

УДК 532.517.4; 532.525.2; 532.522.2; 533.69.048

**С. С. Абдуракипов, В. М. Дулин, Д. М. Маркович**

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН  
пр. Акад. Лаврентьева, 1, Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: dmark@itp.nsc.ru

### **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ КОГЕРЕНТНЫХ СТРУКТУР В ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУЕ ПРИ ПЕРИОДИЧНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ \***

Исследуется динамика когерентных структур, а также их размеры и интенсивность, на начальном участке затопленной круглой струи при периодическом возмущении начальной скорости потока с использованием оптического метода Particle Image Velocimetry (PIV) для измерения полей мгновенной скорости и статистического метода Dynamic Mode Decomposition (DMD). PIV измерения проводились с частотой 1,1 кГц. Применение метода DMD к набору измеренных полей скорости позволило определить характерные частоты турбулентных пульсаций, содержащихся в DMD спектре, для различных областей потока и проанализировать масштабы соответствующих этим частотам пространственных когерентных структур, содержащихся в DMD модах. Дополнительные расчеты спектров турбулентных пульсаций показали хорошее совпадение частот главных гармоник с характерными частотами доминирующих DMD мод. Суперпозиция динамических мод DMD разложения позволила приближенно описать процесс нелинейного взаимодействия когерентных структур различного масштаба: формирование вихрей, их квазипериодичное попарное объединение с модуляцией амплитуды образующихся гармоник.

*Ключевые слова:* турбулентная осесимметричная струя, периодическое воздействие, когерентные структуры, динамика вихрей, Particle Image Velocimetry, Dynamic Mode Decomposition.

Крупномасштабные вихревые структуры (КВС), формирующиеся в сдвиговых турбулентных течениях, в существенной степени определяют интенсивность процесса тепло-массопереноса в таких потоках. Поэтому эффективные способы управления свойствами КВС вызывают повышенный интерес как в фундаментальных исследованиях, так и в области практического применения. В частности, внешнее периодическое возмущение скорости потока является эффективным способом управления интенсивностью турбулентного переноса на начальном участке струй за счет воздействия на процесс формирования кольцевых КВС.

Применение метода Particle Image Velocimetry (PIV) для измерения полей мгновенной скорости в потоках позволяет получать количественную информацию о КВС и их динамике посредством прямого измерения поля скорости и его градиента, а также расчета пространственных, пространственно-временных корреляций и одноточечных статистических моментов пульсаций скорости. В последнее время с увеличением производительности вычислительных систем широкое применение получили статистические методы анализа полей скорости, позволяющие выделить пространственную структуру наиболее энергоемких когерентных пульса-

---

\* Работа выполнена при финансировании Правительства Российской Федерации (грант № 11.G34.31.0035 для поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах и федеральная целевая программа «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы).

ций в потоке. В частности, метод Dynamic Mode Decomposition (DMD, см. [1; 2]), апробированный относительно недавно для анализа данных экспериментальных исследований и численного моделирования течений, позволяет определить характерные масштабы и частоты присутствующих в потоке когерентных структур, а также построить низкоразмерное представление (приближение) их динамики из последовательности полей мгновенной скорости, полученных посредством PIV измерений. Данный контекст объясняет актуальность настоящего экспериментального исследования динамики и взаимодействия КВС в затопленной струе современными методами: PIV с частотой измерения 1,1 кГц и DMD алгоритмом статистического анализа последовательности полей скорости [2].

Метод DMD основывается на представлении ансамбля полей мгновенной скорости  $\mathbf{u}(x)$  в виде конечного ряда комплексных гармоник Фурье, т. е. пространственных базисных функций  $\phi_n(x)$  с зависящими от времени комплексными коэффициентами  $b_n(t_i)$ :

$$\mathbf{u}(x, t_i) = \sum_{n=1}^{N-1} b_n(t_i) \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{N-1} e^{(\omega_n^r + i\omega_n^i)t_i} \phi_n(x). \quad (1)$$

Задача решается определением глобальных мод оператора эволюции  $A$  уравнения (3), являющегося дискретизированным по времени линейным обыкновенным дифференциальным уравнением (2).

