонент тензора напряжений Рейнольдса.

### Результаты вычислений и бюджет уравнений переноса

На рис. 1, *a* картина течения (вид сбоку) представлена мгновенными траекториями частиц жидкости в центральной вертикальной плоскости ( $y = 0$ ), которые получены из данных DNS [2] во время квазистационарного периода (при  $t = 37,5$ ) первичной области турбулентности, возникающей при обрушении внутренних волн (показана оранжевым прямоугольником). На рис. 1, *б–г* даны изолинии осредненных значений плотности, скорости и завихренности в зоне

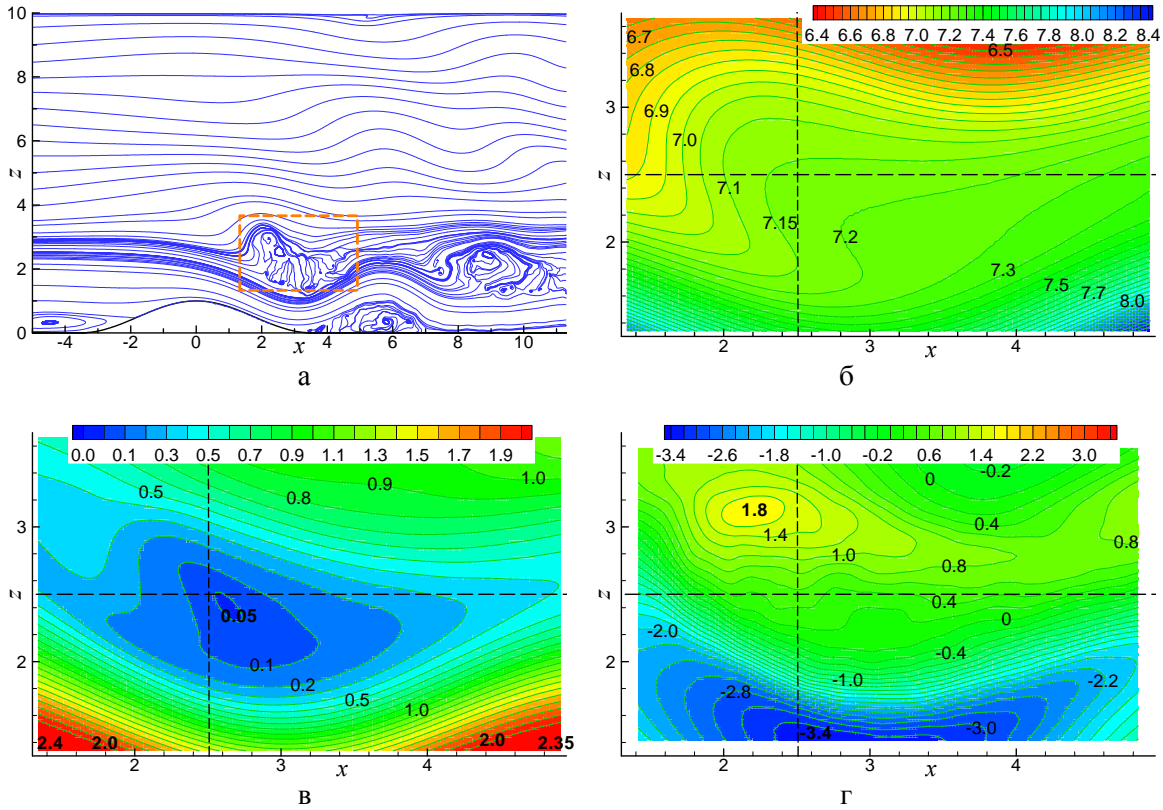


Рис. 1. Мгновенные траектории частиц жидкости в потоке вокруг препятствия (а); изолинии среднего скаляра  $\langle f \rangle + 10$  (б); амплитуды вектора средней скорости,  $\sqrt{\langle u \rangle^2 + \langle v \rangle^2 + \langle w \rangle^2}$  (в); средней завихренности  $\langle \omega_y \rangle$  (г); осреднение (б–г) выполнено по всем узлам вдоль размаха препятствия (по  $y$ ) и локально по  $(9 \times 9)$ -узлам в  $(x, z)$ -плоскости, а затем во время квазистационарного периода (при  $35 \leq t \leq 55$ )

