УДК 621.373.826; 537.531.2

О. А. Шевченко, Н. А. Винокуров

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 11, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: O.A.Shevchenko@inp.nsk.su

РАСЧЕТ ДВУХВРЕМЕННОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ НА ЛИНЕЙНОЙ СТАДИИ УСИЛЕНИЯ В ОДНОПРОХОДНОМ ЛАЗЕРЕ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ

Недавно был предложен новый подход к теории лазеров на свободных электронах (ЛСЭ), работающих в режиме сверхлюминесценции. Этот подход основан на цепочке уравнений Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГКИ), адаптированной для случая ЛСЭ. Данный подход фактически является единственным логически обоснованным способом описания явления возникновения генерации из дробового шума в ЛСЭ. Для вычисления усредненного спектра излучения необходимо знать двухвременную корреляционную функцию. В данной статье получено решение уравнения для двухвременной корреляционной функции на линейной стадии работы ЛСЭ.

Ключевые слова: лазеры на свободных электронах, дробовой шум, корреляционная функция.

Введение

Хорошо известно, что принцип работы лазеров на свободных электронах (ЛСЭ) в режиме сверхлюминесценции основан на усилении начальных флуктуаций плотности тока, которые присутствуют в электронном пучке из-за дискретности частиц. Поэтому излучение в таком ЛСЭ является случайным процессом. Его параметры имеют стохастическую природу, и их невозможно определить для одного светового сгустка. Но параметры, усредненные по многим сгусткам, подчиняются некоторым детерминированным статистическим законам, и могут быть вычислены методами статистической механики. Следует отметить, что такое усреднение может автоматически происходить в эксперименте, когда накапливаются данные, полученные за много выстрелов.

Регулярный способ усреднения, который применительно к ЛСЭ был недавно предложен в работах [1–3], основан на цепочке уравнений Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГКИ). Этот способ позволяет вычислять корреляционную функцию тока пучка в зависимости от выбранной специальным образом переменной времени. Для того, чтобы определить многие важные характеристики излучения такие, как усредненная спектральная плотность, необходимо знать двухвременную корреляционную функцию. Уравнение на двухвременную корреляционную функцию, как и цепочка уравнений ББГКИ, может быть получено путем усреднения уравнения непрерывности для микроскопической плотности распределения [4].

В этой статье получено явное решение уравнения для двухвременной корреляционной функции в одномерном случае на линейной стадии процесса усиления в ЛСЭ.

Поле излучения единичного электронного сгустка

Рассмотрим вначале поле излучения одного электронного сгустка. Векторный потенциал этого поля в параксиальном приближении может быть найден из следующего выражения:

$$\vec{A}(\vec{r},z,\xi)= =\int_0^z\int\frac{\vec{j}_\xi\left(\vec{r}',z',\xi-\frac{1}{2}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')^2}{(z-z')}\right)}{z-z'}dx'dy'dz', \quad (1)$$

где $\xi=t-z$ – новая независимая переменная, играющая роль времени [1], а $\vec{j}_\xi(\vec{r},z,\xi)$ – плотность тока пучка, представленная в виде функции от ξ.

$$\vec{j}_\xi(\vec{r},z,\xi)=\vec{j}(\vec{r},z,z+\xi). \quad (2)$$

Здесь и далее мы предполагаем, что скорость света $c=1$.

Плотность тока для одного сгустка (2) может быть выражена через микроскопическое распределение плотности частиц (функцию Климонтовича) в одночастичном фазовом пространстве (z,Δ) [4]:

$$\mathrm{N}(z,\Delta,X;\theta)= =\sum_k\delta\left(z-z^{(k)}(\theta)\right)\delta\left(\Delta-\Delta^{(k)}(\theta)\right)\times \times\delta\left(X-X^{(k)}\right), \quad (3)$$

где $\theta=2\gamma_{//}^2\xi$ – нормированная переменная времени, $\Delta=\delta\gamma/\gamma_0$ – относительное отклонение от равновесной энергии, а $X=\left(\vec{r}_0,\dot{\vec{r}}_0\right)$ – четырехмерный вектор начальных поперечных координат и углов. Мы предполагаем, что продольное движение не оказывает влияния на поперечное, и что частицы движутся по заданным траекториям. Выражение (3) можно рассматривать как набор распределений, пронумерованных непрерывным индексом *X*. Другими словами, для каждой поперечной траектории $\vec{r}=\vec{r}(X,z)$ имеется свое собственное распределение частиц в продольном фазовом пространстве. Существует также обратное отображение

$$X=X\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},z\right)$$

с Якобианом

$$\frac{\partial\left(\vec{r}_0,\dot{\vec{r}}_0\right)}{\partial\left(\vec{r},\dot{\vec{r}}\right)}=1.$$

