

УДК 621.373.826; 537.531.2

**О. А. Шевченко, Н. А. Винокуров**

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН  
пр. Акад. Лаврентьева, 11, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: O.A.Shevchenko@inp.nsk.su

### **СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОДНОПРОХОДНЫХ ЛАЗЕРОВ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДВУХЧАСТИЧНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ**

Возникновение генерации из начальных флуктуаций плотности тока электронного пучка в однопроходных лазерах на свободных электронах (ЛСЭ), работающих в режиме сверхлюминесценции, обычно рассматривается в линейном приближении. В этом случае усиленные в ЛСЭ флуктуации линейно выражаются через начальные возмущения, усреднение по которым выполняется явным образом. В общем случае, когда влияние нелинейных эффектов становится существенным, такой подход использовать нельзя. За последние годы нами был разработан альтернативный подход к этой проблеме, основанный на цепочке уравнений Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГКИ) для  $n$ -частичных функций распределения. Взаимодействие частиц в ЛСЭ является запаздывающим, но путем специального выбора независимой переменной, играющей роль времени, запаздывание можно исключить. Это позволяет записать цепочку ББГКИ, аналогичную той, которая используется в обычной статистической физике. В случае ЛСЭ, как и в физике плазмы, цепочку можно оборвать на втором уравнении (для двухчастичной корреляционной функции). Используя данный подход, мы рассматриваем несколько частных случаев, которые иллюстрируют особенности работы ЛСЭ в режиме сверхлюминесценции.

*Ключевые слова:* лазеры на свободных электронах, дробовой шум, функция распределения.

#### **Введение**

В настоящее время коротковолновые лазеры на свободных электронах (ЛСЭ) являются наиболее яркими источниками когерентного рентгеновского излучения. Последние достижения в экспериментальной технике продемонстрировали возможность получения в ЛСЭ излучения с длиной волны до 0,1 нм.

Коротковолновые ЛСЭ обычно работают в однопроходном режиме усилителя с большим коэффициентом усиления. Источником сигнала в них служат начальные флуктуации плотности тока, которые возникают из-за дискретности отдельных электронов (дробовой шум). Поэтому излучение в ЛСЭ имеет стохастическую природу. Его параметры меняются случайным образом как от выстрела к выстрелу, так и в преде-

лах одного светового сгустка. Чтобы определить эти параметры для одного сгустка, необходимо решить уравнения движения для всех частиц совместно с уравнениями Максвелла.

Поскольку число частиц в одном электронном сгустке является очень большим, выполнить такое вычисление в настоящее время не представляется возможным. Существует два подхода к решению этой проблемы, которые используются при компьютерном моделировании работы ЛСЭ [1; 2]. Один из этих подходов основан на уравнении Власова для сглаженного распределения частиц в шестимерном фазовом пространстве, которое решается совместно с уравнениями для поля излучения. В другом подходе для представления распределения электронов в пучке используются макрочастицы.

В случае моделирования возникновения генерации из дробового шума при использовании обоих подходов требуется уделять особое внимание начальным условиям. В частности, в программах, основанных на макрочастицах, используется специальная расстановка частиц, необходимая для подавления искусственно усиленного спонтанного излучения [3]. Не вызывает сомнения, что данный метод работает на линейной стадии, однако не является очевидным, что он дает правильные результаты на стадии насыщения. С другой стороны, в программах, основанных на уравнении Власова, сглаживание функции распределения приводит к искусственному подавлению начального дробового шума.

Следует заметить, что не всегда требуется знать параметры излучения для каждого сгустка. Для некоторых экспериментов существенными являются параметры, усредненные по многим выстрелам. Более того, в случае длинных электронных пучков такое усреднение может происходить и в одном выстреле. Усредненные параметры излучения могут быть также использованы для проверки программ, моделирующих одиночные выстрелы. Для этого необходимо усреднить результаты работы таких программ для различных начальных условий [4].

Таким образом, актуальной задачей является разработка адекватной аналитической теории и численного алгоритма, в которых рассматриваются усредненные параметры электронного пучка и излучения в ЛСЭ. Эта задача может быть решена путем использования стандартных методов статистической механики. Она уже рассматривалась ранее многими авторами, но, как правило, ее решение ограничивалось линейным случаем, для которого можно определить функцию Грина. При этом процедура усреднения по начальным условиям становится элементарной.

Последовательный нелинейный метод решения данной задачи был предложен в [5]. Он основан на цепочке уравнений Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГКИ), в которой используются только первые два уравнения для одночастичной функции распределения и двухчастичной корреляционной функции. В данной статье представлен короткий обзор этого метода, а также приводятся примеры его использования для некоторых частных случаев.