перемешивания. Распределение плотности (рис. 1, б) показывает слабонеустойчивое состояние в области турбулентности, которое оказывает поддерживающее воздействие на пульсации полей скаляра и скорости. Средняя скорость (рис. 1, в) мала вокруг центра области в отличие от характеристик турбулентности, рассматриваемых ниже, а рециркуляционная структура, формирующаяся во время первоначального этапа ламинарного развития обрушения внутренней волны, полностью разрушается под действием турбулентности. Отметим, что некоторые компоненты скорости и завихренности после осреднения по размаху препятствия (по координате  $y$ ) получаются пренебрежимо малыми ( $\langle v \rangle \approx 0$ ,  $\langle \omega_x \rangle \approx 0$ ,  $\langle \omega_z \rangle \approx 0$ ) в связи с однородностью в трансверсальном направлении [2]. Средняя завихренность

(рис. 1, г) имеет положительный максимум при  $x \sim 2,2$  и  $z \sim 3,0$ , т. е. именно там, где находятся [2] максимумы кинетической энергии турбулентности и ее диссипации.

Бюджет уравнений переноса для компонент тензора напряжений Рейнольдса (рис. 2) свидетельствует о незначительных изменениях напряжений с ростом времени и подтверждает квазистационарное поведение области турбулентности, возникающей при обрушении внутренних волн. Молекулярная диффузия везде пренебрежимо мала (в пределах 3 % от турбулентной диффузии), поэтому не показана на рисунках. За исключением производных по времени (определявшихся как численная невязка баланса остальных членов), все слагаемые уравнений переноса находились непосредственно из данных DNS. Остаточная величина изме-