Для электронного пучка, движущегося в ондуляторе, поперечная плотность тока может быть записана следующим образом:

$$j_\perp(\vec{r},z,\theta)\approx \approx\int\frac{V_\perp}{1-V_z}\mathrm{N}\left(z,\Delta,X\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},z\right);\theta\right)d\Delta d\dot{\vec{r}}, \quad (4)$$

где $V_\perp=K\gamma^{-1}\sin(k_wz)$ поперечная скорость быстрых колебаний (*K* – параметр ондуляторности, k_w – волновое число ондулятора), а $(1-V_z)^{-1}\approx 2\gamma_\parallel^2$ ($\gamma_\parallel$ – релятивистский фактор для продольной скорости электронов). Продольное расстояние между двумя частицами для заданного момента θ в $(1-V_z)^{-1}$ раз больше, чем расстояние для заданного момента *t*. Поэтому данный фактор появился в уравнении (4).

Подставляя (4) в (1), можно получить явное выражение поля излучения одного сгустка через микроскопическую плотность распределения (3).

Параметры излучения,
усредненные по многим выстрелам

Большинство важных параметров таких, как мощность и усредненная спектральная плотность, могут быть найдены из корреляционной функции для поля излучения:

$$\left\langle A(\vec{r}_1,z_1,t_1)A(\vec{r}_2,z_2,t_2)\right\rangle= =\left\langle A(\vec{r}_1,z_1,\xi_1)A(\vec{r}_2,z_2,\xi_2)\right\rangle. \quad (5)$$

В случае несгруппированного пучка выражение (5) зависит только от разности моментов времени t_2-t_1 или эквивалентно от $\xi_2-\xi_1$:

$$\left\langle A(\vec{r}_1,z_1,\xi_1)A(\vec{r}_2,z_2,\xi_2)\right\rangle= =C(\vec{r}_1,z_1,\vec{r}_2,z_2,\xi_2-\xi_1). \quad (6)$$

В этом случае спектральная плотность излучения в некоторой заданной точке наблюдения $(\vec{r},z)$ может быть вычислена через преобразование Фурье от корреляционной функции (6) по разности времен.

После подстановки явного выражения для поля излучения (1) с плотностью тока (4) в (6) становится очевидным, что для вычисления корреляционной функции полей необходимо найти усредненное произведение микроскопических распределений плотности (3) $\left\langle\mathrm{N}(1,\theta_1)\mathrm{N}(2,\theta_2)\right\rangle$, в котором сомножители берутся в разные моменты времени.

Это произведение можно выразить через сумму одночастичной двухвременной и двухчастичной двухвременной функций распределения [4]:

$$\left\langle \mathrm{N}\left(1,\theta_1\right)\mathrm{N}\left(2,\theta_2\right)\right\rangle = NF_2\left(1,\theta_1;2,\theta_2\right)+ +N\left(N-1\right)f_2^{(2)}\left(1,\theta_1;2,\theta_2\right), \qquad (7)$$

где N – полное число электронов (или для несгруппированного пучка – число электронов на единицу длины).

Обе эти функции удовлетворяют похожим уравнениям, но для них используются разные начальные условия

$$F_2\left(1,\theta_1;2,\theta_2\right)\Big|_{\theta_1=\theta_2} = F\left(1,\theta_1\right)\delta\left(1-2\right),$$
$$f_2^{(2)}\left(1,\theta_1;2,\theta_2\right)\Big|_{\theta_1=\theta_2} = f^{(2)}\left(1,2;\theta_1\right), \qquad (8)$$

где $F\left(1,\theta_1\right)$ – одночастичная одновременная, а $f^{(2)}\left(1,2;\theta_1\right)$ – двухчастичная одновременная функции распределения.

В свою очередь, двухчастичную двухвременную функцию распределения можно разбить на два слагаемых

$$f_2^{(2)}\left(1,\theta_1;2,\theta_2\right) = F\left(1,\theta_1\right)F\left(2,\theta_2\right)+ +G_2\left(1,\theta_1;2,\theta_2\right), \qquad (9)$$

где $G_2\left(1,\theta_1;2,\theta_2\right)$ – так называемая двухчастичная двухвременная корреляционная функция.

