

**В. П. Замураев, А. П. Калинина**

Новосибирский государственный университет  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

Институт теоретической и прикладной механики  
им. С. А. Христиановича СО РАН  
ул. Институтская, 4/1, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: zamuraev@itam.nsc.ru; kalinina@itam.nsc.ru

## **ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ИМПУЛЬСНОГО ИСТОЧНИКА ЭНЕРГИИ, НЕ ПРИВОДЯЩИХ К ЗАПИРАНИЮ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ**

Изучается импульсный подвод энергии в канале переменного сечения. Получены приближенные формулы для импульсного подвода энергии, по которым можно оценить расстояние распространения ударной волны от импульсного источника энергии вверх по потоку, а также полную мощность, период подвода энергии, соответствующие условиям запираания канала. Применимость полученных аналитических зависимостей подтверждается численными расчетами на основе уравнений Эйлера в квазиодномерном приближении.

*Ключевые слова:* сверхзвуковое течение, канал переменного сечения, импульсный источник энергии, уравнения Эйлера.

### **Введение**

Моделирование течения в канале переменного сечения с импульсным подводом имеет отношение к управлению структурой сверхзвукового течения с помощью энерговыделения [1]. Одной из нерешенных проблем является организация процесса энерговыделения в различных секциях канала, так как граница между параметрами, соответствующими направленному течению при максимальном нагреве газа, и параметрами, приводящими к запираанию течения, очень неустойчива. Ожидается, что одним из способов решения этой проблемы является дополнительное импульсное энерговыделение в сочетании с конечными временными промежутками непрерывного энерговыделения. Импульсный подвод энергии используется как способ ликвидации возможных неустойчивостей, неизбежных при попытке реализации непрерывного режима.

Задача технологической реализации процесса очень сложна. Целью данной работы является выделение некоторых базовых особенностей, касающихся импульсного энерговыделения. Здесь рассматривается случай источника энергии плоской формы с различной временной зависимостью. Однако оценочные соотношения, полученные для плоского источника, могут быть использованы для других режимов, как некоторые ориентиры.

### **Постановка задачи**

Критериальный анализ и численное моделирование проводятся для нестационарного течения в канале переменного сечения с подводом энергии. Решаются уравнения Эйлера в «каналовом» приближении для идеального газа с постоянным показателем адиабаты  $\gamma$ . «Каналовое» (квазиодномерное) приближение позволяет получить значения

интегральных характеристик течения, близкие к оптимальным, поскольку на выходе из канала течение равномерное. В этом приближении уравнения, описывающие течение газа, имеют вид [2]:

$$\begin{aligned} \partial U / \partial t + \partial F / \partial x &= Q, \\ U &= (\rho u, \rho u S, e S), F = (\rho u S, (p + \rho u^2) S, \\ &u(p + e) S), Q = (0, p d S / dx, q S). \end{aligned}$$

где  $S = S(x)$  – площадь поперечного сечения канала, зависящая от продольной координаты  $x$ . Здесь координата  $x$  отнесена к диаметру  $d$  сечения на входе в канал (площадь соответствующего сечения равна  $\pi d^2 / 4$ ); время  $t$  отнесено к  $d/a_0$ , скорость газа  $u$  и скорость звука  $a$  – к  $a_0$ , плотность  $\rho$  – к  $\rho_0$ ; давление  $p$  и полная энергия единицы объема газа  $e$  обезразмерены параметром  $\rho_0 a_0^2$ ; мощность  $q$ , подводимая к единице объема газа, отнесена к величине  $\rho_0 a_0^3 / d$ ;  $p_0, a_0$  – размерные давление и скорость звука на входе в канал;  $\rho_0$  определяется из условия  $p_0 = \rho_0 a_0^2$ . Полуширина канала задается уравнением:  $y = y(x)$ .