## Основы теории корреляционной функции

### Уравнения движения частиц

При выводе уравнений движения мы делаем ряд общепринятых допущений, которые включают в себя усреднение по периоду ондулятора, параксиальное приближение для уравнений на поле излучения и резонансный характер взаимодействия излучения с частицами. Поскольку движение частиц в ондуляторе является параксиальным, траектории частиц практически не возмущаются полем излучения. При сделанных допущениях уравнения движения для  $k$ -й частицы с продольной координатой  $z^{(k)}$ , относительным отклонением энергии  $\Delta^{(k)}$  и начальными координатами в четырехмерном поперечном фазовом пространстве  $X^{(k)}$  могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dz^{(k)}}{dt} &= 1 - \frac{1}{2\gamma_{ll}^2} + \frac{\Delta^{(k)}}{\gamma_{ll}^2} - \Delta\beta(z^{(k)}, X^{(k)}), \\ \frac{d\Delta^{(k)}}{dt} &= \sum_{l \neq k} \Phi[z^{(k)}, X^{(k)}, z^{(l)}(t^{(l)}), X^{(l)}], \\ t - z^{(k)} &= t^{(l)} - z^{(l)}(t^{(l)}), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\gamma_{ll}$  – релятивистский фактор для средней продольной скорости опорной частицы;  $\Delta\beta(z^{(k)}, X^{(k)})$  – возмущение продольной скорости из-за бетатронных колебаний;  $\Phi$  – продольная «сила», действующая на  $k$ -ю частицу со стороны  $l$ -й частицы, скорость света предполагается равной единице. Мы предполагаем, что поле ондулятора равно нулю для отрицательных  $z$  и что  $\Phi(z^{(k)}, z^{(l)}) = 0$ , если  $z^{(k)} < z^{(l)}$  или  $z^{(l)} < 0$ .

Явное выражение для  $\Phi$  может быть получено путем решения уравнений для поля излучения [5].

Следует отметить, что (1) не является системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), поскольку в ее правой части содержатся координаты частиц  $z^{(l)}$  в запаздывающие моменты времени  $t^{(l)} < t$ . Тем не менее она имеет однозначное решение, которое может быть получено, если для каждой частицы известно время ее влета в ондулятор. Процедура нахождения решения данной системы может оказаться



в фазовом пространстве (4) удовлетворяет уравнению непрерывности, которое эквивалентно исходной системе уравнений движения (3):

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z_1} v_1 + \int d\{2\} \Phi(1,2) N(2;\theta) \frac{\partial}{\partial \Delta_1} \right] \times N(1,\theta) = 0. \quad (5)$$

где  $(i) = (z_i, \Delta_i, X_i)$ ,  $d\{i\} = dz_i d\Delta_i dX_i$ .

Величина  $N(z, \Delta, X; \theta)$  имеет немного необычный физический смысл. Она является плотностью распределения частиц в фазовом пространстве на гиперплоскости  $\theta = \text{const}$ . Для описания динамики частиц в ЛСЭ в качестве независимой переменной обычно используется  $z$ , а как продольные координаты используются

$$\tau_k = \frac{k_0}{k_w} \left( \frac{z}{V_{z0}} - t_k \right) = z - \theta_k.$$

Здесь  $k_0 \approx 2\gamma^2 k_w$  – это резонансное волновое число, а  $V_{z0}$  – продольная скорость опорной частицы. Существует простое соотношение, связывающее плотности распределения для этих двух различных наборов координат:

$$N(z, \Delta, X; \theta) = \frac{1}{v(z, \Delta, X)} N_z(\tau, \Delta, X; z) \Big|_{\tau=z-\theta}. \quad (6)$$

Также можно написать соотношение между  $N(z, \Delta, X; \theta)$  и обычными величинами, такими как ток или степень группировки пучка:

$$\begin{aligned} I(z, t) &= \\ &= ek_0 \int v(z, \Delta, X) N(z, \Delta, X; \theta) \Big|_{\theta=2\gamma^2(t-z)} \times \\ &\times d\Delta dX, \\ b(z) &= \\ &= \frac{1}{N} \int v(z, \Delta, X) N(z, \Delta, X; \theta) e^{i(z-\theta)} \times \\ &\times d\Delta dX d\theta, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $N$  – это полное число частиц.

