

УДК 533.6.011

**В. П. Замураев, А. П. Калинина**

Новосибирский государственный университет  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

Институт теоретической и прикладной механики  
им. С. А. Христиановича СО РАН  
ул. Институтская, 4/1, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: zamuraev@itam.nsc.ru

### **ТЕХНОЛОГИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕРМОДИНАМИКЕ И МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ**

В настоящее время методические подходы к решению задач сложнее школьного уровня развиты слабо. В данной работе представлены элементы технологии решения задач по термодинамике и молекулярной физике. Кроме того, предлагаются технические приемы, которыми необходимо грамотно пользоваться при решении некоторых задач, а также алгоритмы для решения классов задач с конкретными примерами их реализации.

*Ключевые слова:* технология решения задач, молекулярная физика, термодинамика.

#### **Введение**

Переход от школьного к университетскому образованию сопряжен для бывших школьников с большими трудностями, связанными как с новыми для молодых студентов областями знания, так и с более сложным уровнем решаемых задач [1]. Один из путей решения проблемы – создание интерактивных систем обучения физике с применением информационных технологий [2–4]. Другой подход заключается в разработке алгоритмов с четко выделенными шагами для решения определенных классов задач с применением конкретных технических приемов. Чаще всего последний подход применяется при подготовке школьников [4; 5]. Однако технические приемы, которые необходимы для решения задач вузовского уровня, часто остаются «за кадром». Указанные проблемы нередко сохраняются и в научно-исследовательской работе. Данная работа предпринята с целью помочь преодолеть возникающие барьеры при изучении термодинамики и молекулярной физики. Возможно, она окажется полезной в более широком плане.

В термодинамике и молекулярной физике рассматриваются явления, обусловленные совокупным действием огромного числа непрерывно движущихся молекул, из которых состоят окружающие тела. Благодаря очень большому числу частиц система приобретает совершенно новое качество: ее равновесные макроскопические свойства не зависят от начальных положений и скоростей этих частиц. Коллективное движение огромного числа молекул определяет явления переноса. При решении задач по термодинамике и молекулярной физике можно выделить несколько классов типовых задач и методов.

1. Поиск уравнения равновесного процесса.
2. Вычисление тепла, работы и изменения внутренней энергии в равновесных и неравновесных процессах.
3. Ввод физической величины на рисунках с помощью стрелок и корректное определение знаков в уравнениях.

4. Направление передачи тепла и знаки в уравнениях термодинамики. Решение задач на циклические процессы.

5. Установление связи между теплоемкостью и направлением передачи тепла.

6. Вычисление изменения термодинамических параметров (например, энтропии) в процессе перехода между двумя равновесными состояниями.

7. Явления переноса в плотных и разреженных газах.

Это далеко не полный перечень типовых задач и вопросов. Здесь кратко обрисовуем основные подходы к решению и ответу на некоторые из них.

Рассматриваемые методические подходы состоят в следующем. Во-первых, необходимо определить разделы изучаемой подобласти физики, к которой относятся моделируемые явления. Во-вторых, нужно в общей формулировке вспомнить глобальные физические законы, которые могут быть применены к данному явлению. В-третьих, выделить класс физических моделей, применимых к данному явлению. В-четвертых, определить класс, к которому относится данная задача, и применить алгоритм решения для данного класса. В алгоритме решения должны содержаться все эти шаги. Идея заключается в том, чтобы в процессе ответа на эти вопросы можно было восстановить начало алгоритма решения задач данного класса и, собственно, определить сам класс.

Основные сложности возникают в процессе ознакомления и последующего извлечения информации из условия задачи. Здесь мы укажем основные ключевые моменты, на которые следует обращать внимание.

### Поиск уравнения равновесного процесса

К рассматриваемому классу относятся задачи, в которых требуется найти уравнение процесса. При этом всегда предполагается, что процесс равновесный. Термин введен в рамках термодинамики и определяет процесс, идущий через непрерывную последовательность равновесных состояний. Поэтому само уравнение процесса должно быть функцией от параметров равновесного термодинамического состояния. Количественные характеристики равновесного процесса в общем случае можно получить из первого начала в дифференциальной форме. Кроме того, необходимо использовать уравнения, связывающие параметры равновесного состояния, – это термическое и калорическое уравнения состояния. Последовательность этих действий показана ниже.

Уравнение каждого процесса ищем в виде

$$f(p, V) = \text{const.}$$

Пишем первое начало термодинамики в дифференциальной форме

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

где  $\delta Q$  – подведенная к системе теплота,  $dU$  – изменение внутренней энергии,  $\delta A$  – работа системы.