Система дифференциальных уравнений дополняется краевыми условиями на границах расчетной области: на входе в канал  $u = 1, p = 1, \rho = \gamma$ , на выходе ставятся “мягкие” условия. В качестве начальных данных используются поля параметров стационарного решения системы уравнений.

Для модели идеального газа с постоянным показателем адиабаты  $\gamma$  имеем

$$\begin{aligned} p &= (\gamma - 1) \cdot (e - 0,5 \cdot \rho u^2), \\ a^2 &= T = \gamma p / \rho. \end{aligned}$$

При импульсном периодическом подводе энергии величина  $q$  определяется выражением

$$q = \Delta e f(t),$$

где  $f(t) = \sum_i \delta(t - i \Delta t)$ ;  $\delta(t)$  – импульсная функция Дирака;  $\Delta t$  – период подвода энергии;  $\Delta e$  – энергия, подводимая к единице объема газа.

Для численного решения сформулированной задачи используется конечно-объемная схема, уменьшающая полную вариацию. В рассматриваемой модели течения импульсный подвод энергии осуществляется мгновенно, при этом изменения плотности газа и его скорости не происходит, увеличивается плотность энергии газа  $e$  в зоне ее подвода на величину  $\Delta e$  (соответственно

увеличиваются температура и давление газа). Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений проводится в промежутках между моментами подвода энергии.

Течение газа с энергоподводом рассматривается в канале переменного сечения. Канал присоединен к соплу, на выходе из которого практически равномерный поток. После сопла идет секция постоянного сечения, в конце которой располагается источник энергии; далее канал расширяется; затем снова следует секция постоянного сечения. Координата  $x$  отсчитывается от начала первой секции постоянного сечения. Число Маха на входе в нее примерно равно  $M = 2,2$ . Энергия подводится в узкой зоне, перпендикулярной оси канала. Использовалась модель источника с мгновенным объемным энерговыделением. В этой модели задавалась средняя за период подводимая мощность  $\Delta N$ , так что при энергоподводе увеличение плотности энергии  $\Delta e$  составляло  $\Delta e = \Delta N \Delta t / (S \Delta x)$ , где  $S$  и  $\Delta x$  – площадь и толщина зоны подвода энергии. Рассматривается случай источника энергии плоской формы, полностью перекрывающий сечение канала. Предполагается, что область распространения возмущения вверх по потоку представляет собой секцию постоянного сечения, где невозмущенный поток достаточно однороден.

### Оценка оптимальных параметров для плоского источника с мгновенным энерговыделением

Рассматривается плоский источник площадью  $S$  и толщиной  $\Delta x$  с мгновенно выделяющейся энергией  $\Delta E$ , причем  $\sqrt{S} \gg \Delta x$ .

Требуется оценить мощность источника и время, за которое ударная волна от источника плоской формы продвинется вверх по потоку, а затем будет снесена обратно к источнику. Это время будет характеризовать минимальный период, при котором, с одной стороны, некоторый участок потока за это время изменит свою температуру под воздействием ударной волны, а с другой стороны, не возникнет заклинивание канала. Оценка выполняется на основе теории подобия [3].

Обозначим через  $l$  координату фронта ударной волны в момент времени  $t$ , которая распространяется от источника энергии

вверх по потоку (соответствующая ось противоположно направлена оси  $x$ , введенная координата отсчитывается от центра зоны энергоподвода). Координату максимального удаления рассматриваемой ударной волны обозначим через  $l_0$ . Введем координату  $L$  фронта ударной волны в момент времени  $t$ , в системе отсчета, связанной с газом, ось которой также противоположна оси  $x$ , а начало координат в момент генерации импульса совпадает с центром зоны подвода энергии. Начало этой системы координат движется в системе отсчета, связанной с неподвижными стенками канала, со скоростью потока, которую можно выразить через число Маха и скорость звука невозмущенного потока:  $u = Ma$ . Тогда координата  $L_0$  соответствует максимальному смещению  $l_0$ . Время отсчитывается от момента генерации импульса  $t = 0$ .