*Усреднение по начальным условиям*

Для того чтобы выполнить усреднение, необходимо ввести функцию распределения  $f^{(N)}$  координат частиц в  $6N$ -мерном фазо-

вом пространстве, где  $N$  – это полное число частиц. Проинтегрировав эту функцию по  $N-s$  координатам частиц, можно также ввести  $s$ -частичные функции распределения  $f^{(s)}$ . Для усредненных значений микроскопической плотности распределения и ее произведений получают следующие выражения:

$$\langle N(1,\theta) \rangle = Nf^{(1)}(1,\theta) \equiv NF(1,\theta),$$

$$\begin{aligned} \langle N(1,\theta)N(2,\theta) \rangle &= \\ &= Nf^{(1)}(1,\theta)\delta(1-2) + N(N-1)f^{(2)}(1,2,\theta). \end{aligned}$$

Двухчастичная корреляционная функция  $G$  определяется из следующего соотношения:

$$f^{(2)}(1,2,\theta) = F(1,\theta)F(2,\theta) + G(1,2,\theta).$$

В результате усреднения (5) получается цепочка уравнений ББГКИ для  $s$ -частичных функций распределения. В ЛСЭ число взаимодействующих частиц (в данном случае это число частиц на кооперационной длине, которое можно сравнить с хорошо известным параметром из физики плазмы – числом частиц в Дебаевской сфере), является большим, поэтому взаимодействие коллективное. Вклад двухчастичных взаимодействий довольно слабый. Это означает, что  $s$ -частичные функции распределения мало отличаются от произведения  $s$ -одночастичных функций (низкий уровень корреляций между частицами). Естественно, мы также предполагаем отсутствие начальных корреляций между координатами частиц на входе в ондулятор ( $N$ -частичная функция распределения равна произведению  $N$  одинаковых одночастичных функций), так что вторая и высшие корреляционные функции вначале равны нулю:

$$G(1,2,0) = H(1,2,3,0) = \dots = 0.$$

Используя эти предположения, мы можем обрезать цепочку ББГКИ, сохранив лишь два уравнения для одночастичной функции распределения и двухчастичной корреляционной функции:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z_1} v_1 \right] F(1,\theta) &= \\ &= -N \int \Phi(1,2) \frac{\partial}{\partial \Delta_1} G(1,2;\theta) d\{2\}, \quad (8) \\ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial z_2} v_2 \right) G(1,2,\theta) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -N \frac{\partial F(1)}{\partial \Delta_1} \int \Phi(1,3) G(2,3, \theta) d\{3\} - \\
&- N \frac{\partial F(2)}{\partial \Delta_2} \int \Phi(2,3) G(1,3, \theta) d\{3\} - \\
&- \left( \Phi(1,2) \frac{\partial}{\partial \Delta_1} + \Phi(2,1) \frac{\partial}{\partial \Delta_2} \right) F(1)F(2).
\end{aligned}$$

Здесь мы также учли осциллирующий характер зависимости «силы» взаимодействия  $\Phi$  от расстояния между частицами. Следует отметить, что второе уравнение содержит неоднородную часть, которая соответствует действию дробового шума. Левая часть первого уравнения – это уравнение Власова, а правая часть – это интеграл столкновений. Система уравнений (8) эквивалентна уравнениям Ленарда – Балеску в физике плазмы.

#### Двухвременная корреляционная функция

Для того чтобы определить некоторые величины, которые можно непосредственно наблюдать в эксперименте, недостаточно знать одновременную функцию распределения. Например, спектр тока пучка в некоторой точке  $z$  в ондуляторе может быть найден из двухвременной корреляционной функции, которая пропорциональна усредненному произведению  $\langle N(1, \theta_1) N(2, \theta_2) \rangle$ , см. (7). Двухвременная функция удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\partial}{\partial z_1} v_1 \right) G_2(1, \theta_1; 2, \theta_2) = \\
&= -N \frac{\partial F(1)}{\partial \Delta_1} \int \Phi(1,3) G_2(3, \theta_1; 2, \theta_2) d\{3\}.
\end{aligned}$$

Это уравнение необходимо решать с начальным условием

$$G_2(1, \theta_1; 2, \theta_2)|_{\theta_1=\theta_2} = G(1, 2, \theta_1).$$

Это означает, что его нельзя решить, не зная решения системы (8).

Следует отметить, что некоторые величины могут быть определены непосредственно из одновременной корреляционной функции, например, пиковая мощность или угловое распределение интенсивности излучения.

#### Случай несгруппированного пучка и однородного ондулятора

Как правило, длина электронного сгустка в коротковолновых ЛСЭ много больше, чем кооперационная длина. В этом случае можно использовать стационарное приближение несгруппированного пучка, которое позволяет исключить из исходной системы (8) все производные по времени:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1} v_1 F(1) = \\
&= -N \int \Phi(1,2) \frac{\partial}{\partial \Delta_1} G(1,2) d\{2\},
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{\partial}{\partial z_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial z_2} v_2 \right) G(1,2) = \\
&= -N \frac{\partial F(1)}{\partial \Delta_1} \int \Phi(1,3) G(2,3) d\{3\} - \\
&- N \frac{\partial F(2)}{\partial \Delta_2} \int \Phi(2,3) G(1,3) d\{3\} - \\
&- \left( \Phi(1,2) \frac{\partial}{\partial \Delta_1} + \Phi(2,1) \frac{\partial}{\partial \Delta_2} \right) F(1)F(2).
\end{aligned} \tag{10}$$

В данном случае обычно используют другую нормировку одночастичной функции распределения:

$$\begin{aligned}
\langle F(1) \rangle &= \\
&= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \iint F(z, \Delta, X) d\Delta dX dz = 1.
\end{aligned}$$

При этой нормировке величина  $N$  в уравнениях (9)–(10) равна числу частиц на единице длины  $N = I/(ek_0)$ , где  $I$  – это средний ток пучка.