В это уравнение необходимо подставить конкретные выражения для  $dU$ ,  $\delta A$  и  $\delta Q$ . Например, исследуемая система – идеальный газ в количестве одного моля, тогда для него мы имеем:

- термическое уравнение состояния  $pV = RT$ ,
- калорическое уравнение состояния  $U = c_V T$ ,
- выражение для работы  $\delta A = pdV$ ,
- полученное системой тепло  $\delta Q$  определяет ее теплоемкость в исследуемом равновесном процессе:

$$c = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_{\text{процесс}}.$$

Ограничимся поиском уравнения адиабатического процесса. После подстановки в уравнение первого начала термодинамики  $\delta Q = 0$ ,  $dU = c_V dT$  и  $\delta A = pdV$  имеем уравнение в дифференциалах:

$$c_V dT + pdV = 0.$$

Исключение температуры с помощью термического уравнения состояния дает

$$RdT = d(pV) = pdV + Vdp,$$

$$c_V/R \cdot V dp + (c_V/R + 1) p dV = 0,$$

или

$$V dp + \gamma p dV = 0,$$

где  $\gamma = c_p/c_V$  – показатель адиабаты. Уравнение решается разделением переменных, что дает уравнение адиабатического процесса:

$$pV^\gamma = \text{const.}$$

### Вычисление тепла, работы и изменения внутренней энергии в равновесных и неравновесных процессах

Для каждого процесса перехода между двумя равновесными состояниями необходимо выполнить следующие действия.

Внимательно прочитать условие задачи, понять, «быстро или медленно идет процесс». Если сказано или из условий задачи следует, что процесс идет медленно, можно или воспользоваться уже известным уравнением равновесного процесса, или получить его из дифференциальной формы первого начала термодинамики и затем вычислить необходимые величины.

Если же протекающий в системе процесс является неравновесным или ничего определенного о нем не сказано, то необходимо:

- 1) написать первое начало термодинамики в интегральной форме;
- 2) термическое и калорическое уравнения состояния для начального и конечного моментов времени;
- 3) выражение для работы внешних сил (если процесс неравновесный, то внутренних термодинамических параметров системы не существует);
- 4) определить из физических соображений (или из условия задачи) подведенное тепло.

Пользуясь этими уравнениями, можно определить параметры конечного состояния термодинамической системы. Только после этого можно определить требуемые величины.

В качестве иллюстрации рассматриваются две задачи: с равновесным процессом и при неравновесном изменении состояния системы. Для первого случая решается следующая задача.

*Задача.* В цилиндрическом сосуде находится поршень, который может перемещаться без трения. Первоначально поршень делит сосуд на части объемом  $V_0$  каждая. Обе половины сосуда заполнены идеальным газом до давления  $p_0$ . Найти работу, которую нужно совершить, чтобы, медленно двигая поршень, сжать газ в одной из частей сосуда вдвое. Сосуд теплоизолирован. Поршень проводит тепло.

*Решение.* Так как система теплоизолирована ( $Q = 0$ ), то, согласно первому началу термодинамики, только работа внешних сил приводит к изменению внутренней энергии системы:

$$A' = \Delta U_1 + \Delta U_2.$$

При этом предполагается, что поршень перемещается без трения.

В обеих равных частях сосуда одинаковое количество одного и того же идеального газа. Поскольку поршень проводит тепло, то выражение для работы приводится к виду

$$A' = \frac{2p_0V_0}{\gamma - 1} \left( \frac{T}{T_0} - 1 \right),$$

где  $T$  и  $T_0$  – конечная и начальная температуры газов. Остается вычислить отношение этих температур. Так как поршень перемещается медленно, процесс можно считать равновесным. Его уравнение находим из первого начала термодинамики в дифференциальной форме:

$$0 = 2dU + p_1dV_1 + p_2dV_2.$$

Здесь правильным с методической точки зрения является то, что первое начало записано для всей системы, а не отдельно для каждой части. В этом случае нет необходимости рассматривать перетекание тепла через поршень от одной части сосуда к другой. При этом не рассматривается разность давлений на поршень. Уравнение записывается симметрично относительно

но газов в обеих частях сосуда. Каждый газ совершает работу (положительную либо отрицательную), результат складывается.

В уравнении учтено, что процесс протекает без подвода тепла к системе, температура в обеих частях сосуда одинаковая, и, следовательно, изменение внутренней энергии одинаковое. После подстановки выражения для дифференциально малого изменения внутренней энергии через  $dT$  и исключения давления с помощью термического уравнения состояния получим:

$$0 = 2\nu c_V dT + \nu RT \left( \frac{dV_1}{V_1} + \frac{dV_2}{V_2} \right).$$

Уравнение решается разделением переменных. В результате получим уравнение процесса

$$\frac{T}{T_0} = \left( \frac{V_0^2}{V_1 V_2} \right)^{(\gamma-1)/2},$$

что позволяет найти работу.

Для второго случая при неравновесном изменении состояния системы рассмотрим следующую задачу.

*Задача.* Идеальный газ находится в эластичной адиабатической оболочке под давлением  $p_1$ , имея температуру  $T_1$ . Внешнее давление на газ скачкообразно изменяется до значения  $p_2$  ( $< p_1$ ). Определить температуру газа  $T_2$ , которая при этом установится.