Обозначим энергию, подводимую в одном импульсе к единице объема, через  $W$ :

$$W = \Delta E / (\Delta x \cdot S)$$

Тогда порождаемая ударная волна в первый момент времени будет иметь скорость  $D_0$ , приближенно определяемую из условия

$$W / 2 = \rho D_0^2 / 2.$$

В системе отсчета газа скорость ударной волны в момент достижения ею координаты  $x$  можно определить из соотношения [3]:

$$D = \sqrt{\frac{W}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{\Delta x}{2L}}. \quad (1)$$

Обозначим через  $t_0$  время, за которое ударная волна проходит расстояние  $L_0$  в системе отсчета газа. Введем число Маха ударной волны

$$M_D = \frac{D}{a},$$

где  $\rho$  и  $a$  – невозмущенные плотность и скорость звука в первой секции постоянного сечения.

Чтобы ударная волна остановилась в системе отсчета, связанной с каналом, необходимо, чтобы ее скорость в секции постоянного сечения относительно газа была равна скорости набегающего потока, то есть

$$M_D = M$$

или

$$M \cdot a = \sqrt{\frac{W}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{\Delta x}{2L_0}}, \quad (2a)$$

откуда определяется  $L_0$

$$L_0 = \frac{W}{\rho} \cdot \frac{\Delta x}{2M^2 a^2} = \frac{\beta^2 \Delta x}{2M^2}, \quad (2б)$$

где  $\beta = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{W}{\rho}}$ ; при этом предполагается,

что  $l$  не больше длины участка постоянного сечения.

Для времени  $t_0$  перемещения ударной волны на расстояние  $L_0$  с учетом (1) справедливо следующее интегральное выражение:

$$t_0 = \int_{\Delta x/2}^{L_0} \frac{dL}{D} = \sqrt{\frac{2\rho}{W}} \cdot \frac{2}{3\sqrt{\Delta x}} (L_0^{3/2} - (\Delta x/2)^{3/2}) \approx \sqrt{\frac{2\rho}{W}} \cdot \frac{2}{3\sqrt{\Delta x}} L_0^{3/2} = \frac{1}{\beta \cdot a} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\Delta x}} L_0^{3/2}. \quad (3)$$

Из соотношений (2б) и (3) можно определить время  $t_0$ :

$$t_0 \approx \frac{1}{\beta \cdot a} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\Delta x}} L_0^{3/2} = \frac{\beta^2 \Delta x}{3aM^3}. \quad (4)$$

Как было сказано выше, в системе отсчета канала ударная волна продвинется вверх по потоку на расстояние  $l_0$ , связанное с  $L_0$  приближенным соотношением

$$l_0 = L_0 - M \cdot a \cdot t_0. \quad (5)$$

Тогда из выражений (2б) и (4) получаем значение  $l$ :

$$l_0 = \frac{\beta^2 \Delta x}{6M^2}.$$

Из последнего соотношения найдем параметр  $\beta$ :

$$\beta^2 = \frac{W}{\rho a^2} = \frac{6M^2 l_0}{\Delta x}. \quad (6)$$

После момента, когда достигнуто равенство  $M_D = M$ , ударная волна в системе отсчета газа продолжает ослабляться, превращаясь в звуковую волну. Обозначим этот момент времени через  $t_1$ , а соответствующую ему координату через  $L_1$ . Координата  $L_1$  и время  $t_1$ , для которых скорость ударной волны близка к скорости звука в невозмущенном потоке, вычисляем по формулам (2а, б), (4), но вместо  $M$  будет использовано  $M_D = 1$ , а вместо  $L_0 - L_1$ .

$$L_1 = \frac{\beta^2 \Delta x}{2}, \quad t_1 \approx \frac{\beta^2 \Delta x}{3a}. \quad (7)$$

Расстояние  $l_1$  оценим по формулам (5), (7):

$$l_1 = L_1 - M \cdot a \cdot t_1 = \beta^2 \Delta x \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} M \right).$$

Заметим, что для чисел Маха, больших 1,5, расстояние  $l_1$  отрицательное, т. е. ослабленная ударная волна оказывается, в конце концов, ниже по потоку от зоны подвода энергии.