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \tilde{A}\mathbf{u}, \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_{i+1} = e^{\tilde{A}\Delta t} \mathbf{u}_i = A\mathbf{u}_i, \quad (3)$$

где  $\mathbf{u}_i$  – пространственно дискретизированное поле мгновенной скорости размерности  $M$  в  $i$ -й момент времени (снимок),  $A$  – матрица линейного отображения (или оператор эволюции) между полями, постоянная на всей последовательности данных ( $i = 1, 2, \dots, N-1$ ),  $\Delta t$  – шаг по времени между снимками,  $N$  – размерность ансамбля полей мгновенной скорости. Существование и единственность решения, а также свойства линейной системы (2) подробно рассмотрены в работе [3]. Задача нахождения матрицы линейного отображения  $A$ , описывающая эволюцию динамической системы, чрезвычайно трудоемка, так как ее размерность соответствует  $M^2$ , где  $M$  – это количество векторов в каждом поле скорости  $\mathbf{u}_i$ . Тем не менее, следуя модифицированному методу

Арнольди [2; 4], можно записать ансамбль полей мгновенной скорости в виде последовательности Крылова (4) и предположить, что достигнут предел полноты последовательности. То есть дополнительные поля  $\mathbf{u}_i$  не улучшат векторное пространство, натянутое на  $V_1^N$ , и  $\mathbf{u}_N$  можно представить как линейную комбинацию предыдущих векторов с некоторой невязкой представления  $\mathbf{r}$ :

$$V_1^N = [\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_1, A^2\mathbf{u}_1, \dots, A^{N-1}\mathbf{u}_1], \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_N &= a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_{N-1}\mathbf{u}_{N-1} + \mathbf{r} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{u}_N &= V_1^{N-1}\mathbf{a} + \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_{N-1}]^T$ , и индекс  $T$  обозначает транспонирование. После простейших вычислений с учетом (4) и (5) можно записать уравнение на сопровождающую матрицу  $S$  размерности  $(N-1)^2$  [5]:

$$\begin{aligned} V_2^N &= A[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}] = \\ &= [\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N] = [\mathbf{u}_2, \dots, V_1^{N-1}\mathbf{a}] + \mathbf{r}\mathbf{e}_{N-1}^T \Rightarrow \\ &\Rightarrow [\mathbf{u}_2, \dots, V_1^{N-1}\mathbf{a}] = V_1^{N-1}S + \mathbf{r}\mathbf{e}_{N-1}^T. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{e} = [0, 0, \dots, 1]^T$ .

Вектор  $\mathbf{a}$  и, следовательно, матрица  $S$  могут быть найдены из условия минимизации нормы остаточного вектора  $\mathbf{r}$  в выражении (6) по методу наименьших квадратов. Согласно [2; 4], эту задачу можно решить с помощью ортогонального  $QR$ -разложения (7) матрицы  $V_1^{N-1}$ :

$$V_1^{N-1} = QR \stackrel{(6)}{\Rightarrow} S = R^{-1}Q^T V_2^N. \quad (7)$$

Здесь  $Q$  – унитарная матрица размерности  $M \times (N-1)$ ;  $R$  – верхнетреугольная матрица размерности  $(N-1)^2$ . Подробно математические основы этой процедуры изложены в работе [6]<sup>1</sup>.

Решая задачу на собственные значения матрицы  $S$ :  $S\mathbf{y}_n = \mu_n\mathbf{y}_n$ , получаем комплексные собственные вектора  $\mathbf{y}_n$  и комплексные собственные значения  $\mu_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N-1$ ), аппроксимирующие некоторые из собственных значений матрицы линейного отображения  $A$  и содержащие ценную информацию о динамических процессах в последовательности данных [5]. Так как оператор эволю-

<sup>1</sup> Boyd S. EE263: Introduction to linear dynamical systems (lecture course). Information systems laboratory. Department of electrical engineering. Stanford University. URL: <http://www.stanford.edu/class/ee263/lectures.html>.

ции  $A$  динамической системы является квазиунитарным, все  $|\mu_n| \approx 1$ , если  $\|r\|$  мала. Поэтому удобно представить собственные значения  $\mu_n$  в логарифмическом отображении (8):

$$\omega_n = \frac{\text{Ln}(\mu_n)}{2\pi\Delta t} = \omega_r^n + i\omega_i^n. \quad (8)$$

В таком случае вещественная часть собственного значения  $\omega_r^n$  соответствует инкременту роста (затухания), а мнимая  $\omega_i^n$  – характерной частоте (фазовой скорости) эволюции моды в течение рассматриваемого промежутка времени. Математически это следует из вида общего решения линейной системы (1), как показано в [3]. Пространственные динамические моды (ДМ)  $\Phi_n$  получаются посредством проекции последовательности Крылова  $V_1^{N-1}$  на собственные векторы  $y_n$ :

$$\Phi = V_1^{N-1} Y,$$

где  $\Phi = [\Phi_1, \dots, \Phi_{N-1}]$ ,  $Y = [y_1, \dots, y_{N-1}]$ .

В общем случае ДМ не ортогональны, так как фактически представление основано на использовании ортогональных временных коэффициентов (гармоник Фурье). ДМ могут быть ранжированы согласно частоте  $\omega_i$ , инкременту роста (затухания)  $\omega_r$  и  $L_2$ -норме  $\|\Phi_n\|$ , характеризующей амплитуду соответствующей моды для ансамбля полей скорости.