*Решение.* Скачкообразное изменение внешнего давления приводит к неравновесному процессу изменения состояния газа в оболочке. Понятие «уравнение процесса» к данному случаю не применимо. Первое начало термодинамики можно использовать только в интегральной форме. Так как оболочка адиабатическая, подвода теплоты нет:  $Q = 0$  (рис. 1). Изменение внутренней энергии газа происходит за счет работы внешних сил:

$$\Delta U = A'.$$

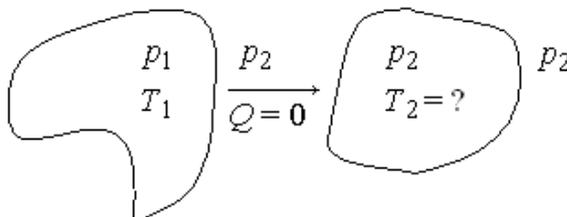


Рис. 1

Работа по изменению объема газа, совершаемая силами внешнего давления, равна

$$A' = -p_2(V_2 - V_1).$$

Газ идеальный. Для него изменение внутренней энергии в процессе равно

$$\Delta U = \nu c_V(T_2 - T_1).$$

Используя термическое уравнение состояния идеального газа

$$pV = \nu RT,$$

найдем температуру  $T_2$  газа в оболочке, которая установится, когда газ придет в равновесие:

$$T_2 = T_1 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{p_2 - p_1}{p_1} \right).$$

### Ввод физической величины на рисунках с помощью стрелок и корректное определение знаков в уравнениях

Такой вопрос становится актуальным, когда решаются задачи по механике либо задачи по термодинамике на циклические процессы.

Часто задают вопрос: куда необходимо направить силы (или поставить направление передачи теплоты), если неизвестно, куда реально тянет сила (или какой объект получает положительную теплоту).

Ответ простой: абсолютно неважно, куда направить стрелку, ее можно направить в любую сторону, но в уравнениях эта сила должна быть отображена со знаком ее проекции на ось. Если нарисовать направление силы по оси, то необходимо взять ее с плюсом, иначе – с минусом. Если реально сила действует в противоположную сторону, то при решении системы уравнений получится отрицательное значение.

Особые трудности возникают, когда силу нужно определить через некоторую специальную силу (например, через напряжение трения), при определении которой уже присутствует выбор направления на ось.

Напряжение трения  $\tau_{xy}$  – это сила, которая:

- 1) действует на площадку единичной площади;
- 2) действует на ту сторону площадки, внутренняя нормаль к которой направлена вдоль оси  $y$ , при этом напряжение трения  $\tau_{xy}$  будет направлено вдоль оси  $x$ .

В случае ламинарного течения вдоль оси  $x$  со скоростью, меняющейся с координатой  $y$ , выражение для напряжения трения  $\tau_{xy}$  имеет вид

$$\tau_{xy} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Пусть, например, решается такая задача: одна пластина движется с постоянной скоростью  $u$  вдоль оси  $x$ , вторая стоит на месте. Вдоль оси  $x$  действует переменная сила, градиент которой постоянен и равен  $dp/dx$ , но задан как символьное выражение, может быть как положительным, так и отрицательным. Куда течет жидкость, куда направлено напряжение трения, определить нельзя. Задача должна решаться в «буквах». Схематически задача представлена на рис. 2.

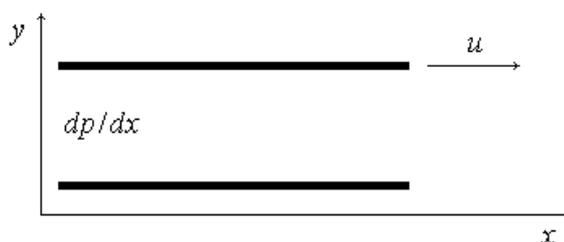


Рис. 2

Решение задачи ищем стандартным образом. Поскольку картина течения со временем не изменяется, выделяем элементарный объем жидкости и рисуем силы, которые действуют на него.

Правило 1. На рисунке изображаем силы, направляя их как угодно. Но ни в коем случае не используем специальные выражения для сил, т. е. на рисунке могут быть введены обозначения  $F_{\text{тяжести}}$ ,  $F_{\text{трения}}$ , но не  $mgh$ ,  $S \cdot \tau_{xy}$  и т. д.

Только после того, как написаны уравнения равновесия сил в проекциях, можно производить подстановки значений сил через специальные силы.

Как это сделать? Например, решая задачу о течении вязкой жидкости, введем следующие обозначения сил:  $F_1$ ,  $F_2$ , а стрелки направим в одну сторону, см. рис. 2. Абсолютно неважно, куда направить, главное – вставить в уравнения в соответствии с проекцией на выбранную ось, а при введении специальной силы еще раз учесть ось. Силы давления направлены всегда перпендикулярно к поверхности, на которую они действуют и сонаправлены с внутренней нормалью к ней.