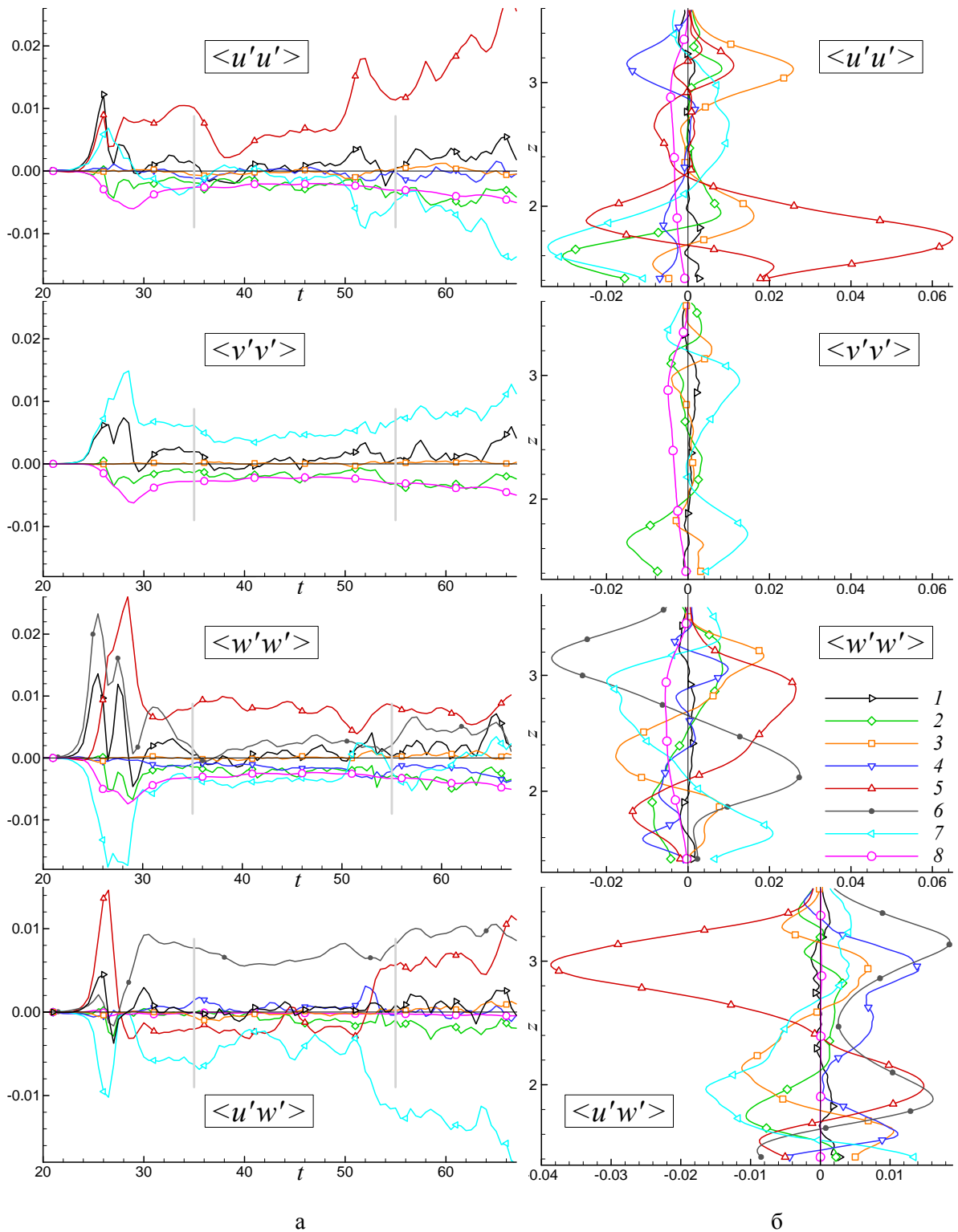


Рис. 2. Бюджет уравнений для напряжений Рейнольдса: *a* – эволюция по времени величин, осредненных по  $y$  и локально по малым площадям с  $(9 \times 9)$ -узлами в  $(x, z)$ -плоскости, затем по области турбулентности ( $1,41 \leq x \leq 4,84$  и  $1,41 \leq z \leq 3,59$ ); *б* – профили при  $x = 2,5$ , полученные при осреднении данных DNS (как на рис. 1, б–г); 1 –  $\langle u'u'_t \rangle$ ; 2 –  $(-A_{ij})$ ; 3 –  $(T_{ij} + M_{ij})$ ; 4 –  $D_{ij}$ ; 5 –  $P_{ij}$ ; 6 –  $G_{ij}$ ; 7 –  $F_{ij}$ ; 8 –  $(-E_{ij})$

нения по времени, обозначаемая как  $\langle u'_i u'_j \rangle_t$ , неявно включает погрешности вычислений баланса остальных членов, которые, на самом деле, были очень малыми для рассматриваемой мелкой сетки [2].

С ростом времени (рис. 2, а) в первую очередь появляется порождение плавучести для нормальных компонент напряжений Рейнольдса ( $G_{ww} = G_{33} = -(2/F_h^2) \langle w'f' \rangle$ ) при  $t \sim 22$ , приводя к быстрому росту вертикальных пульсаций скорости  $\langle w'w' \rangle$ , но затем становится относительно малой положительной величиной (глобально, т. е. при осреднении по области турбулентности). Диффузия давления для нормальных напряжений Рейнольдса вносит в бюджет отрицательный вклад того же порядка, что и порождение плавучести, а для сдвигового напряжения – положительный вклад, тогда как турбулентная диффузия оказывается около нуля (см. рис. 2, а). Глобально диссипация, адвекция и корреляции с пульсациями давления приближенно балансируют порождение средним сдвигом в бюджете уравнений переноса для нормальных компонент тензора напряжений Рейнольдса. Локальные распределения (рис. 2, б) порождения плавучести и турбулентной диффузии имеют максимумы, сравнимые с пиками  $F_{ij}$ ,  $P_{ij}$  и  $A_{ij}$ . Для сдвигового напряжения, порождение плавучести

$$G_{uw} = G_{13} = -(1/F_h^2) \langle u'f' \rangle$$

вносит (глобально) наибольший вклад в бюджет (порождение средним сдвигом  $P_{uw} = P_{13}$  меняет знак внутри области турбулентности).