Промежуток времени  $t_2$ , в течение которого ударная волна уйдет вверх по потоку и вернется обратно к зоне подвода энергии, определяется из уравнений:

$$\begin{aligned} l_2 &= L_2 - M \cdot a \cdot t_2 = 0, \\ L_2 &= \frac{\beta^2 \Delta x}{2M_2^2}, \\ t_2 &\approx \frac{\beta^2 \Delta x}{3aM_2^3}. \end{aligned}$$

Отсюда находим число Маха ударной волны  $M_2$  в момент  $t_2$  и время  $t_2$ :

$$M_2 = \frac{2}{3} M, \quad t_2 \approx \frac{27l_0}{4M \cdot a}. \quad (8)$$

На основе соотношений (6) и (8) определяется средняя мощность в зоне подвода энергии:

$$Q = \frac{W}{t_2} = \frac{8\rho a^3 M^3}{9\Delta x}.$$

Тогда для канала сечением  $S = 1 \cdot 1 = 1$  полная подводимая мощность равна

$$\Delta N = Q \cdot \Delta x \cdot S = \frac{8\rho a^3 M^3}{9} = \frac{16}{9} N_{\text{потока}}, \quad (9)$$

где  $N_{\text{потока}} = \frac{\rho a^3 M^3}{2}$ .

Полученные значения для  $t_2$  (8) и  $\Delta N$  (9) можно рассматривать в качестве периода и подводимой средней мощности, при которых не происходит запыриание канала.

Найдем, за какую часть периода ударная волна возвращается к зоне подвода энергии.

$$\frac{t_2 - t_0}{t_2} = \frac{5}{9}. \quad (10)$$

В соответствии с оценкой она возвращается медленнее, чем уходит от места подвода энергии.

При импульсно-периодическом подводе энергии периодическое решение установится с большей вероятностью, если ударная волна, возвращаясь, пересечет зону энергоподвода. Тогда каждый раз энергия  $\Delta E$  будет передаваться свежей порции газа. С учетом этого период подвода энергии должен быть увеличен на промежуток времени  $\Delta t_2$ , связанный с прохождением ударной волны дополнительного расстояния  $\Delta x/2$ . Оценка  $\Delta t_2$  дает:

$$\Delta t_2 = \frac{3\Delta x}{2u}. \quad (11)$$

### Результаты расчета

Сравним результаты оценок с расчетами при моделировании течения в канале в квазиодномерном приближении. Длина первой секции постоянного сечения составляет 5,4 калибра, ее ширина равна 1,41 калибра; аналогичные величины для второй секции постоянного сечения имеют значения 5,28 и 2,48 соответственно. Общая длина канала составляет 18 калибров. Распределение чисел Маха без подвода энергии показано на рис. 1 (приведены результаты для верхней половины канала). Число Маха на входе в канал равно единице, на выходе – 3,414. В первой секции постоянного сечения число Маха имеет значение  $M = 2,199$ .

Для полученного стационарного решения в первой секции постоянного сечения пло-

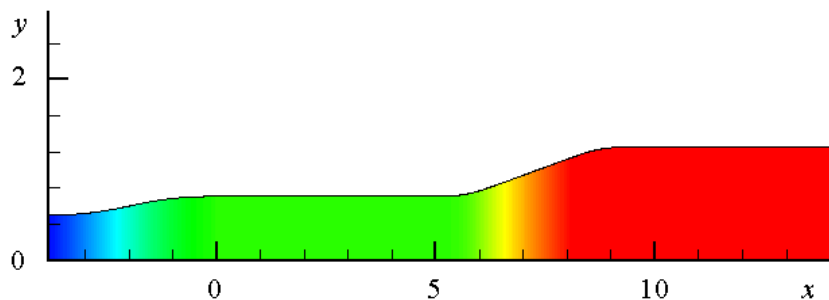


Рис. 1. Распределение чисел Маха в канале при расчете в квазиодномерном приближении