Для сил давления, действующих на торцы, буквенных обозначений на рисунке нет. Пусть размер выделенного объема жидкости в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, равен единице. Длину выделенного объема в направлении оси  $x$  будем считать равной также

единице. Тогда площадь верхней и нижней поверхностей имеет значение, равное единице. Уравнение равновесия сил в проекции на ось  $x$  выглядит следующим образом (рис. 3):

$$F_1 + F_2 + (\text{давление слева}) \cdot dy - (\text{давление справа}) \cdot dy = 0.$$

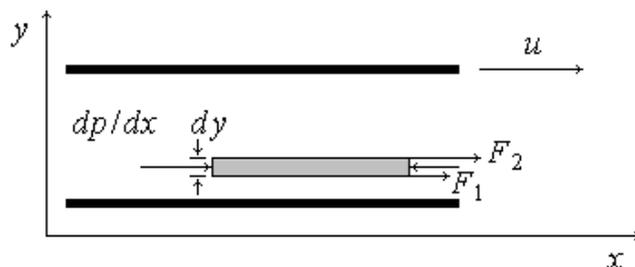


Рис. 3

В этом уравнении величины (давление слева), (давление справа) всегда положительны. Теперь необходимо выразить  $F_1$  и  $F_2$  через напряжения трения.

Начинаем с  $F_1$ . Эта сила действует на поверхность выделенного объема, имеющую внутреннюю нормаль, сонаправленную с осью  $y$ , а сама сила  $F_1$  сонаправлена с осью  $x$ . По определению, напряжение трения  $\tau_{xy}$  сонаправлено с осью  $x$  и действует на площадку, внутренняя нормаль к которой также сонаправлена с осью  $y$ . Все те же условия, что и для  $F_1$ . Значит,

$$F_1 = \tau_{xy}(y).$$

Другая ситуация возникает для  $F_2$ . Эта сила направлена вдоль оси  $x$ , но она действует на площадку, внутренняя нормаль к которой противоположна оси  $y$ . Тогда

$$F_2 = \tau_{x,-y}(y + dy) = -\tau_{xy}(y + dy).$$

Таким образом, подставляя выражения через напряжение трения для  $F_1$  и  $F_2$ , получаем следующее уравнение:

$$\tau_{xy}(y) - \tau_{xy}(y + dy) + (\text{давление слева}) \cdot dy - (\text{давление справа}) \cdot dy = 0.$$

Пусть теперь силы на рисунке направлены по-другому (рис. 4). Сила  $F_2$  направлена противоположно оси  $x$ .

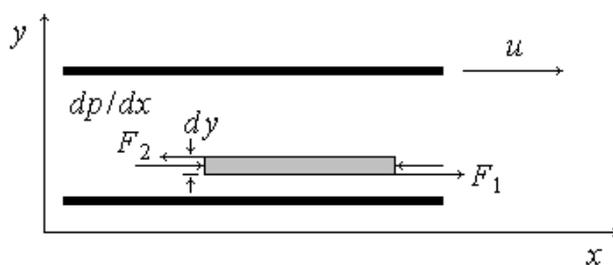


Рис. 4

Уравнение равновесия сил в проекции на ось  $x$  выглядит так:

$$F_1 - F_2 + (\text{давление слева}) \cdot dy - (\text{давление справа}) \cdot dy = 0.$$

Выразим  $F_1$  и  $F_2$  через напряжения трения. Для  $F_1$  все рассуждения те же самые, поэтому получаем:

$$F_1 = \tau_{xy}(y).$$

Для  $F_2$  результат получается другой. Эта сила теперь действует на площадку, нормаль к которой противоположна оси  $y$ , а сама  $F_2$  противоположна оси  $x$ . Значит,

$$F_2 = \tau_{-x,-y}(y + dy) = (-1) \cdot (-1) \cdot \tau_{xy}(y + dy) = \tau_{xy}(y + dy).$$

Подставляем выражение для  $F_2$  в уравнение равновесия сил. Получаем абсолютно то же самое уравнение, что и в первом случае:

$$\tau_{xy}(y) - \tau_{xy}(y + dy) + (\text{давление слева}) \cdot dy - (\text{давление справа}) \cdot dy = 0.$$

Отсюда видно, что стартовая расстановка направлений сил трения может быть любой.

### Направление передачи тепла и знаки в уравнениях термодинамики Решение задач на циклические процессы

Циклические процессы имеют место при работе тепловых машин, холодильных установок и т. д. Ограничимся случаем работы тепловой машины. Любая тепловая машина состоит из нагревателя, холодильника и рабочего тела. Рабочее тело в циклическом процессе получает от нагревателя тепло, совершает работу, избыточное тепло отдает холодильнику. Схематическое изображение тепловой машины показано на рис. 5.

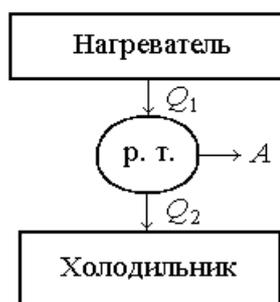


Рис. 5

Первое начало термодинамики в применении к циклическому процессу для рабочего тела имеет вид

$$Q = A,$$

где  $Q$  – все тепло, полученное рабочим телом за цикл (и положительное, и отрицательное),  $A$  – работа за цикл.

Выразим  $Q$  через отдельные составляющие  $Q_1$  и  $Q_2$ . Возникает вопрос, с какими знаками их учитывать в уравнении.