В конечном счете применение метода к ансамблю полей мгновенной скорости с высоким временным разрешением позволяет получить набор базисных функций (ДМ) и соответствующих им собственных значений (спектр), содержащих информацию о динамических процессах, отраженных в исходной последовательности данных [2; 4]. ДМ являются линейным приближением ансамбля полей мгновенной скорости и, согласно [1; 2; 4; 7], могут быть использованы для описания и аппроксимации динамики КВС, присутствующих в потоке: как показано в [4; 8], суперпозиция доминирующих ДМ (1) позволяет построить низкоразмерную модель полей скорости потока, приближенно описывающую эволюцию и, что наиболее важно, взаимодействие КВС во времени. Недостатки и ограничения метода DMD подробно проанализированы в работе [9].

В настоящей работе было проведено исследование начального участка струйного течения на открытом аэродинамическом

стенде, состоящем из насоса, ресиверной камеры, расходомеров, системы засева потока трассерными частицами  $\text{TiO}_2$  (средний размер 1 мкм), соплового блока и вытяжки, находящейся на расстоянии более 2 м от сопла. Для организации струи было использовано профилированное сопло Витошинского с выходным диаметром  $d = 15$  мм (сопло детально описано в работе [10] для случая без закрутки). Число Рейнольдса и среднерасходная скорость потока равнялись  $\text{Re} = 4\,100$ ;  $U_0 = 5,0$  м/с. Для периодического возмущения начальной скорости потока использовалась камера с четырьмя акустическими динамиками, расположенная на расстоянии 0,7 м до выходного отверстия сопла (аналогичная система описана в работе [11]). Амплитуда колебаний, вносимых системой в поток, определялась среднеквадратичным отклонением пульсаций продольной скорости на срезе сопла. В данной работе она равнялась 10 % от среднерасходной скорости, в то время как без воздействия интенсивность продольных пульсаций не превышала 3 %. Для измерения с частотой 1,1 кГц полей мгновенной скорости потока в центральной плоскости струи была использована скоростная PIV система, состоящая из импульсного Nd:YLF лазера «Pegasus PIV» (два независимых резонатора, каждый с энергией 10 мДж в импульсе на частоте 1,1 кГц) и КМОП камеры «PCO 1200hs» (1 280 × 1 024 пикс. с частотой кадров более 600 Гц в полном разрешении). Размер кадра был уменьшен до 1 280 × 256 пикс. для повышения частоты съемки. Система управлялась синхронизирующим процессором и компьютером с программным обеспечением ActualFlow [12]. Режим ее работы соответствовал паре вспышек лазера с задержкой 40 мкс, каждая из которых освещала трассерные частицы в центральной плоскости струи в течение 180 нс. Свет, рассеиваемый частицами, регистрировался на два отдельных изображения камеры. В такой конфигурации поле скорости рассчитывалась по смещению частиц между двумя изображениями с использованием адаптивного кросскорреляционного алгоритма [13]. Размеры области наблюдения составляли 90 и 17 мм в продольном и поперечном направлениях соответственно. Временная задержка между каждыми парами вспышек / изображений и, следовательно, между полями скорости составляла 900 мкс. Для исследования