Двухвременная корреляционная функция в стационарном случае зависит только от разности времен

$$G_2(1, \theta_1; 2, \theta_2) = G_2(1, 2, \theta_1 - \theta_2).$$

Мы также ограничим наше рассмотрение теории корреляционной функции на случай ондулятора, однородного в продольном направлении, и согласованных начальных бета-функций. При этом продольная скорость  $v_z(z, \Delta, X)$  не зависит явно от  $z$ . Другими словами, мы пренебрежем модуляцией продольной скорости, возникающей из-за бета-тронных колебаний.

### Линейная теория

На линейной стадии можно пренебречь изменением функции распределения  $F$ , которое описывается уравнением (9), и выполнить преобразование Лапласа от (10) по  $z_1$  и  $z_2$ . В результате получится следующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} & \nu(\Delta_1, X_1) s_1 G(1, 2) + \nu(\Delta_2, X_2) s_2 G(1, 2) + \\ & \frac{\partial F(1)}{\partial \Delta_1} \int M(1, 3) G(2, 3) d3 + \\ & + \frac{\partial F(2)}{\partial \Delta_2} \int M(2, 3) G(1, 3) d3 = \\ & = -\Phi(1, 2) F(2) \frac{\partial F(1)}{\partial \Delta_1} - \\ & -\Phi(2, 1) F(1) \frac{\partial F(2)}{\partial \Delta_2}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $(i) = (s_i, \Delta_i, X_i)$  и

$$\begin{aligned} & \int M(1, 3) G(2, 3) d3 = \frac{N}{2\pi i} \times \\ & \times \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi(s_1, X_1, -s_3, X_3) \times \\ & \times \int G(s_2, \Delta_2, X_2, s_3, \Delta_3, X_3) d\Delta_3 ds_3 dX_3. \end{aligned}$$

### Решение для частных случаев

#### Приближение холодного пучка

В простейшем случае холодного пучка функция распределения в уравнении (11) имеет следующий вид:

$$F(\Delta, X) = \tilde{F}(X) \delta(\Delta).$$

С помощью следующего выражения можно ввести моменты корреляционной функции:

$$\begin{aligned} & g_{mn}(s_1, \mathbf{r}_1, s_2, \mathbf{r}_2) = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int \Delta_1^m \Delta_2^n G(1, 2) d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_2 d\Delta_1 d\Delta_2. \end{aligned}$$

Далее из уравнения (11) можно получить замкнутую систему уравнений для  $g_{00}$  и  $g_{10}$ . Для широкого пучка  $g_{mn}$  зависит только от разности  $r_2 - r_1$ . Выполнив преобразование Фурье по этой переменной, мы получим явное решение для  $g_{00}$

$$g_{00}(s_1, s_2, k_{\perp}) = \frac{\chi}{N(s_1 + s_2)} \times \left\{ \frac{1 + 2N\chi \frac{s_1 \Phi(s_1, k_{\perp}) + s_2 \Phi(s_2, k_{\perp})}{(s_1 + s_2)^2}}{D(s_1, s_2, k_{\perp})} - 1 \right\},$$

где

$$\begin{aligned} & D(s_1, s_2, k_{\perp}) = \\ & = \left[ 1 + 2N\chi \frac{s_1 \Phi(s_1, k_{\perp}) + s_2 \Phi(s_2, k_{\perp})}{(s_1 + s_2)^2} \right]^2 - \\ & - 16(N\chi)^2 \frac{s_1 s_2 \Phi(s_1, k_{\perp}) \Phi(s_2, k_{\perp})}{(s_1 + s_2)^4}, \end{aligned}$$

$\Phi(s, k_{\perp})$  – преобразование Лапласа и Фурье от  $\Phi(1, 2)$  по  $z_1 - z_2$  и  $r_2 - r_1$ , а  $N\chi$  – плотность частиц.