В первом начале термодинамики фигурирует «тепло, полученное системой». Согласно рис. 5, тепло  $Q_1$  получило рабочее тело, а тепло  $Q_2$  – холодильник. Следовательно, рабочее тело получило от холодильника тепло с обратным знаком  $-Q_2$ . Тогда все тепло, полученное рабочим телом, в рамках обозначений на рис. 5 имеет вид

$$Q = Q_1 + (-Q_2) = Q_1 - Q_2;$$

$$A = Q_1 - Q_2.$$

Пусть теперь на рисунке введено другое направление стрелок (рис. 6). В соответствии с выбранным направлением стрелок рабочее тело получило количества тепла  $Q_1$  и  $Q_2$ .



Рис. 6

Следовательно, теперь все полученное рабочим телом тепло равно сумме:

$$Q = Q_1 + Q_2,$$

и работа за цикл равна

$$A = Q_1 + Q_2.$$

Во всех термодинамических законах используется понятие «тепла, полученного системой». Следовательно, если стрелки на рисунках, определяющие направление передачи тепла, направлять к системе, то будет получена стандартная форма всех уравнений. Поэтому, когда в задаче рассматривается одна система, лучше всего все стрелки направлять к ней. Однако если в задаче фигурирует несколько тел, одну стрелку ко всем им сразу направить невозможно; необходимо четко представлять, какое тело сколько тепла получило, отдало, и грамотно расставить знаки, а также помнить, для какого тела пишутся уравнения.

### Установление связи между теплоемкостью и направлением передачи тепла

Аналогичные сложности наблюдаются при использовании понятия «теплоемкость». Например, решается задача, в которой от холодильников и нагревателей отбирается дифференциально малое тепло, производимая работа дифференциально мала, а холодильник и нагреватель имеют конечные теплоемкости  $C_1$ ,  $C_2$  (рис. 7).



Рис. 7

Здесь также возникает вопрос о знаке работы  $\delta A$ . Если направить стрелку от рабочего тела, значит, работу совершает оно. Работа войдет в уравнения со стандартным знаком, иначе – знак поменяется на противоположный.

Согласно рис. 7 записываем первое начало термодинамики для циклического процесса:

$$\delta A = \delta Q_1 + \delta Q_2.$$

Выразим  $\delta Q_1$  и  $\delta Q_2$  через теплоемкости. По определению,

$$\langle \text{теплоемкость} \rangle = \langle \text{тепло, полученное телом} \rangle / \langle \text{приращение температуры тела} \rangle.$$

Поэтому в выражении для теплоемкости нагревателя фигурирует полученное им тепло. По рис. 7,  $\delta Q_1$  получило рабочее тело от нагревателя. Значит, нагреватель получил  $-\delta Q_1$ . Таким образом, имеем

$$C_1 = -\delta Q_1 / dT.$$

Аналогично в выражении для теплоемкости холодильника фигурирует тепло, полученное им. По рис. 7,  $\delta Q_2$  получило рабочее тело от холодильника. Следовательно, холодильник получил  $-\delta Q_2$ .

$$C_2 = -\delta Q_2 / dT.$$

Тогда первое начало для цикла будет выглядеть так:

$$\delta A = -C_1 \cdot dT - C_2 \cdot dT.$$

Пусть теперь стрелки на рисунке расставлены не так, как в предыдущем случае, а в противоположном направлении при учете теплообмена между рабочим телом и холодильником (рис. 8).



Рис. 8

Согласно рис. 8, рабочее тело получило  $\delta Q_1$  от нагревателя и  $(-\delta Q_2)$  от холодильника, поэтому первое начало имеет вид

$$\delta A = \delta Q_1 - \delta Q_2.$$

Однако изменится и связь теплоемкости с  $\delta Q_2$ . Для  $\delta Q_1$  все будет по-старому:

$$C_1 = -\delta Q_1/dT.$$

Для  $C_2$  (так как тепло  $\delta Q_2$  получил холодильник, и знак минус не нужен) получим выражение

$$C_2 = \delta Q_2/dT.$$

Подставляем выражения для  $\delta Q_1$ ,  $\delta Q_2$  через теплоемкости и получаем то же самое уравнение:

$$\delta A = -C_1 \cdot dT - C_2 \cdot dT.$$

### Вычисление изменения энтропии в процессе перехода между двумя равновесными состояниями

Задача по вычислению изменения энтропии в результате перехода системы из одного равновесного состояния в другое (также равновесное) состояние может решаться двумя способами. Один из них применяется, если известна зависимость энтропии от параметров системы. Его применение не всегда возможно. Другой способ является универсальным. Он основан на использовании свойства энтропии как функции состояния. Это свойство можно переформулировать так: изменение энтропии при переходе системы между двумя равновесными состояниями не зависит от пути перехода. Следовательно, реальный процесс (неравновесный или со сложной физикой) может быть заменен подходящим равновесным процессом или несколькими равновесными процессами. Условие одно: система должна перейти в конечное равновесное состояние.