Слагаемое  $F_{ij}$  корреляций пульсаций давления с пульсациями скорости деформации играет важную роль (как видно из рис. 2, 3), перераспределяя нормальные напряжения между собой ( $F_{uu} + F_{vv} + F_{ww} = 0$ ): главным образом, от наибольшей величины  $\langle w'w' \rangle$  (для которой вклад  $F_{ww}$  является отрицательным и приводит к частичной компенсации порождения  $P_{ww} + G_{ww}$ ) к наименьшей  $\langle v'v' \rangle$  (для которой  $F_{vv}$  является положительным и единственным источником, поскольку  $P_{vv} + G_{vv} = 0$ ). Анизотропия нормальных напряжений Рейнольдса и чле-

нов порождения в соответствующих уравнениях переноса показана на рис. 4.

Можно заметить, что поведение  $F_{ij}$  следует линейной гипотезе стремления к изотропии [4; 5]

$$F_{ij} = C_1 \left[ \frac{\langle u'_i u'_j \rangle}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} E_k \right] - C_2 \left[ P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right] - C_2 \left[ G_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} G_k \right],$$

$$C_1 = 1,8, \quad C_2 = 0,6,$$

которая приблизительно подтверждается (см. рис. 3), хотя и приводит к некоторому занижению корреляций с пульсациями давления. Последнее может быть исправлено, например, коррекцией коэффициента  $C_2 = 0,75$  (вместо 0,6) в слагаемых изотропизации порождения или путем подходящих нелинейных модификаций модели для  $F_{ij}$ .

Отметим, что слагаемые порождения средним сдвигом и плавучести в уравнении переноса кинетической энергии турбулентности для рассматриваемого случая равны  $P_k = \{P_{uu} + P_{vv}\}/2$  и  $G_k = G_{ww}/2 = -\langle w'f' \rangle/F_h^2$  соответственно. Поведение члена  $F_{uw}$  из уравнения для сдвигового напряжения Рейнольдса  $\langle u'w' \rangle$  подтверждает линейную гипотезу стремления к изотропии [4; 5]: эта корреляция с пульсациями давления, в основном, пропорциональна и противоположна по знаку величинам напряжения  $\langle u'w' \rangle$  и его полного порождения  $P_{uw} + G_{uw}$ .

Диссипативный тензор приблизительно следует локально-изотропной гипотезе,  $E_{ij} = (2/3) \delta_{ij} \varepsilon$ , где  $\varepsilon = E_k = E_{ii}/2$  – диссипация  $k$  (рис. 5), хотя и компонента  $E_{ww} = E_{33}$  для наибольшей интенсивности турбулентности  $\langle w'w' \rangle$  немного больше, чем  $E_{uu}$  и  $E_{vv}$ . В подтверждение гипотезы локальной изотропии диссипативный член  $E_{uw}$  для напряжения  $\langle u'w' \rangle$  оказывается малым (на порядок меньше) по сравнению с  $\varepsilon$ .

Согласно рис. 2, 4 и 5, величина «эффективности перемешивания»  $\Gamma = G_k/\varepsilon$  существенно меняется в зависимости от пространственных координат и времени, но ее глобальное значение близко к 0,2, как и в океанологических приложениях [6]. С дру-