Спектр флуктуаций в данной точке  $z$  можно определить как

$$g(z, k_z, k_{\perp}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g_{00} \left( \frac{s}{2} + ik_z, \frac{s}{2} - ik_z, k_{\perp} \right) e^{sz} ds, \quad (12)$$

где  $s = s_1 + s_2$ , а  $ik_z = (s_1 - s_2)/2$ . Чтобы вычислить интеграл (12), необходимо решить дисперсионное уравнение

$$D(s_1, s_2, k_{\perp}) = 0.$$

Можно показать, что данное уравнение эквивалентно системе двух уравнений;

$$1 + 2N\chi \frac{s_{1,2} \Phi(s_{1,2}, k_{\perp})}{(s_{1,2} \mp i\omega)^2} = 0.$$

Каждое из них является дисперсионным уравнением для линеаризованного одночастичного уравнения Власова и относится к возмущению с частотой  $\omega$ . Если исключить  $\omega$ , то получится исходное дисперсионное уравнение  $D = 0$ . Принимая во внимание явный вид  $\Phi(s, k_{\perp})$ , получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \left[ s_{1,2}^2 + (1 - \alpha^2) \right] \times \\ & \times (s_{1,2} \mp i\omega)^2 - 16\rho^3 s_{1,2}^2 = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\rho \ll 1$  – параметр Пирса, а  $\alpha^2 = \frac{k_{\perp}^2}{2k_0 k_w}$ .

Уравнение (13) может быть решено методом последовательных приближений. Решение

с максимальным значением  $\text{Re}(s)$  имеет следующий вид:

$$s = s_1 + s_2 \approx 2\sqrt{3}\rho \left( 1 - \frac{1}{36} \left[ \tilde{\nu} + \frac{\alpha^2}{\rho} \right]^2 \right), \quad (14)$$

где  $\nu = \rho\tilde{\nu} = k_z - 1$ . Из (14) видно, что длина нарастания  $L_G = \frac{1}{2\sqrt{3}\rho k_w}$  и характерная полоса усиления на одной длине нарастания  $\sigma_\nu = 3\sqrt{2}\rho$ , полученные в данной теории, совпадают с их значениями, полученными в общепринятой одномерной теории однопроходных ЛСЭ [6].

Нарастание поперечной когерентности описывается функцией, которая получается после обратного преобразования Фурье от  $g(z, k_z, k_\perp)$ :

$$g(\tilde{z}, \tilde{\nu}, \tilde{r}) \sim e^{\tilde{z}} \int e^{-\frac{\tilde{z}}{36} \left( \tilde{\nu} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} k_\perp^2 \right)^2} J_0(k_\perp \tilde{r}) k_\perp dk_\perp. \quad (15)$$

Здесь  $\tilde{z}$  нормирована на  $L_G$ , а  $\tilde{r}$  – на  $\sqrt{L_G \lambda_0}$ ;  $J_0(x)$  – функция Бесселя. Рисунок 2 иллюстрирует поведение (15), как функции  $\tilde{z}$  и  $\tilde{r}$  для  $\tilde{\nu} = 0$ .

*Численное решение  
для одномерного случая  
и сравнение с квазилинейной теорией*

К сожалению, (9)–(10) не имеют аналитического решения на стадии насыщения, но можно относительно просто получить численное решение этих уравнений для одномерного случая. Хотя, возможно, это и не очень интересно с практической точки зрения, результаты численного моделирования можно использовать для проверки результатов, полученных в программах, моделирующих отдельные выстрелы. В этом разделе представлено сравнение результатов, полученных в рамках подхода, основанного на корреляционной функции, с результатами, полученными при помощи программ, использующих квазилинейные уравнения [7].

В квазилинейном подходе решается система уравнений для сглаженной плотности распределения в одночастичном фазовом пространстве с общепринятыми координатами  $(\tau, \Delta)$  и  $z$  в качестве независимой пере-

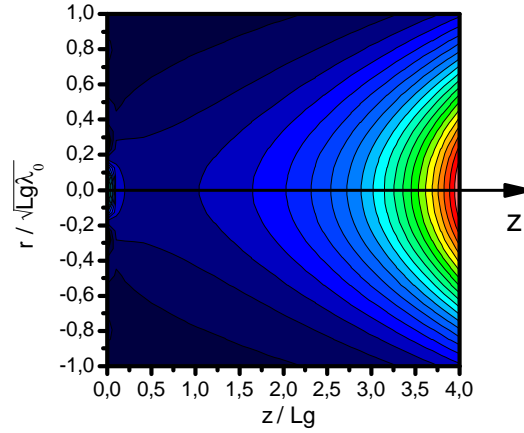


Рис. 2. Нарастание поперечной когерентности в случае широкого пучка

менной. Мы предполагаем, что данное распределение является периодической функцией  $\tau$

$$f(\tau, \Delta, z) = F_0(\Delta) + \sum_\nu f_\nu(\Delta, z) e^{i(1+\nu)\tau}, \quad (16)$$