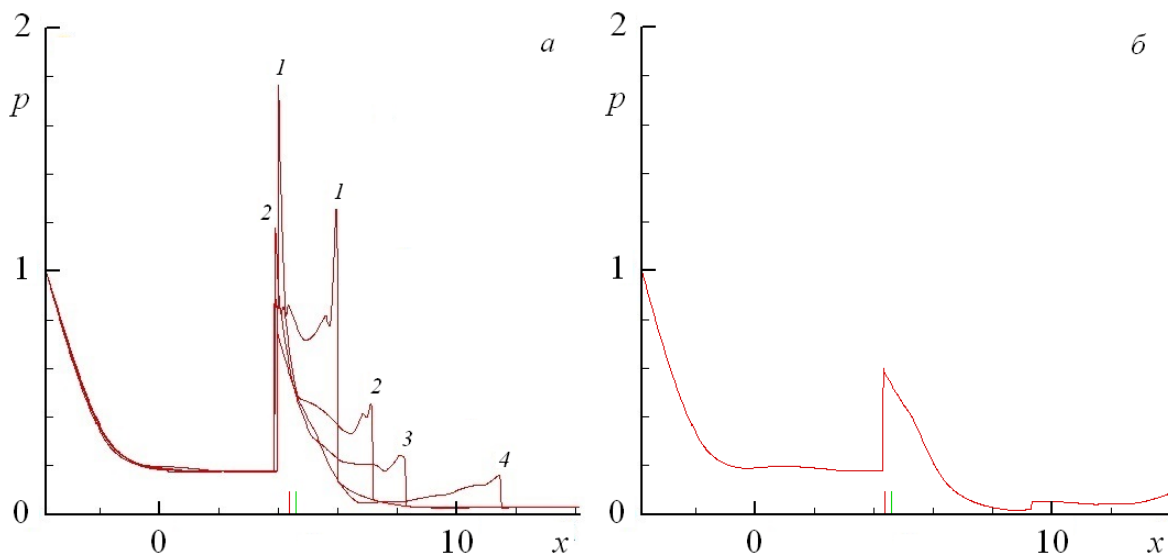


Рис. 2. Распределение давления при квазиодномерном течении в канале в зависимости от координаты  $x$ , откладываемой вдоль оси канала:  $a$  – для моментов времени  $t = 0, 1\Delta t; 0, 2\Delta t; 0, 3\Delta t; 0, 4\Delta t$  – кривые 1, 2, 3, 4 соответственно;  $b$  – для момента времени  $t = \Delta t$ ; вертикальными линиями возле оси  $x$  обозначена зона подвода энергии

щадью  $S = 1,55$  плотность газа равна  $\rho = 0,29$ , продольная скорость  $u = 1,72$ , следовательно, согласно (9) в сечении единичной площади должна подводиться мощность

$$\Delta N = \frac{8\rho u^3}{9} = 2,03.$$

В расчетах период подвода энергии  $\Delta t$  взят равным промежутку времени  $t_2$ , полученному в оценках из условия  $l_0 = 0,77$ :  $\Delta t = t_2 = 3,05$ . Средняя мощность принята равной  $\Delta N = 2,22$  (значение подводимой мощности близко к оценке). Соответственно, энергия импульса составляла произведение  $\Delta N \cdot t_2 = 2,2 \cdot 3,05 = 6,7$ .