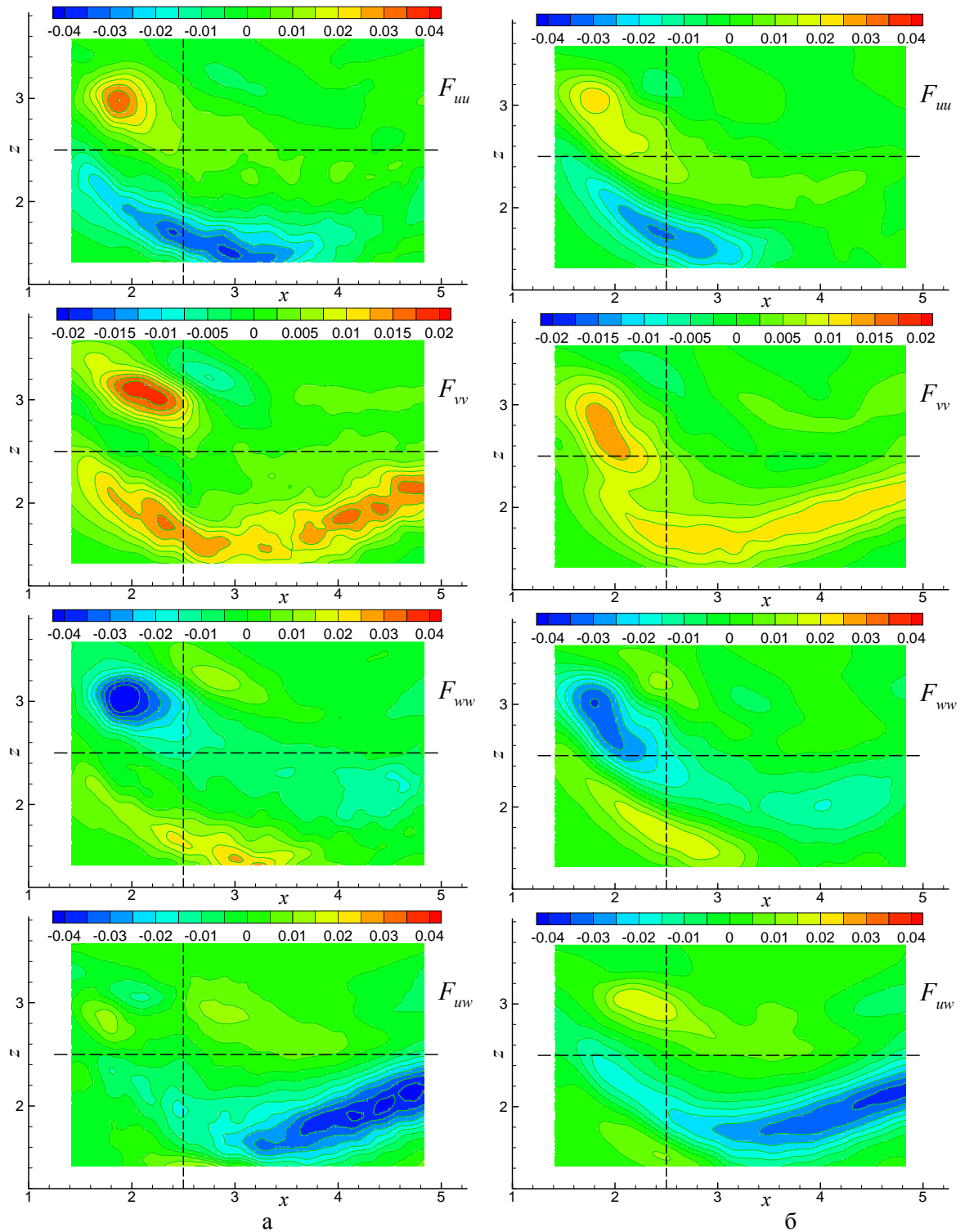


Рис. 3. Изолинии корреляций с пульсациями давления, полученные:  
 а – осреднением данных DNS, как на рис. 1, б – из априорной оценки линейного выражения [4; 5],  
 в котором отдельные члены определены из данных DNS [2] (см. также рис. 4, 5)