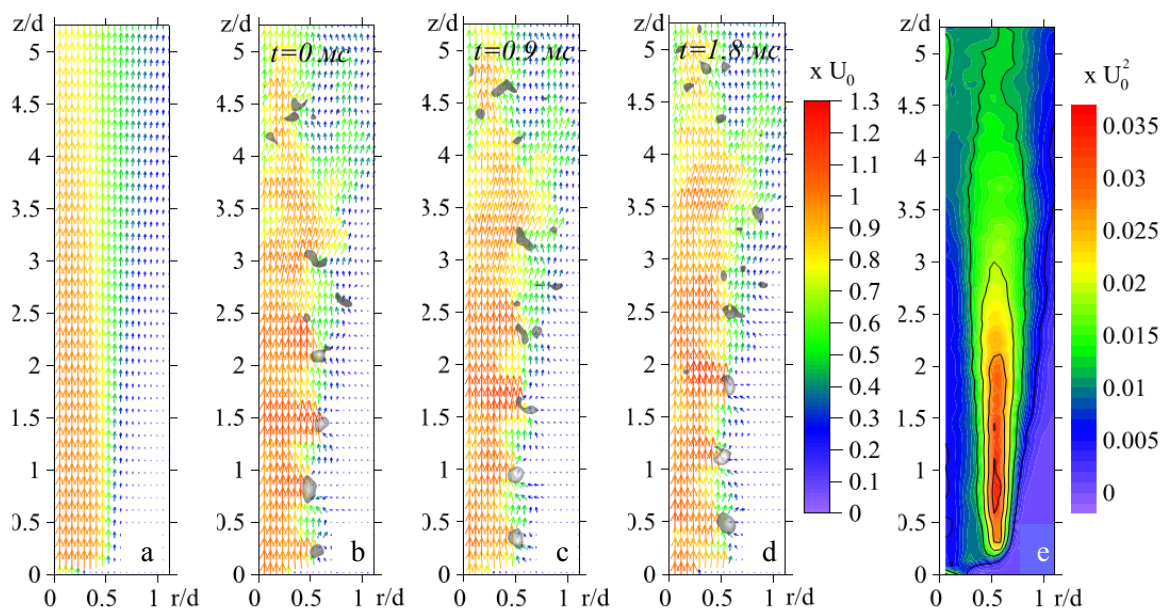


Рис. 1. Нормированные распределения средней скорости (а), мгновенной скорости (b–d) с интервалом  $\Delta t = 0,9$  мс, радиальной компоненты кинетической энергии (е). Серым цветом показана интенсивность вихревого движения (согласно критерию «swirling strength» [14])

динамики когерентных структур измерялся ансамбль из 600 полей скорости, к которому был применен DMD метод, описанный выше. С целью расчета среднего поля скорости и компонент кинетической энергии турбулентности было сделано четыре независимых измерения по 600 полей мгновенной скорости.

На рис. 1 приведены распределения средней и мгновенной скорости потока, а также радиальной компоненты кинетической энергии турбулентности в центральной плоскости струи при наложении дополнительных возмущений на начальную скорость потока с частотой 300 Гц. Критерий «swirling strength» [14], характеризующий интенсивность вихревого движения среды, использовался для идентификации вихревых структур на полях мгновенной скорости. В соответствии с работой [11] число Струхала  $St = 1,0$  и амплитуда продольных пульсаций 10 % от  $U_0$  для данного воздействия приводит к формированию КВС, их квазипериодичному попарному объединению далее по потоку с появлением второй и четвертой гармоник. Вторая гармоника отвечает стабильному объединению КВС, формирующихся в сдвиговом слое струи на частоте воздействия. Амплитуда процесса

вторичного объединения (соответствующего четвертой гармонике) будет периодически подавлена вследствие того, что некоторые вихри избегают процесса объединения для данных условий воздействия [11], что приводит к рассогласованию фаз процессов сворачивания и объединения вихрей. Вследствие этого энергия образующихся когерентных структур на четвертой гармонике будет модулирована по времени.

На рис. 2, а, b показан спектр всех 599 собственных значений  $\mu_n$  DMD разложения ансамбля полей мгновенной скорости и спектр 9 комплексных собственных значений в логарифмическом отображении, которые отвечают наиболее значимым модам  $\phi_n$  согласно их норме  $\|\phi_n\|$  (см. рис. 2, d). Вещественная часть логарифма собственных значений характеризует показатель степени роста (для  $\omega_r > 0$ ) или затухания ( $\omega_r < 0$ ) ДМ в течение анализируемого временного промежутка. Так как в работе исследуется стационарное турбулентное течение, то быстро затухающие моды с  $\omega_r \ll 0$  были исключены из рассмотрения. Симметричность наблюдаемого спектра является следствием вещественности исходных данных. Комплексно сопряженным собственным значениям соответствуют комплексно сопряжен-