На рис. 2 показано распределение давления для различных моментов времени. Из рис. 2,  $a$  видно, что в пределах первой половины периода скачок в соответствии с оценкой (10) распространяется вверх по потоку. С другой стороны, из 2,  $b$  видно, что к концу периода скачок уплотнения практически вернулся в зону подвода энергии, как это следует из (10). Максимальная величина смещения скачка уплотнения от середины зоны энергоподвода после однократного подвода энергии составляет в безразмерных единицах 0,62, что является неплохим совпадением с оценкой.

Если вычислить поправку (11), то при параметрах расчета она оказывается малой. Относительное изменение периода равно

$$\frac{\Delta t_2}{t_2} = 0,07,$$

т. е. период должен быть на 7% больше, а полная мощность меньше; при этом она будет составлять величину 1,9, а период – 3,3.

Это показывает возможность использования полученных оценок для прогноза эволюции скачков уплотнения от импульсного источника энергии.

Однако подводимая мощность несколько больше полученной в результате оценок. При импульсно-периодическом подводе энергии с  $\Delta t = 3,05$  фронт ударной волны с течением времени сместится вверх по потоку и остановится немного левее первой секции постоянного сечения, т. е. в сопловой части канала (см. рис. 3). В данном случае положение скачка уплотнения для импульсного и непрерывного подвода энергии для одной и той же мощности практически совпадают, как видно из рис. 3. Эта ударная волна относительно слабая. Приведенные данные подтверждают, что действительно, для оценки мощности, необходимой для увеличения давления в секции постоянного сечения, можно пользоваться формулой (9).

Как показали численные исследования, характер течения меняется скачкообразно при некоторой мощности. Если мощность равна  $\Delta N = 1,05$ , то характер решения согласуется с оценкой – за каждый период газ,

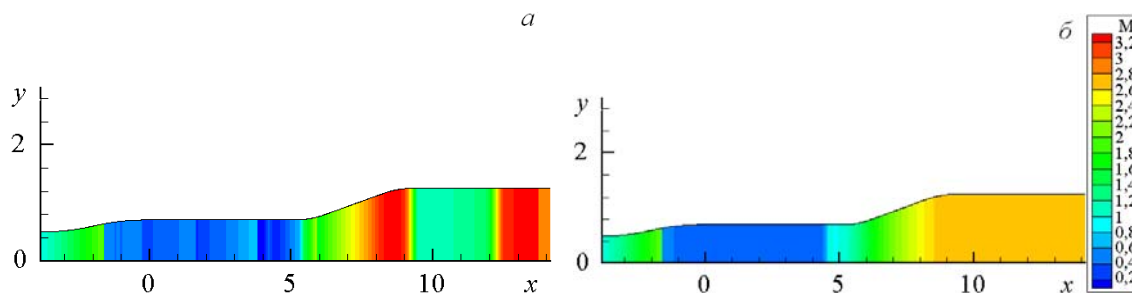


Рис. 3. Распределение чисел Маха:  
 а – при импульсно-периодическом подводе энергии, б – при непрерывном режиме энерговыделения