В случае несгруппированного пучка $F\left(1,\theta_1\right)$ не зависит от времени, а первое слагаемое в уравнении (9) не дает вклада в коррелятор (6). Основные параметры когерентного излучения ЛСЭ можно получить из второго слагаемого. Следует также отметить, что вклад одночастичной двухвременной функции распределения – первое слагаемое в уравнении (7) – соответствует спонтанному излучению.

Двухвременная корреляционная функция

Уравнение на корреляционную функцию

Двухвременная корреляционная функция удовлетворяет следующему уравнению [4]

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}+\frac{\partial}{\partial z_1}\nu_1\right)G_2\left(1,\theta_1;2,\theta_2\right) = = -N\frac{\partial F\left(1\right)}{\partial\Delta_1}\int\Phi\left(1,3\right)G_2\left(3,\theta_1;2,\theta_2\right)d\left\{3\right\}, \qquad (10)$$

где $\nu\left(z,\Delta,X\right)=\left[1+2\Delta-2\gamma_{//}^2\Delta\beta\left(z,X\right)\right]$ – продольная скорость, а $\Phi\left(1,2\right)$ – сила взаимодействия между двумя частицами [1]. В качестве единицы измерения длины здесь используется величина $\lambda_w/2\pi=1/k_w$.

Данное уравнение необходимо решать со следующим начальным условием

$$G_2\left(1,\theta_1;2,\theta_2\right)|_{\theta_1=\theta_2} = G\left(1,2,\theta_1\right), \qquad (11)$$

где $G\left(1,2,\theta_1\right)$ – одновременная корреляционная функция.

Для простоты мы ограничимся рассмотрением одномерного случая и несгруппированного пучка. Результаты данного рассмотрения применимы как для модели заряженных листов, так и для модели тонкого пучка. Отличаться будет лишь конкретный вид силы взаимодействия. При сделанных допущениях уравнение (10) может быть записано в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\left(1+2\Delta_1\right)\frac{\partial}{\partial z_1}\right)G_2\left(z_1,\Delta_1,z_2,\Delta_2;\tau\right)= = -N\frac{\partial}{\partial\Delta_1}F\left(z_1,\Delta_1\right)\times \times\int_0^{z_1}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(z_1-z_3\right)G_2\left(z_3,\Delta_3,z_2,\Delta_2;\tau\right)d\Delta_3 dz_3, \qquad (12)$$

где $\tau=\theta_1-\theta_2$.

Решение для линейного случая

Уравнение (12) может быть решено на линейной стадии, когда функция распределения $F\left(z,\Delta\right)$ не зависит от z. Используя преобразование Лапласа по переменным τ, z_1 и z_2 и принимая во внимание начальное условие (11), можно записать следующее уравнение:

$$\left(p+\left(1+2\Delta_1\right)s_1\right)G_2\left(s_1,\Delta_1,s_2,\Delta_2;p\right)- -G\left(s_1,\Delta_1,s_2,\Delta_2\right)=-N\Phi\left(s_1\right)\frac{\partial}{\partial\Delta_1}F\left(\Delta_1\right)\times \times\int G_2\left(s_1,\Delta_3,s_2,\Delta_2;p\right)d\Delta_3. \qquad (13)$$

Дальнейшее упрощение может быть получено путем введения моментов корреляционной функции

$$g_{n,m}\left(s_1,s_2\right)= =\int\Delta_1^n\Delta_2^m G\left(s_1,\Delta_1;s_2,\Delta_2\right)d\Delta_1 d\Delta_2,$$

$$G_2^{n,m}(s_1,s_2,p)= \\ =\int \Delta_1^n \Delta_2^m G_2(s_1,\Delta_1,s_2;p)\,d\Delta_1 d\Delta_2.$$

Эти моменты удовлетворяют цепочке уравнений, которая может быть получена путем интегрирования уравнения (13) по энергии. Для случая холодного пука, когда $F(\Delta)=\delta(\Delta)$, эта цепочка сводится к замкнутой системе двух уравнений

$$(p+s_1)G_2^{0,0}(s_1,s_2;p)+2s_1G_2^{1,0}(s_1,s_2;p)= \\ =g_{0,0}(s_1,s_2),$$

$$(p+s_1)G_2^{1,0}(s_1,s_2;p)=g_{1,0}(s_1,s_2)+ \\ +N\Phi(s_1)G_2^{0,0}(s_1,s_2;p).$$