Для неравновесного процесса второе начало термодинамики дает неравенство

$$S_2 - S_1 \geq \int_{(1)}^{(2)} \frac{\delta Q}{T_e}.$$

Здесь  $T_e$  – температура теплового резервуара, из которого система получает количество тепла  $\delta Q$ . Это неравенство определяет направление процесса, но не дает изменения энтропии.

Для равновесного процесса в соответствии со вторым началом имеем

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

Здесь  $T$  – температура системы в момент получения тепла  $\delta Q$ . Равенство позволяет определить количественное изменение энтропии:

$$S_2 - S_1 = \int_{(1)}^{(2)} \frac{\delta Q}{T}.$$

Вопрос состоит в выборе подходящего равновесного процесса. Ответ на него нередко вызывает затруднения. Связано это, отчасти, с отсутствием ясного представления о конечном состоянии системы. Итак, решение задачи начинается с выяснения, в какое равновесное состояние система переходит в реальном процессе. При этом предполагается, что начальное

состояние полностью определено (хотя возможно, что конечное состояние системы известно, а найти нужно начальное ее состояние). Для определения одного из двух состояний используется первое начало термодинамики в интегральной форме. Оно применимо как в случае равновесных процессов, так и при неравновесных переходах.

В условии задачи следует обратить внимание на характер взаимодействия системы с окружающими телами, определяемого наличием подвижного поршня и жестких стенок (от этого зависит работа внешних сил), существованием тонких или адиабатических стенок и перегородок (от них зависит подвод тепла к системе и теплообмен между ее частями). Полупроницаемые перегородки и маленькое отверстие в стенке определяют материальное взаимодействие.

После того, как найдено подведенное к системе тепло, вычислена работа внешних сил, из первого начала термодинамики можно получить информацию, скажем, о конечном состоянии системы. Поскольку и начальное состояние системы, и ее конечное состояние являются равновесными, то извлеченная информация дополняется сведениями из термического и калорического уравнений состояния в оба момента времени. Все это позволяет полностью определить конечное состояние и при известном начальном состоянии подсказать, каким образом можно перейти из одного состояния в другое. После этого на каждом участке равновесного процесса вычисляется изменение, и суммированием находится полное изменение энтропии. В качестве иллюстрации сказанного решается задача.

*Задача.* Два одинаковых адиабатически изолированных сосуда, содержащих равное число молей одного и того же идеального газа при разных давлениях, соединены трубкой с краном. Кран открывается, и состояния газа в обоих сосудах становятся одинаковыми. Показать, что энтропия при этом процессе увеличивается.

*Решение.* Сосуды одинаковые, содержат равное число молей одного и того же газа. Поскольку давление в сосудах разное, то газы имеют различную температуру. Когда кран открывается, из-за разницы в давлениях начинается перетекание газа из одного сосуда в другой, из-за различия в температуре возникает теплообмен. Происходит неравновесный процесс выравнивания состояний (рис. 9).

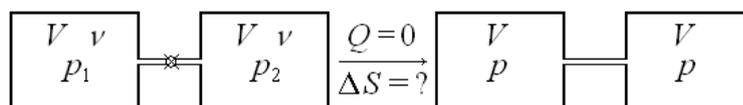


Рис. 9

Пусть начальные значения давления равны  $p_1$  и  $p_2$  в первом и втором сосудах соответственно. Найдем параметры газов в конечном состоянии. Для этого воспользуемся первым началом термодинамики. Сосуды адиабатически изолированные, т. е. подвода теплоты к системе газов нет:  $Q = 0$ . Стенки сосудов жесткие. Следовательно, отсутствует и работа внешних сил:  $A' = 0$ . Из первого начала следует, что в данном случае внутренняя энергия системы в результате процесса не изменяется:  $\Delta U = 0$ . Так как оба газа идеальные, кроме того, в сосудах один и тот же газ и число молей равное, то равенство нулю изменения внутренней энергии системы этих газов означает, что конечная температура газов равна полусумме начальных значений:

$$\Delta U = 0 \rightarrow T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2).$$

Несмотря на перетекание газа из сосуда в сосуд в процессе выравнивания, в конечном состоянии газ будет равномерно распределен по сосудам, и, так как сосуды одинаковые, в каждом из них окажется столько же молей, сколько было вначале. Другими словами, как  $\nu$  молей газа занимали объем  $V$ , такой же объем они будут занимать и после выравнивания состояний. Итак, найдены конечные значения объема и температуры каждого газа.

Энтропия системы в результате неравновесного процесса без подвода теплоты возрастет (это следствие второго начала термодинамики). Вместе с тем энтропия – функция состояния,

ее изменение не зависит от процесса. Для вычисления этого изменения неравновесный процесс заменяется подходящим равновесным, в данном случае для каждого газа в отдельности изохорическим процессом. Тогда, используя второе начало термодинамики для равновесных процессов, найдем

$$\Delta S_i = \int \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_i}^T \frac{\nu c_V dT}{T} = \nu c_V \ln \frac{T}{T_i} \quad i=1,2.$$

Энтропия относится к аддитивным величинам: изменение энтропии полной системы равно сумме изменений энтропии для отдельных независимых подсистем. Поэтому имеем

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \nu c_V \ln \frac{T^2}{T_1 T_2} = \nu c_V \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2}.$$

По условию заданы начальные давления. Из термического уравнения состояния идеального газа при равенстве объемов следует, что отношение температур равно отношению давлений:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}.$$

Окончательно имеем

$$\Delta S = \nu c_V \ln \frac{(p_1 + p_2)^2}{4 p_1 p_2} > 0.$$

Полученный результат согласуется с законом возрастания энтропии.