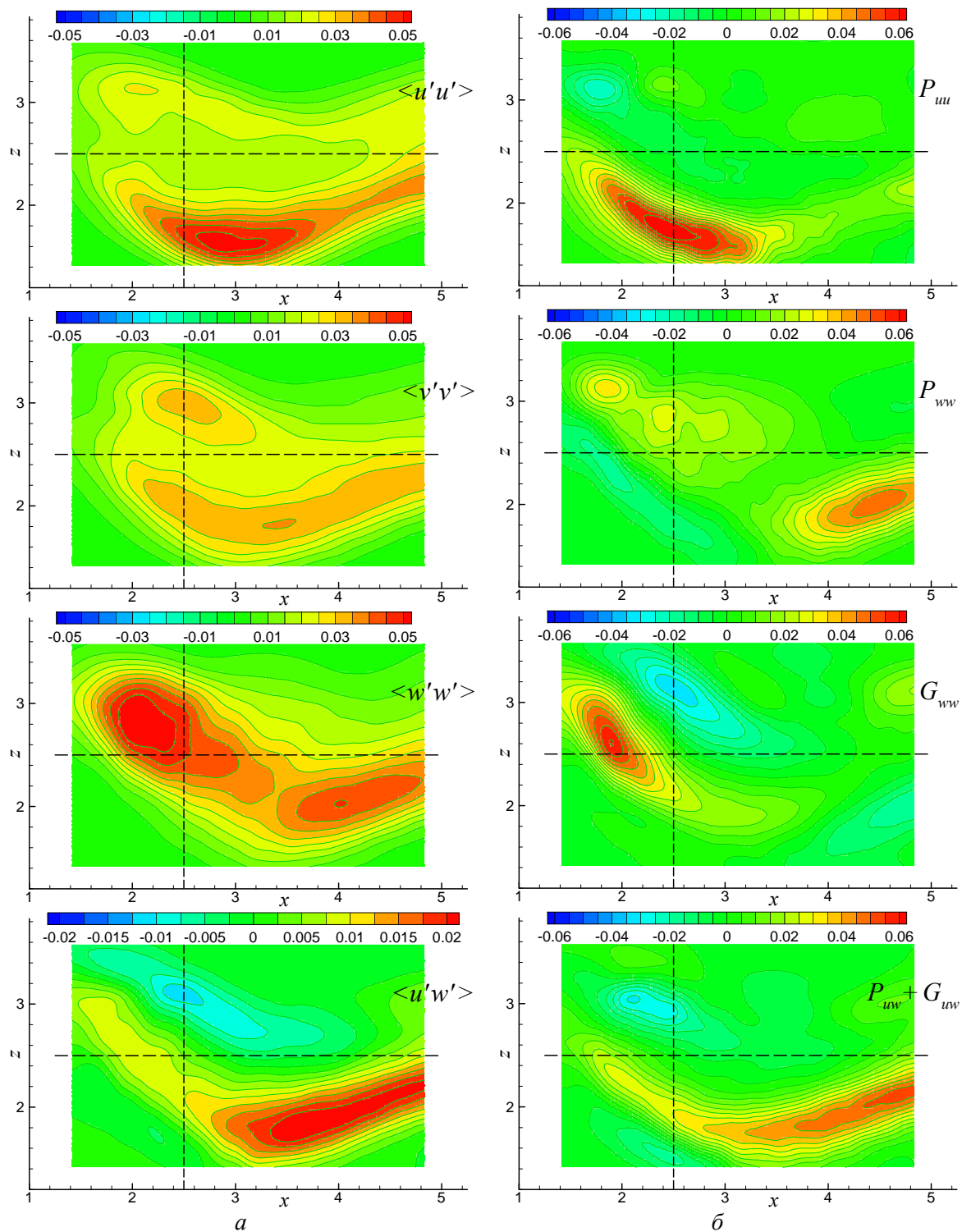


Рис. 4. Изолинии полученных при осреднении данных DNS, как на рис. 1,  $\delta$ -г, ненулевых компонент:  $a$  – тензора напряжений Рейнольдса  $\langle u'_i u'_j \rangle$ ;  $b$  – тензоров порождения средним сдвигом скорости  $P_{ij}$  и порождения плавучести  $G_{ij}$