Эта система легко решается. В результате получается следующее выражение

$$G_2^{0,0}(s_1,s_2;p)\left(1+\frac{2Ns_1\Phi(s_1)}{(p+s_1)^2}\right)= \\ =\frac{1}{(p+s_1)}g_{0,0}(s_1,s_2)-\frac{2s_1}{(p+s_1)^2}g_{1,0}(s_1,s_2), \tag{14}$$

где $g_{0,0}(s_1,s_2)$ и $g_{1,0}(s_1,s_2)$ могут быть найдены с использованием метода аналогичного тому, который уже применялся ранее в случае одновременной корреляционной функции [2]:

$$g_{0,0}(s_1,s_2)=\frac{1}{N(s_1+s_2)}\times \\ \times\left(\frac{1}{D}\left(1+2N\frac{s_1\Phi(s_1)+s_2\Phi(s_2)}{(s_1+s_2)^2}\right)-1\right),$$

$$g_{1,0}(s_1,s_2)=\frac{1}{D}\frac{\Phi(s_1)}{(s_1+s_2)^2}\times \\ \times\left(1+2N\frac{s_1\Phi(s_1)-s_2\Phi(s_2)}{(s_1+s_2)^2}\right),$$

где

$$D(s_1,s_2)=\left(1+2N\frac{s_1\Phi(s_1)+s_2\Phi(s_2)}{(s_1+s_2)^2}\right)^2- \\ -16\frac{N^2s_1s_2\Phi(s_1)\Phi(s_2)}{(s_1+s_2)^4}.$$

Введем обозначение для полюсов выражения (14)

$$p_{1,2}=-s_1\pm i\sqrt{2Ns_1\Phi(s_1)}=-s_1\pm i\mu(s_1)$$

и сделаем обратное преобразование Лапласа по p. В результате получим

$$G_2^{0,0}(s_1,s_2;\tau)= \\ =\frac{1}{2\pi i}\oint G_2^{0,0}(s_1,s_2;p)e^{p\tau}dp= \\ =e^{-s_1\tau}\left(\cos(\mu(s_1)\tau)g_{0,0}(s_1,s_2)-\right. \\ \left.-2s_1\frac{\sin(\mu(s_1)\tau)}{\mu(s_1)}g_{1,0}(s_1,s_2)\right). \tag{15}$$

Чтобы выполнить обратное преобразование Лапласа по переменным s_1 и s_2, необходимо определить полюса уравнение (15), которые могут быть найдены из дисперсионного уравнения

$$D(s_1,s_2)=0$$

Можно показать, что это уравнение эквивалентно системе двух уравнений

$$1+\frac{2Ns_1\Phi(s_1)}{(-i\omega+s_1)^2}=0\wedge 1+\frac{2Ns_2\Phi(s_2)}{(i\omega+s_2)^2}=0, \tag{16}$$

где ω – произвольное комплексное число.

Удобно ввести следующие переменные $s=s_1+s_2$ и $ik_z=(s_1-s_2)/2$. Тогда из обратного преобразования Лапласа от выражения (15) по s можно определить зависимость $G_2^{0,0}$ от $z=(z_1+z_2)/2$, а из обратного преобразования Фурье по k_z находится зависимость от $x=z_1-z_2$.

Используя преобразование Лапласа от уравнения (15) и предполагая, что длина нарастания $L_g>>1$, можно определить асимптотическое поведение корреляционной функции для больших $z>>L_g$

$$G_2^{0,0}(z,k_z;\tau)\approx\frac{1}{4N}e^{\tilde{s}(k_z)z-i\omega(k_z)\tau}, \tag{17}$$

где $\tilde{s}(k_z)$ и $\omega(k_z)$ – решения уравнения (16). Можно легко показать, что

$$\omega(-k_z)=-\omega(k_z)$$

и

$$\tilde{s}(-k_z)=\tilde{s}(k_z)\ .$$

Чтобы из (17) получить окончательное выражение для корреляционной функции, необходимо вычислить следующий интеграл:

$$G_2^{0,0}(z,x;\tau)\approx$$

$$\approx \frac{1}{4N}\frac{1}{2\pi}\int e^{\tilde{s}(k_z)z - i\omega(k_z)\tau + ik_z x} dk_z.$$

Поскольку показатель экспоненты содержит большую величину z, для вычисления интеграла можно воспользоваться методом перевала. Для этого достаточно найти точки экстремума показателя экспоненты $\phi(k_z) = \tilde{s}(k_z)z - i\omega(k_z)\tau + ik_z x$, в которых $\phi'_{k_z}(k_0) = 0$. Используя данный метод, можно получить следующее выражение для корреляционной функции:

$$G_2^{0,0}(z,x;\tau) \approx$$
$$\approx \frac{1}{4N}\frac{e^{\phi(k_0)}}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{\phi''_{k_z}(k_0)}} + c.c. \quad (18)$$

Модель заряженных листов

В качестве примера рассмотрим одномерную модель заряженных листов, которая широко используется в теории ЛСЭ [6]. В рамках данной модели можно получить следующее выражение для силы взаимодействия между частицами

$$N\Phi(s) = -8\rho^3 \frac{s}{1+s^2},$$

где $\rho << 1$ – параметр Пирса.