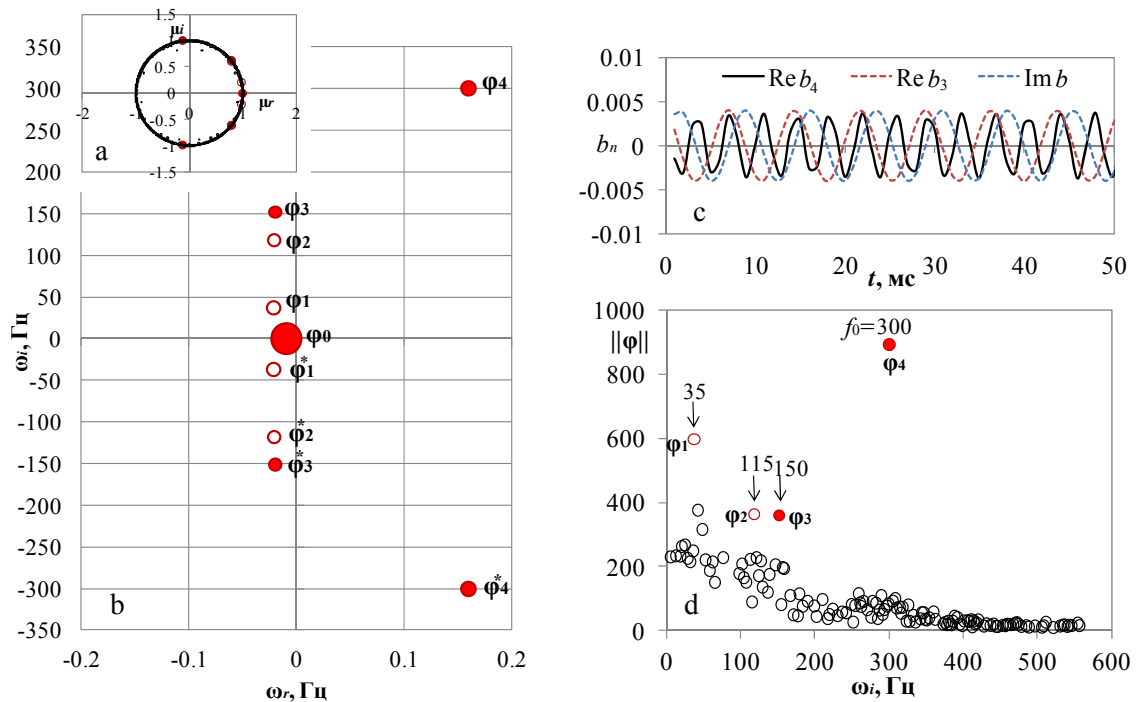


Рис. 2. Спектр базисных функций DMD разложения (599 значений) (a) и спектр девяти наиболее энергоемких DMD мод в логарифмическом отображении (b). Изменение амплитуд мод во времени (c) и зависимость нормы моды от частоты (d).  $\mu_r$  и  $\mu_i$  – вещественная и мнимая части собственных значений для DMD мод.  $\omega_r$  и  $\omega_i$  – показатель роста (затухания) и характерная частота DMD мод. Размер точек на графике качественно показывает величину нормы моды

ные ДМ. Собственное значение с нулевой мнимой частью соответствует стационарной во времени компоненте разложения. Эта мода  $\phi_0$  с наибольшей нормой является наиболее когерентной и соответствует сумме среднего поля скорости и невязки представления. Периодическая динамика когерентных структур в потоке отражена в остальных модах с ненулевой мнимой частью собственных значений, соответствующей частоте следования когерентных структур. На рис. 2, c в качестве примера показаны комплексные временные коэффициенты  $b_3(t_i)$  и  $b_4(t_i)$  двух доминирующих ДМ  $\phi_3$  и  $\phi_4$ , соответствующие периодической эволюции этих мод во времени, причем вещественная и мнимая части каждого коэффициента сдвинуты по времени на фазу  $\pi/2$ . На рис. 3 приведена радиальная компонента вещественной и мнимой частей доминирующих пространственных ДМ. Можно видеть, что моды позволяют получить количественную информацию не только о характерных частотах

турбулентных пульсаций, но и о пространственной области потока, где присутствовали соответствующие когерентные структуры.

На рис. 4 приведена низкоразмерная реконструкция последовательности 5-ти полей скорости с интервалом 1,8 мс, построенная на основе 3-х доминирующих ДМ и их комплексно сопряженных (вещественная и мнимая части ДМ отличаются сдвигом по фазе на  $\pi/2$ )  $\phi_0, \phi_3, \phi_3^*, \phi_4, \phi_4^*$ , демонстрирующая образование крупномасштабных структур (второй гармоники с частотой  $f_0/2 = 150$  Гц, согласно рис. 2, d) в области  $z/d \approx 2,5$  за счет стабильного объединения КВС, формирующихся в слое смешения вблизи кромки сопла вследствие внешнего воздействия на поток с частотой  $f_0 = 300$  Гц. Критерий «swirling strength» [14] использовался для идентификации вихревых структур на реконструированных полях скорости. Хорошо видно, что ДМ  $\phi_3$  и  $\phi_4$  описывают