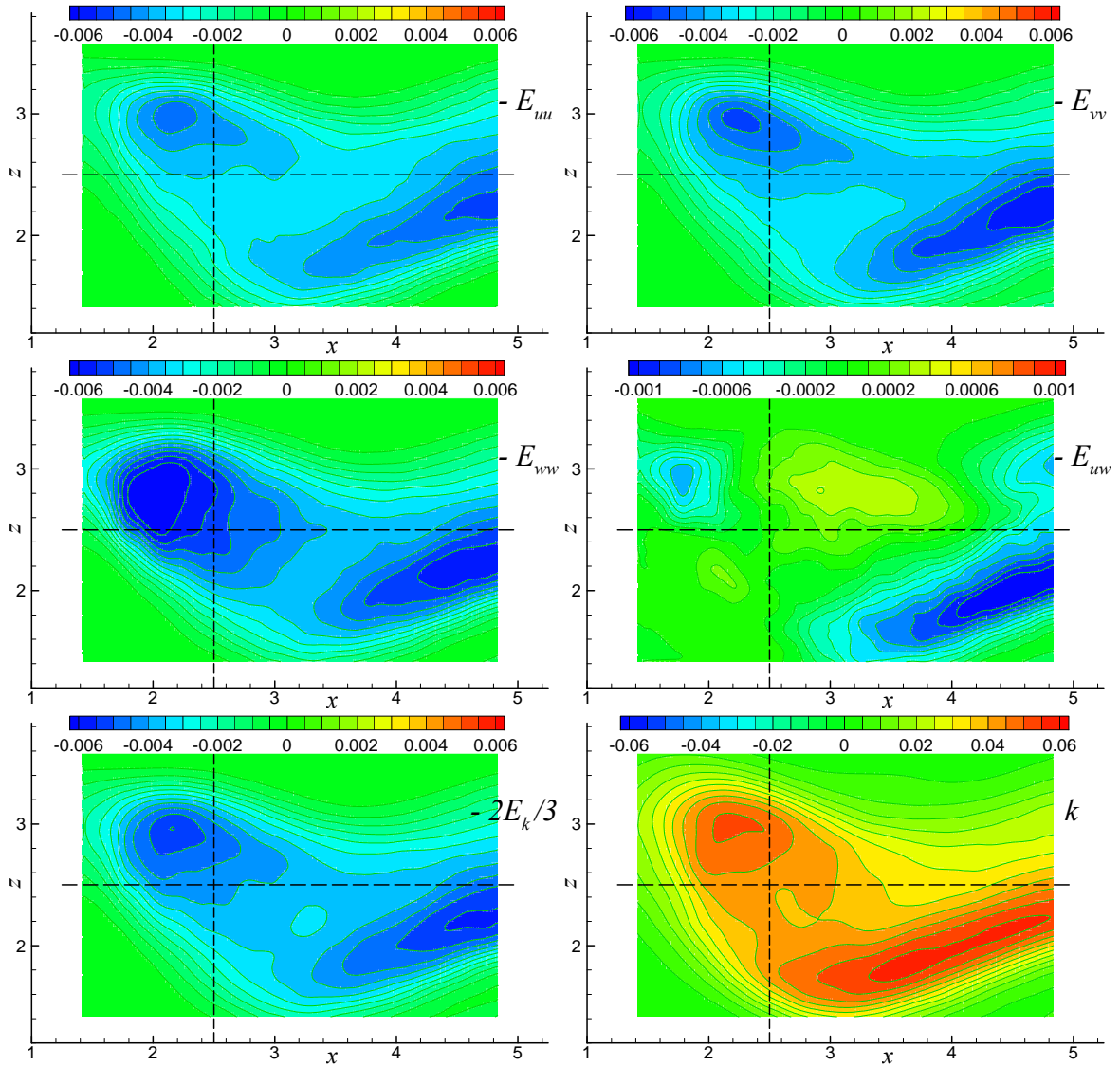


Рис. 5. Изолинии компонент тензора диссипации  $E_{ij}$ , вязкой диссипации  $\varepsilon = E_k$  (умноженной на  $-2/3$  для априорной проверки локальной изотропии) и турбулентной кинетической энергии  $k$ , полученные при осреднении данных DNS, как на рис. 1,  $\bar{\delta}-\varepsilon$

гой стороны, для устойчиво стратифицированного сдвигового слоя было получено  $\Gamma = 0,44$  [6]. Меньший параметр перемешивания в настоящей работе может быть обусловлен малыми величинами среднего сдвига скаляра и скорости в большей части турбулентной области (см. рис. 1,  $\bar{\delta}$ ,  $\varepsilon$ ). Отметим, что в других работах в качестве параметров перемешивания также использовались потоковое число Ричардсона и его обобщенный вариант: глобальные значения этих величин для рассматриваемой области

турбулентности получаются равными соответственно

$$R_f = G_k/P_k = 0,10$$

и

$$\{-G_k/(\varepsilon - G_k)\} = 0,26$$

(более подробно см. в [2]).