Решение дисперсионных уравнений (16) для силы взаимодействия такого вида может быть получено методом последовательных приближений. Проще всего его записать в неявном виде:

$$\begin{aligned} &\omega(k_z) = 1+\delta, \\ &\tilde{s}(k_z) = 2\rho\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{18\rho}\delta^2, \\ &k_z = 1 + \frac{2}{3}\delta + \frac{1}{32\rho}\delta^2, \end{aligned} \quad (19)$$

где δ – некоторый малый параметр.

Для простоты найдем корреляционную функцию только для $x = 0$. Нахождение корреляционной функции в общем случае не вызывает каких-либо затруднений, но конечное выражение получается слишком громоздким.

Можно легко показать, что в точке экстремума $\delta_0 = -i\frac{9\rho}{\sqrt{3}}\frac{\tau}{z}$. Принимая это во внимание и подставляя (19) в (18), получаем следующее выражение:

$$G_2^{0,0}(z,0;\tau) \approx \frac{e^{\frac{z}{L_g}}}{2N}\frac{e^{-\frac{3}{4}\frac{\tau^2}{zL_g}}}{\sqrt{3\pi}}\sqrt{\frac{1}{zL_g}} \times$$
$$\times\left(\cos(\tau) - \frac{27}{32\sqrt{3}}\frac{\tau}{z}\sin(\tau)\right). \quad (20)$$

где $L_g = 1/2\sqrt{3}\rho$ – длина нарастания. Преобразование Фурье от (20) по τ пропорционально спектральной плотности тока в некоторой точке z внутри ондулятора

$$\left\langle j_\omega^2(z)\right\rangle \sim \frac{e^{\frac{z}{L_g}}}{18N}\left(e^{-\frac{(\omega+1)^2}{2\sigma_\omega^2}} + e^{-\frac{(\omega-1)^2}{2\sigma_\omega^2}}\right),$$

где ширина спектра $\sigma_\omega = \sqrt{3/2zL_g}$ получается такой же, как и в общепринятой одномерной теории ЛСЭ [6].

Заключение

В данной статье мы показали, что для вычисления усредненного спектра излучения в однопроходном ЛСЭ необходимо знать двухвременную корреляционную функцию. Мы также получили явное выражение для этой функции в случае простейшей одномерной модели.

Список литературы

1. *Shevchenko O. A., Vinokurov N. A*. Statistical Theory of the SASE FEL Based on the Two-Particle Correlation Function Equation // Proc. of FEL. 2009. P. 8.

2. *Shevchenko O. A., Vinokurov N. A.* Correlation function Equation for the SASE FEL // Nucl. Instr. and Meth. A507. 2003. P. 84–88.

3. *Shevchenko O. A., Vinokurov N. A.* Numerical Solution of the FEL Correlation Function Equation // Nucl. Instr. and Meth. A 603. 2009. P. 46.

4. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая физика. М.: Наука, 1982.

5. *Ishimaru S.* Basic Principles of Plasma Physics. Benjamin; L., 1973.

6. *Kim K.-J.* Three-Dimensional Analysis of Coherent Amplification and Self-Amplified Spontaneous Emission in Free-Electron Lasers // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 57. P. 1871.

Материал поступил в редколлегию 21.10.2013

O. A. Shevchenko, N. A. Vinokurov

CALCULAITON OF THE SASE FEL TWO-TIME CORRELATION FUNCTION AT THE LINEAR STAGE OF AMPLIFICATION

The new approach for the SASE radiation properties calculation was proposed recently. It is based on the use of BBGKY chain of equations, adapted for FEL. In fact, it is the only known logically correct way to describe the SASE phenomenon. The two-time correlation function is necessary for calculation of averaged SASE spectrum. The solution of the correlation function equation for linear stage of SASE process is obtained.

Keywords: free electron laser, shot noise, correlation function.