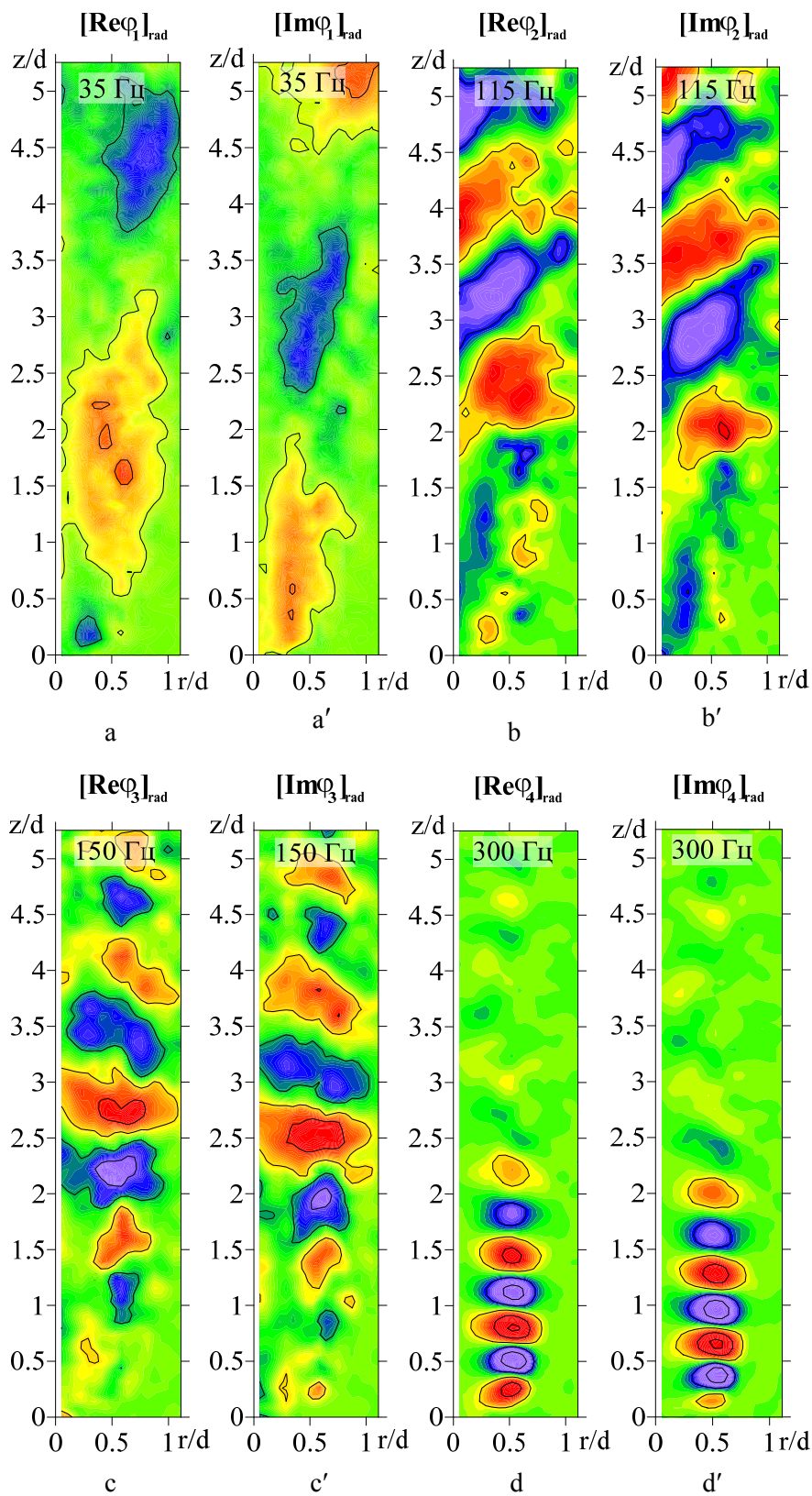


Рис. 3. Нормированные распределения радиальной компоненты мнимой и действительной частей доминирующих ДМ