Поведение диссипации повторяет поведение кинетической энергии турбулентности (рис. 5), т. е. приемлемыми аппроксимациями будут  $\varepsilon = k^{3/2}/L^*$  (это выражение



применялось, например, в [7] вместо уравнения переноса для  $\varepsilon$  при расчете стратифицированного слоя смешения) или  $\varepsilon = k/\tau^*$ , где  $L^* = 1,45$  и  $\tau^* = 6,4$  – масштабы длины и времени крупных турбулентных вихрей при  $x \sim 2,2$  и  $z \sim 3,0$ , где  $k$  и  $\varepsilon$  имеют максимумы.

### Заключение

Область турбулентности, возникающая при обрушении внутренних волн в устойчиво стратифицированном течении над препятствием, исследована путем анализа статистических моментов (средней скорости и завихренности, кинетической энергии турбулентности, напряжений Рейнольдса, членов в уравнениях переноса напряжений Рейнольдса), полученных из данных прямого численного моделирования [2]. На основе этих данных выполнена априорная оценка возможностей общепринятых гипотез замыкания [4; 5] (которые применялись, например, при расчете устойчиво стратифицированного слоя смешения [7]) для основных слагаемых – корреляций с пульсациями давления и диссипативных членов – в уравнениях для компонент тензора напряжений Рейнольдса. Подобный анализ бюджета уравнений переноса и работоспособности гипотез замыканий может быть также проведен для дисперсии пульсаций скаляра, турбулентных потоков скаляра (массы или тепла) и различных моментов третьего порядка.

### Список литературы

1. *Castro I. P., Snyder W. H.* Experiments on Wave Breaking in Stratified Flow over Obstacles // *J. Fluid Mech.* 1993. Vol. 255. P. 195–211.
2. *Yakovenko S. N., Thomas T. G., Castro I. P.* A Turbulent Patch Arising from a Breaking Internal Wave // *J. Fluid Mech.* 2011. Vol. 677. P. 103–133.
3. *Mansour N. N., Kim J., Moin P.* Reynolds-Stress and Dissipation-Rate Budgets in a Turbulent Channel Flow // *J. Fluid Mech.* 1988. Vol. 194. P. 15–44.
4. *Launder B. E.* On the Effect of Gravitational Field on the Turbulent Transport of Heat and Momentum // *J. Fluid Mech.* 1975. Vol. 67. P. 569–581.
5. *Gibson M. M., Launder B. E.* Ground Effects on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layer // *J. Fluid Mech.* 1978. Vol. 86. P. 491–511.
6. *Pham H. T., Sarkar S., Brucker K. A.* Dynamics of a Stratified Shear Layer above a Region of Uniform Stratification // *J. Fluid Mech.* 2009. Vol. 630. P. 191–223.
7. *Курбацкий А. Ф., Яковенко С. Н.* К моделированию турбулентного слоя смешения в устойчиво стратифицированной жидкости // *Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.* 1989. Вып. 4. С. 59–65.

Материал поступил в редколлегию 28.04.2012

S. N. Yakovenko

### BUDGET OF EQUATIONS FOR REYNOLDS STRESSES IN A TURBULENT PATCH ARISING FROM INTERNAL WAVE BREAKING

Results of the direct numerical simulations are used to obtain statistical moments in a quasi-steady turbulent patch arising in a stably stratified flow above an obstacle after internal wave breaking. Temporal evolution and spatial behavior of the Reynolds-stress tensor components and budgets of the Reynolds-stress transport equations have been studied. Such an analysis is helpful to explore the turbulent patch and its energetic characteristics by means of statistical moments, to examine closure hypotheses in turbulence models, and to evaluate geophysically important quantities. In particular, the calculated global value of the mixing efficiency is about 0.2 as in oceanic applications. Moreover, simple algebraic relations are proposed between the turbulent kinetic energy and its dissipation rate. In the Reynolds stress tensor equation, the pressure-strain correlation term provides the redistribution of the normal stress components according to the linear return-to-isotropy approximation, whereas the dissipation tensor roughly follows the local-isotropy assumption.

*Keywords:* stable stratification, internal wave breaking, flow above obstacle, direct numerical simulation, turbulence models, statistical moments, turbulent kinetic energy.