где  $\nu = H_\nu n$ , а  $T = 2\pi/H_\nu$  – период по  $\tau$ , который необходимо выбрать большим, чем несколько десятков кооперационных длин. В квазилинейном приближении имеется следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial z} &= 2 \text{Re} \left( \sum_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial \Delta} \bar{A}_\nu \right), \\ \frac{\partial f_\nu}{\partial z} + i(2\Delta - \nu) f_\nu &= A_\nu \frac{\partial F_0}{\partial \Delta}, \\ \frac{dA_\nu}{dz} &= 4\rho^3 \int f_\nu(\Delta, z) d\Delta. \end{aligned}$$

Во втором уравнении мы пренебрегли слагаемыми, пропорциональными произведению амплитуды поля излучения  $A_\nu$  и компонент функции распределения, осциллирующих с удвоенной частотой. Это упрощение в нашем определении и называется квазилинейным приближением. Оно имеет простой физический смысл. Существует два механизма, из-за которых прекращается экспоненциальный рост сигнала в ЛСЭ. Один из них соответствует полной группировке пучка. Он работает в случае малого разброса продольных скоростей, например, в лампах бегущей волны. В случае коротковолновых ЛСЭ разброс продольных скоростей достаточно большой, поэтому

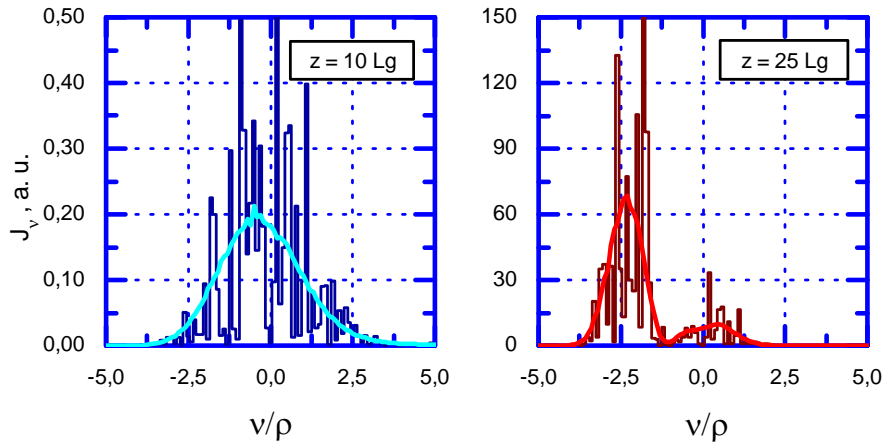


Рис. 3. Спектральные распределения тока пучка, полученные в квазилинейном моделировании. Ступенчатые функции – один проход, гладкая кривая – результат усреднения по 1 000 проходам

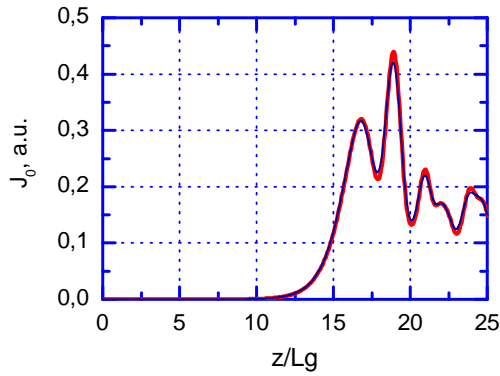


Рис. 4. Зависимость «мощности» флуктуаций тока от продольной координаты в ондуляторе. Толстая красная кривая – подход на основе корреляционной функции, тонкая синяя кривая – квазилинейный подход,  $L_g$  – длина нарастания на линейной стадии

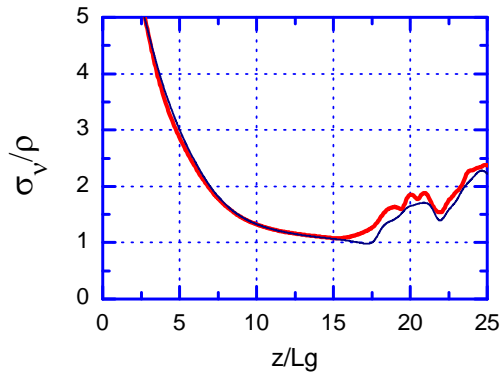


Рис. 5. Зависимость среднеквадратичной ширины спектра от продольной координаты в ондуляторе. Толстая красная кривая – подход на основе корреляционной функции, тонкая синяя кривая – квазилинейный подход

увеличение длины нарастания из-за роста энергетического разброса наступает раньше, чем могут возникнуть высшие гармоники в модуляции плотности. Этот механизм и описывается квазилинейными уравнениями. Для описания работы ЛСЭ в режиме усилителя спонтанного излучения данные уравнения необходимо решать с начальными условиями, соответствующими дробовому шуму. Начальная функция распределения в этом случае может быть получена следующим образом. Вначале запишем микроскопическую плотность распределения:

$$f_0(\tau, \Delta) = \frac{T}{N_T} \sum_{i=1}^{N_T} \delta(\tau - \tau_i) \delta(\Delta - \Delta_i), \quad (17)$$