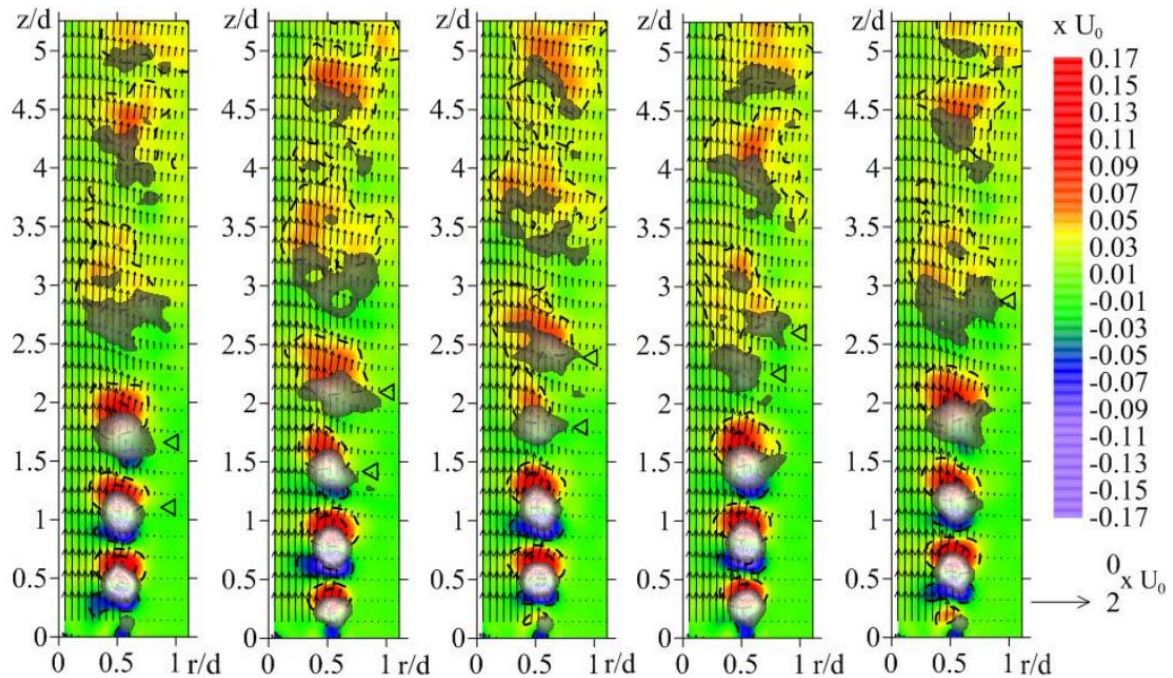


Рис. 4. Низкоразмерная реконструкция последовательности пяти полей скорости с шагом по времени  $\Delta t = 1,8$  мс. Серым цветом показана интенсивность вихревого движения (согласно критерию «swirling strength» [14]), пунктирными линиями – изолинии радиальной компоненты скорости. Треугольными символами обозначена пара взаимодействующих когерентных структур, формирующихся вблизи кромки сопла с частотой периодического возмущения потока ( $f_0 = 300$  Гц)

когерентные структуры различного масштаба, локализованные в разных областях потока. ДМ  $\Phi_4$  ( $f_0 = 300$  Гц) описывает вихревые структуры, доминирующие на малых расстояниях от сопла ( $0-2d$ ), в то время как  $\Phi_3$  ( $f_0/2 = 150$  Гц) соответствует формирующимся структурам большего масштаба за счет объединения возбуждаемых вихрей. Дополнительный анализ реконструкции полей мгновенной скорости по ДМ  $\Phi_0$  (0 Гц),  $\Phi_1$  ( $f_1 = 35$  Гц),  $\Phi_2$  ( $f_2 = 115$  Гц),  $\Phi_3$  ( $f_0/2 = 150$  Гц) и  $\Phi_4$  ( $f_0 = 300$  Гц), показал, что когерентные структуры, соответствующие модам  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  ( $f_1 + f_2 = f_0/2$ ), являются следствием процесса нерегулярного парного объединения вихрей, формирующихся на частоте  $f_0$ , что отражается в модуляции амплитуды второй гармоники  $f_0/2$ . Такое взаимное влияние различных гармоник вызвано наличием механизма обратной связи (за счет распространения волн давления), наблюдающегося в конвективно неустойчивых

струйных течениях [11]. Это отражает процесс нелинейного взаимодействия мод между собой с образованием целого спектра остальных гармоник.

Из проведенного исследования модельной нелинейной динамической системы, а именно сдвигового слоя затопленной струи, можно заключить, что применение метода DMD к данным скоростных PIV измерений в струе позволило определить характерные частоты турбулентных пульсаций для различных областей потока и проанализировать масштабы соответствующих этим частотам пространственных когерентных структур. Дополнительные расчеты спектров турбулентных пульсаций показали хорошее совпадение частот главных гармоник с характерными частотами доминирующих DMD мод. Суперпозиция динамических мод DMD разложения позволила реконструировать процесс нелинейного взаимодействия когерентных структур различного масштаба, в частности формирова-

ние вихрей и их попарное объединение с последующим образованием структур большего масштаба далее по потоку.

### Список литературы

1. Rowley C. W., Mezić I., Bagheri S., Schlatter P., Henningson D. S. Spectral Analysis of Nonlinear Flows // *J. Fluid Mech.* 2009. Vol. 641. P. 115–127.

2. Schmid P. J. Dynamic Mode Decomposition of Numerical and Experimental Data // *J. Fluid Mech.* 2010. Vol. 656. P. 5–28.

3. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields // *Applied Mathematical Sciences.* Springer, 1997. Vol. 42.

4. Schmid P. J. Application of the Dynamic Mode Decomposition to Experimental Data // *Exp. Fluids.* 2011. Vol. 50 (4). P. 1123–1130.