### Явления переноса в плотных и разреженных газах

Теплообмен, конвекция, диффузия и другие процессы относятся к явлениям переноса. Их протекание зависит от соотношения между средней длиной свободного пробега молекул и характерным размером рассматриваемой области. Характерный размер – это длина вектора, равная расстоянию между границами системы (например, стенками), при этом направление вектора совпадает с направлением переноса свойств. Если в рассматриваемой системе имеется два различных по масштабу расстояния, то может оказаться, что для переноса свойств в одном направлении необходимо пользоваться моделью плотного газа, а в другом – моделью разреженного газа.

При малых длинах пробега, точнее при выполнении условия

$$p \gg p_0 = kT / (\sqrt{2}\sigma h)$$

( $h$  – характерный размер области,  $\sigma$  – сечение столкновения молекул) применима гипотеза локального термодинамического равновесия. Суть гипотезы состоит в следующем: предполагается, что все молекулы, попавшие в объем, размеры которого порядка  $\bar{\lambda}$ , испытают в нем соударения, и в объеме установится локальное равновесие с некоторой температурой, плотностью и т. д. В другом подобном объеме также устанавливается равновесное состояние, но параметры среды, вообще говоря, будут другие. Среда (газ) в целом не находится в равновесии. Такие объемы можно считать точками, в которых определены температура и другие параметры среды. От точки к точке эти параметры меняются. В рамках этого приближения возможно непрерывное распределение параметров (кусочно-непрерывное распределение имеет место непременно). Параметры могут изменяться и с течением времени. В среде возникают потоки массы, импульса и энергии. Эти потоки определяются градиентами параметров.

В другом предельном случае

$$p \ll p_0 = kT / (\sqrt{2}\sigma h)$$

длина свободного пробега оказывается много больше характерного размера, и молекулы будут летать, сталкиваясь чаще со стенками сосуда, чем друг с другом. Установление равновесия в таком ультраразреженном газе (физическом вакууме) осуществляется в результате неупругих столкновений его молекул со стенками. Если молекулы газа имеют более высокую

температуру, то, прилипая к стенке, они отдают избыточную энергию и испаряются уже с температурой стенки. Более холодные молекулы при неупругом столкновении со стенкой приобретают дополнительную энергию. В газе устанавливается равновесие, соответствующее температуре стенок.

Иной характер по сравнению со случаем течения в приближении сплошной среды имеет течение ультраразреженного газа. К примеру, пусть происходит истечение газа из сосуда через отверстие. Если длина свободного пробега мала по сравнению с размерами отверстия, то вблизи отверстия возникает коллективное движение молекул газа, которое следует рассматривать как гидродинамическое течение, обусловленное разностью давлений в сосуде и вне его. В другом крайнем случае, когда размеры отверстия (его диаметр и толщина стенки сосуда) малы, столкновения молекул в окрестности отверстия практически не происходят. Возникающий поток молекул газа называют эффузионным потоком. Его величина определяется известной формулой

$$j = Sn\bar{v} / 4.$$

Решение задач на явления переноса должны начинаться с выяснения, каким приближением можно пользоваться. В условии задачи обычно имеются на это указания либо непосредственно (например, процессы протекают в плотном газе или жидкости, либо в ультраразреженном газе), либо косвенные (заданы числовые значения параметров, определяющие характер переноса). В качестве примера рассмотрим две задачи.

*Задача 1.* Сосуд разделен перегородкой на два равных объема. В перегородке имеются два отверстия – малое и большое по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа, заполняющего сосуд. Газ в первом объеме поддерживается при постоянной температуре  $T_1 = 800$  К, а во втором сосуде – при  $T_2 = 200$  К. В каком направлении будет перетекать газ через малое отверстие, если перекрыть большое? Какая масса  $\Delta m$  газа перейдет при этом из одного объема в другой, если общая масса газа в сосуде равна  $m$ ?

*Решение.* В условии сказано, что одно отверстие большое, а другое маленькое по сравнению со средней длиной свободного пробега молекул. Это прямое указание на то, что при открытом большом отверстии следует пользоваться уравнениями и законами для сплошной среды, а при закрытом большом отверстии рассматривать перетекание газа через малое отверстие в приближении ультраразреженного газа (рис. 10).