где  $N_T$  – число частиц на один период. Выполнив преобразование Фурье от (17), получим следующее выражение для  $f_{0v}(\Delta)$ :

$$f_{0v}(\Delta) = \frac{1}{T} \int_0^T f_0(\tau, \Delta) e^{-i(1+v)\tau} d\tau = \frac{1}{N_T} \sum_{k=1}^{N_T} \delta(\Delta - \Delta_k) e^{-i\phi_k},$$

где  $\phi_k = (1+v)\tau_k$  – случайные фазы с равномерным распределением. Для численного моделирования дельта-функции необходимо заменить ступенчатыми функциями

$$f_{0v}(\Delta) = \frac{1}{N_T} \frac{1}{H_\Delta} \sum_m \Pi(\Delta - \Delta_m) \sum_{k=1}^{N_{\Delta m}} e^{-i\phi_k},$$



где

$$\Pi(\Delta) = 1, \text{ если } \Delta \in (-0.5H_\Delta, 0.5H_\Delta),$$

$\Pi(\Delta) = 0$  в других случаях,

$N_{\Delta_m} \approx N_T F_0(\Delta_m) H_\Delta$  – число частиц в  $m$ -м интервале энергий.

Принимая во внимание, что для суммы большого числа случайных фазоров

$$\sum_{k=1}^N e^{i\phi_k} = X + iY$$

имеется распределение

$$F(X, Y) dXdY \approx \frac{1}{N\pi} e^{-\frac{1}{N}(X^2+Y^2)} dXdY = \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{1}{N} e^{-\frac{R^2}{N}} dR^2,$$

получим окончательное выражение для  $f_{0\nu}(\Delta_m)$ :

$$f_{0\nu}(\Delta_m) = \frac{1}{\sqrt{N_\lambda}} \sqrt{\frac{H_\nu}{H_\Delta}} \sqrt{F_0(\Delta_m)} \sqrt{-\ln(I_1)} e^{2\pi i I_2},$$

где  $H_\nu$  – шаг по  $\nu$ ,  $I_{1,2}$  – случайные числа с равномерным распределением в интервале  $(0,1)$ .

Чтобы сравнить два подхода, необходимо установить между ними соответствие. Принимая во внимание (6) и (16), можно получить следующее соотношение:

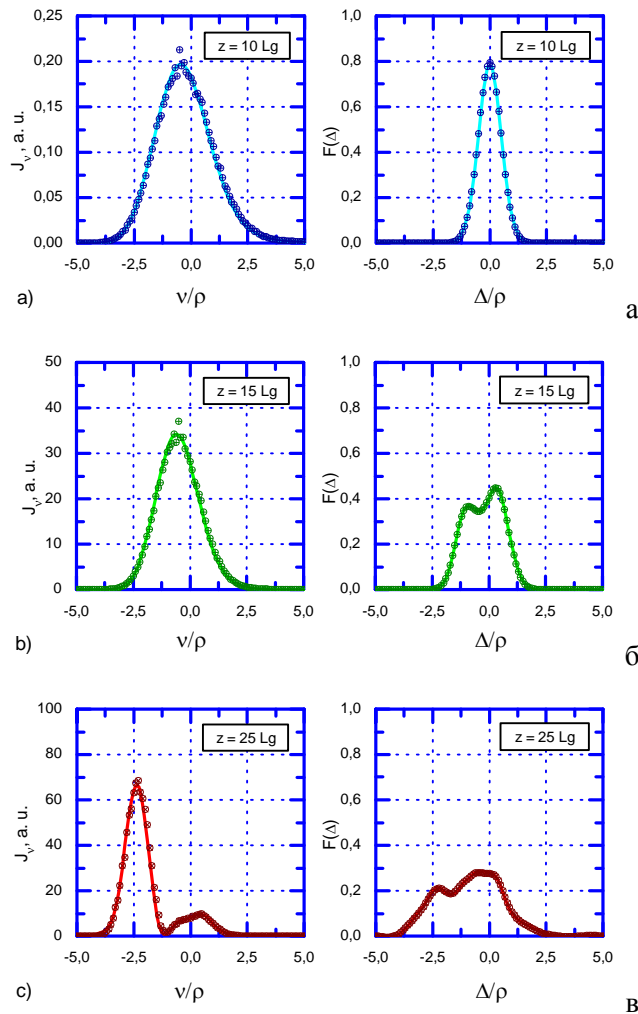


Рис. 6. Спектр и распределение по энергиям для различных продольных положений пучка в ондуляторе. Непрерывная кривая – результат вычислений с использованием корреляционной функции, отдельные точки – квазилинейное моделирование

$$G_2(z_1, \Delta_1, z_2, \Delta_2, \theta_1 - \theta_2) \approx \sum_{\nu} \langle f_{\nu}(z_1, \Delta_1) f_{\nu}^*(z_2, \Delta_2) \rangle e^{i(1+\nu)[(z_1-z_2) - (\theta_1-\theta_2)]},$$