5. Ruhe A. Rational Krylov Sequence Methods for Eigenvalue Computation // *Lin. Alg. Appl.* 1984. Vol. 58. P. 279–316.

6. Golub G. H., Van Loan C. F. Matrix Computations. Baltimore: Johns Hopkins Univ. Press, 1990.

7. Basley J., Pastur L., Lusseyran F., Faure T., Delprat N. Experimental Investigation of Global Structures in an Incompressible Cavity Flow Using Time-Resolved PIV // *Exp. Fluids.* 2010. Vol. 50 (4). P. 905–918.

8. Pan C., Yu D., Wang J. Dynamic Mode Decomposition of Gurney Flap Wake Flow // *Theor. Appl. Mech. Lett.* 2011. Vol. 1 (1). P. 5.

9. Duke D., Soria J., Honnery D. An Error Analysis of the Dynamic Mode Decomposition // *Exp. Fluids.* 2011. Vol. 52 (2). P. 529–542.

10. Alekseenko S. V., Dulin V. M., Kozorezov Yu. S., Markovich D. M. Effect of Axisymmetric Forcing on the Structure of a Swirling Turbulent Jet // *Int. J. Heat Fluid Flow.* 2008. Vol. 29. P. 1699–1715.

11. Broze G., Hussain F. Transitions to Chaos in a Forced Jet: Intermittency, Tangent Bifurcations and Hysteresis // *J. Fluid Mech.* 1996. Vol. 311. P. 37–71.

12. Ахметбеков Е. К., Бильский А. В., Ложкин Ю. А., Маркович Д. М., Токарев М. П., Тюрюшкин А. Н. Система управления экспериментом и обработки данных, полученных методами цифровой трассерной визуализации

(ActualFlow) // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2006. Т. 7. С. 79–85.

13. Токарев М. П., Маркович Д. М., Бильский А. В. Адаптивные алгоритмы обработки изображений частиц для расчета мгновенных полей скорости // *Вычисл. технологии.* 2007. Т. 2. С. 1–23.

14. Adrian R. J., Christensen K. T., Liu Z.-C. Analysis and Interpretation of Instantaneous Velocity Fields // *Exp. Fluids.* 2000. Vol. 29. P. 275–290.

### Список обозначений

PIV – Particle Image Velocimetry  
 DMD – Dynamic Mode Decomposition  
 Re – число Рейнольдса  
 St – число Струхала  
 $U_0$  – среднерасходная скорость потока, м/с  
 $b_n$  – комплексная временная амплитуда  $n$ -й DMD моды  
 $d$  – выходной диаметр сопла, м  
 $r$  – радиальная координата, м  
 $t_i$  – время измерения поля скорости, с  
 $\mathbf{u}_i$  – поле мгновенной скорости потока в момент времени  $t_i$ , м/с  
 $z$  – аксиальная координата, м  
 $V_1^N$  – последовательность полей мгновенной скорости, м/с  
 $A$  – матрица линейного отображения (оператор эволюции) между полями мгновенной скорости  
 $S$  – сопровождающая матрица для  $A$   
 $\Delta t$  – шаг по времени между полями мгновенной скорости, с  
 $\mathbf{r}$  – остаточный вектор, м/с  
 $\Phi_n$  –  $n$ -я DMD мода, м/с  
 $\|\Phi_n\|$  –  $L_2$ -норма  $n$ -й DMD моды, м/с  
 $\mu_n$  –  $n$ -е комплексное собственное значение матрицы  $S$   
 $\mathbf{u}_n$  –  $n$ -й комплексный собственный вектор матрицы  $S$   
 $\omega_r^n$  – вещественная часть логарифма собственного значения  $\mu_n$ , Гц  
 $\omega_i^n$  – мнимая часть логарифма собственного значения  $\mu_n$ , Гц



S. S. Abdurakipov, V. M. Dulin, D. M. Markovich

**EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF COHERENT STRUCTURE DYNAMICS  
IN A SUBMERGED FORCED JET**

The present work investigates the dynamics of coherent structures, including their scales and intensity, in an initial region of a submerged round forced jet by a Particle Image Velocimetry (PIV) technique for measurements of instantaneous velocity fields and statistical analysis tool Dynamic Mode Decomposition (DMD). The PIV measurements were carried out with 1,1 kHz acquisition rate. Application of DMD to the measured set of the velocity fields provided information about dominant frequencies, contained in DMD spectrum, of velocity fluctuations in different flow regions and about scales of the corresponding spatial coherent structures, contained in DMD modes. Additional calculations of time-spectra from turbulent fluctuations showed good agreement between frequencies of the main harmonics and characteristic frequencies of the dominant dynamic modes. Superposition of relevant DMD modes approximately described nonlinear interaction of coherent structures: vortex formation, their quasi-periodic pairing with modulation amplitude of generated harmonics.

*Keywords:* turbulent round jet, periodic forcing, coherent structures, dynamics of vortices, Particle Image Velocimetry, Dynamic Mode Decomposition.