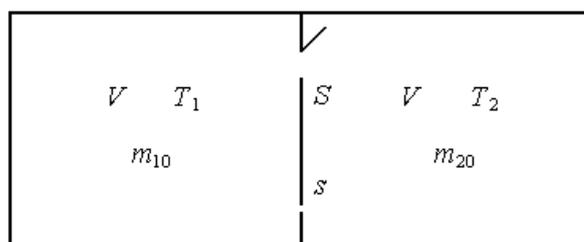


Рис. 10

Первоначально большое отверстие открыто. В этом случае перетекание газа определяется разностью давлений в сосудах. Стационарное состояние данной системы означает, что разность давлений равна нулю, т. е.

$$p_1 = p_2.$$

Это условие позволяет найти стационарное распределение масс идеального газа в сосудах:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} = \frac{1}{4}.$$

Если  $m$  – суммарная масса, то в первом сосуде первоначально находилась масса

$$m_1 = \frac{1}{5} m.$$

Когда большое отверстие перекрыто, перетекание газа происходит через малое отверстие. Условие стационарного состояния системы в приближении ультраразреженного газа имеет вид

$$j_1 = j_2, \text{ или } \frac{1}{4} n_1 \bar{v}_1 = \frac{1}{4} n_2 \bar{v}_2.$$

Используя его, получим

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \frac{1}{2}.$$

В результате найдем

$$m_1 = \frac{1}{3} m.$$

Таким образом, масса газа в первом сосуде увеличится на

$$\Delta m_1 = \frac{2}{15} m.$$

При решении данной задачи используются модель сплошной среды и приближение ультраразреженного газа. Показаны различие и некоторые особенности решения.

**Задача 2.** В плохо откачанном сосуде Дьюара давление воздуха, оставшегося между стенками, равно  $p_0 = 10^{-3}$  мм рт. ст. при комнатной температуре  $T_0 = 293$  К. Поверхность сосуда  $s = 600$  см<sup>2</sup>, зазор между стенками  $l = 0,4$  см. Оценить массу  $M$  жидкого воздуха, испаряющегося из такого сосуда за время  $t = 1$  ч. Теплота испарения жидкого воздуха  $q = 48,4$  кал/г, его температура  $T = 93$  К.

**Решение.** В условии нет определенного указания, каким приближением следует пользоваться при решении задачи. Сказано только, что задача решается для плохо откачанного сосуда Дьюара. Чтобы понять, какое приближение можно использовать при расчете потока тепла к жидкому воздуху в колбе, необходимо вычислить по известной формуле среднюю длину свободного пробега молекул воздуха, оставшегося в пространстве между стенками колбы. Для атмосферного давления  $p = 760$  мм рт. ст. и комнатной температуры  $T = 293$  К длина свободного пробега молекул равна

$$\bar{\lambda} = 5,8 \cdot 10^{-6} \text{ см.}$$

Для рассматриваемых условий ее значение равно

$$\bar{\lambda}_0 = \bar{\lambda} \frac{p}{p_0} = 5,8 \cdot 10^{-6} \frac{760}{10^{-3}} = 4,3 \text{ см.}$$

Это на порядок больше, чем зазор между стенками  $l = 0,4$  см. Следовательно, теплообмен между стенками может рассматриваться в приближении ультраразреженного газа. В этом приближении молекулы перелетают от одной стенки к другой, не сталкиваясь между собой, и переносят энергию, соответствующую температуре стенки, от которой они летят. Выбор приближения определяет решение задачи.

### Заключение

Представленные элементы технологии решения задач по термодинамике и молекулярной физике не исчерпывают всей проблемы. Однако авторы надеются, что данная работа послужит толчком к освоению и развитию методов и способов решения задач рассматриваемого раздела физики.

### Список литературы

1. Ерофеева Г. В., Склярова Е. А. Преподавание физики в техническом вузе на современном этапе // Вестн. Том. гос. пед. ун-та. 2012. Вып. 4 (119). С. 248–249.
2. Ерофеева Г. В., Склярова Е. А., Крючков Ю. Ю. Методическая система обучения физике в техническом университете // Изв. Том. политехн. ун-та. 2007. № 3. С. 237–242.

3. Ларионов В. В., Зеличенко В. М. О новом подходе к принципу наглядности в проблеме соотношения виртуальных и материальных носителей дидактических средств в методике обучения физике // Вестн. Том. гос. пед. ун-та. 2006. Вып. 6 (57). С. 120–124

4. Методика обучения физике в школе и вузе: Сб. науч. ст. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2000.

5. Гурина Р. В. Некоторые приемы, помогающие решению задач // Преподавание физики в высшей школе. 2006. № 32. С. 17–23.

*Материал поступил в редколлегию 24.06.2013*

**V. P. Zamuraev, A. P. Kalinina**

**TECHNOLOGY OF THE SOLUTION OF TASKS OF THERMODYNAMICS  
AND MOLECULAR PHYSICS**

Now tasks which are more difficult, than school, are characterized with a small number of methodical approaches. In this work elements of technology of the solution of tasks of thermodynamics and molecular physics are presented. Besides, in work some techniques which should be used competently at the some tasks solution, and also algorithms for the solution of classes of tasks with concrete examples of their realization are offered.

*Keywords:* technology of the tasks solution, molecular physics, thermodynamics.