где угловые скобки обозначают усреднение по начальным условиям. Из этого соотношения можно определить две величины, которые можно вычислить и сравнить в обоих случаях:

$$J_0(z) = \int G(z, \Delta_1, z, \Delta_2) d\Delta_1 d\Delta_2 \approx \int \sum_{\nu} \langle f_{\nu}(z, \Delta_1) f_{\nu}^*(z, \Delta_2) \rangle d\Delta_1 d\Delta_2,$$

$$J_{\nu}(z) = \int G_2(z, \Delta_1, z, \Delta_2, \tau) e^{i(1+\nu)\tau} d\Delta_1 d\Delta_2 d\tau \approx T \langle f_{\nu}(z, \Delta_1) f_{\nu}^*(z, \Delta_2) \rangle.$$

Выполним сравнение для следующего набора параметров: параметр Пирса  $\rho = 5 \cdot 10^{-4}$ , энергетический разброс  $\sigma_{\Delta} = 0,5\rho$ , число частиц, приходящихся на одну длину волны излучения  $N_{\lambda_0} = 10^4$ . Описание численного алгоритма может быть найдено в [8]. Усреднение в квазилинейных вычислениях выполнялось по 1 000 различных начальных условий. Спектральное распределение, которое получается для одного начального условия, показано на рис. 3. Результаты сравнения двух подходов представлены на рис. 4–6.

### Заключение

В работе представлен обзор нового подхода к теории однопроходных ЛСЭ, а также описаны новые аналитические и численные результаты. В частности, сравнение с квазилинейной теорией показало хорошее согласие результатов, полученных в рамках этих двух подходов. Подход, основанный на использовании корреляционной функции, является полезным как для качественного понимания процесса возникновения генерации

из шумов, так и для получения надежных численных результатов. К настоящему моменту получено решение только для упрощенной модели, но в принципе этот подход можно использовать и для моделирования реальных ЛСЭ.

### Список литературы

1. *Dejus R. J., Shevchenko O. A., Vinokurov N. A.* An Integral Equation Based Computer Code for High-Gain Free-Electron Lasers // Nucl. Inst. and Meth. A 429. 1999. P. 225.
2. *Reiche S.* GENESIS 1.3: A Fully 3D Time-Dependent FEL Simulation Code // Nucl. Inst. and Meth. A 429. 1999. P. 243.
3. *Fawley W. M.* Algorithm for Loading Shot Noise Microbunching in Multidimensional, Free-Electron Laser Simulation Codes // PRST-AB 5. 2002. P. 070701.
4. *Saldin E. L. et al.* Influence of Nonlinear Effects on Statistical Properties of the Radiation from SASE FEL // Nucl. Instr. and Meth. A 407. 1998. P. 285.
5. *Shevchenko O. A., Vinokurov N. A.* Correlation function Equation for the SASE FEL // Nucl. Instr. and Meth. A507. 2003. P. 84–88.
6. *Kim K.-J.* Three-Dimensional Analysis of Coherent Amplification and Self-Amplified Spontaneous Emission in Free-Electron Lasers // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 57. P. 1871.
7. *Vinokurov N. A., Huang Z., Shevchenko O. A., Kim K.-J.* Quasilinear Theory of High-Gain FEL Saturation // Nucl. Instr. and Meth. A 475. 2001. P. 74.
8. *Shevchenko O. A., Vinokurov N. A.* Numerical Solution of the FEL Correlation Function Equation // Nucl. Instr. and Meth. A 603. 2009. P. 46.

Материал поступил в редколлегию 21.10.2013

O. A. Shevchenko, N. A. Vinokurov

### STATISTICAL THEORY OF THE SASE FEL BASED ON THE TWO-PARTICLE CORRELATION FUNCTION EQUATION

The startup from noise problem in SASE FELs is usually treated in linear approximation. In this case amplification of initial density fluctuations may be calculated, and averaging over initial conditions may be fulfilled explicitly. In general nonlinear case the direct averaging is not applicable. During last years we developed the approach based on the BBGKY hierarchy for the n-particle distribution functions. The interaction of particles in FEL is retarded. Nevertheless, using special time-coordinate transformation, it is possible to eliminate the interaction lag and then to write down the BBGKY equations. Similar to plasma physics, the equations may be truncated after the second one (for the two-particle correlation function). Using this approach we consider several particular cases which illustrate some peculiar features of the SASE FEL operation.

*Keywords:* free electron laser, shot noise, distribution function.