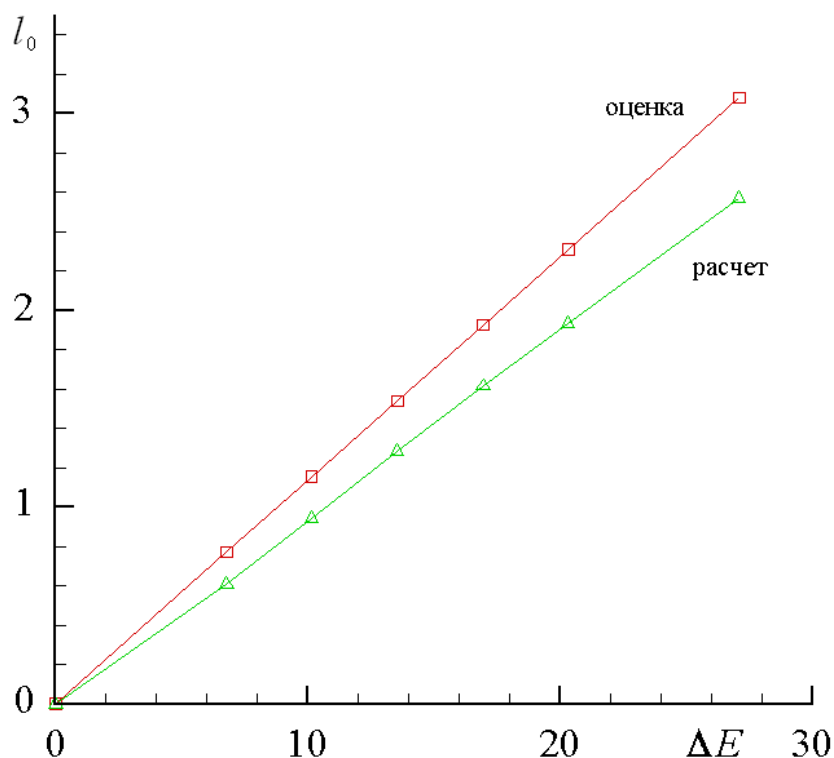


Рис. 4. Зависимость максимального перемещения  $l$  ударной волны вверх по потоку после одиночного импульсного подвода энергии от подводимой энергии  $\Delta E$

подогретый импульсом, полностью уходит за зону подвода энергии. Однако при значении  $\Delta N = 1,1$  устанавливается решение с дозвуковым течением во всем объеме первой секции постоянного сечения. В этом случае режим течения формировался очень медленно по сравнению с течением при  $\Delta N = 2,2$ . Переход от одного режима к другому связан с наличием нелинейных эффектов, которые не рассматривались при проведении оценок.

В соответствии с полученной выше оценкой максимального перемещения  $l_0$  ударной волны вверх по потоку после одиночного импульсного подвода энергии зависимость  $l_0$  от подводимой энергии  $\Delta E$  линейная. Эта зависимость показана на рис. 4. На рисунке нанесены также результаты численного решения уравнений Эйлера в квазиодномерном приближении. Полученная при этом зависимость также линейная. От-

личие составляет 24%, что свидетельствует о разумности полученных оценок.

### Заключение

Таким образом, получены приближенные аналитические зависимости, применимые для больших значений периода импульсного подвода энергии в секции постоянного сечения рассматриваемого канала. Эти зависимости удовлетворительно согласуются с численными расчетами и позволяют очертить область параметров для проведения более точных исследований в рамках численного моделирования, а также могут использоваться в инженерных расчетах. Показано (для больших значений периода подвода энергии), что возможны два вида квазипериодического решения: один, когда вся область возмущения в течение одного периода сносится вниз по потоку за зону подвода энергии; другой, когда во всем объ-

еме секции постоянного сечения течение становится дозвуковым. При этом существует некоторое критическое значение подводимой мощности, когда один тип решения меняется на другой.

### Список литературы

1. Журавская Т. А., Левин В. А. Исследование некоторых способов стабилизации детонационной волны в сверхзвуковом потоке // МЖГ. 2012. № 6. С. 126–136.
2. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит., 1957. 376 с.

*Материал поступил в редколлегию 19.08.2013*

V. P. Zamuraev, A. P. Kalinina

### NUMERICAL AND ANALYTICAL ESTIMATION OF PARAMETERS OF PULSED ENERGY SOURCES WHICH DO NOT LEAD TO LOCKING OF SUPERSONIC FLOW IN CHANNELS OF VARIABLE SECTION

In this paper the pulse energy supply into the channel of variable cross section was studied. The approximate formulas were obtained for the value of the input energy, corresponding to the maximal distance which the shock wave from a pulsed power source reached upstream, as well as full power, energy supply period corresponding to the conditions of closing the channel. The applicability of the analytical relationships is confirmed by numerical calculations based on the Euler equations in a quasi one-dimensional approximation.

*Keywords:* supersonic flow, the channel of variable cross section, the pulse energy source, the Euler equations.