

УДК 537.852

**А. А. Иванов**

*Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН  
пр. Акад. Лаврентьева, 11, Новосибирск, 630090, Россия*

*Новосибирский государственный университет  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия*

*A.A.Ivanov@inp.nsk.su*

## К РАСЧЕТУ ИНДУКТИВНОСТИ И ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТИ КАТУШЕК ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Выводится выражение для индуктивности и взаимной индуктивности катушек прямоугольного сечения в виде одномерного интеграла. Полученное выражение удобно для численных расчетов с заданной точностью вычислений.

*Ключевые слова:* индуктивность, взаимная индуктивность, катушки прямоугольного сечения.

Расчету индуктивности катушек различной формы посвящено большое количество монографий (см., например, [1]). К сожалению, даже в простейшем случае катушек с прямоугольной формой сечения эта задача достаточно сложна, и в литературе приведены в основном различные приближенные способы ее решения, причем часто не указывается точность, с которой проводятся вычисления. Однако во многих случаях возникает необходимость вычисления индуктивности и взаимной индуктивности с высокой, наперед заданной точностью. Эту задачу в общем случае катушки произвольных размеров достаточно сложно решить с использованием приведенных в литературе алгоритмов. Вычисление же индуктивности с помощью ЭВМ затруднено отсутствием аналитических формул простого вида.

В принципе величина индуктивности определяется путем вычисления энергии магнитного поля катушки. Однако исходный интеграл является 6-мерным, что сильно затрудняет его вычисление. Существенное упрощение можно получить, если свести этот интеграл к одномерному, программы

вычислений которого широко доступны и не требуют специальных навыков.

Приведем краткий вывод формул для индуктивности (и взаимной индуктивности) катушек прямоугольного сечения в виде одномерного интеграла. Начнем с вычисления индуктивности катушки прямоугольного сечения с однородной плотностью тока, имеющей  $N$  витков (рис. 1). Длина катушки –  $b$ , внешний и внутренний радиусы обозначим  $a_2$  и  $a_1$  соответственно.

Введем, как принято в литературе, безразмерные параметры  $\alpha = a_2/a_1$  и  $\beta = b/a_1$ . Вычисляя энергию магнитного поля во всем пространстве по известным формулам [2], получим (предполагаем, что по обмотке протекает ток  $J$ ):

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= \frac{1}{8\pi} \int H^2 dV = \\ &= \frac{1}{2c} \int \vec{A} \cdot \vec{j} dV = \frac{LJ^2}{2c^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Подставляя в (1) известную формулу для векторного потенциала системы токов, получим исходную формулу для вычислений [3] (см. также дополнение 1):

*Иванов А. А. К расчету индуктивности и взаимной индуктивности катушек прямоугольного сечения // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Физика. 2014. Т. 9, вып. 1. С. 10–14.*

$$L = \frac{1}{J^2} \cdot \iint \frac{\vec{j}(\vec{r})\vec{j}(\vec{r}')dVdV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2)$$

В случае цилиндрической симметрии к аналогичному выражению приводит и часто используемое выражение  $\frac{LJ}{c} = \Phi$ , где  $\Phi$  – потокосцепление катушки (более строго этот вопрос обсуждается в дополнении 3).

Переходя в (2) к цилиндрическим координатам, легко свести это выражение после однократного интегрирования по углу к следующему:

$$L = \frac{2\pi N^2}{(a_2 - a_1)^2 b^2} \times \int r dr \cdot \int r' dr' \cdot \iint dz \cdot dz' \times \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{(z - z')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi}}. \quad (3)$$

Пользуясь известными формулами из теории функций Бесселя (см., например, [4])

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda$$

и

$$J_0(\sqrt{z^2 + Z^2 - 2zZ \cos \varphi}) = J_0(z) \cdot J_0(Z) + 2 \sum_{n=1}^\infty J_n(z) J_n(Z) \cos n\varphi,$$

легко свести интеграл (3) к виду

$$L = \frac{4\pi^2 N^2}{(a_2 - a_1)^2 b^2} \times \int_0^\infty d\lambda \iint dz \cdot dz' e^{-\lambda|z-z'|} \cdot \left( \int_{a_1}^{a_2} r dr J_1(\lambda r) \right)^2. \quad (4)$$

Интеграл по радиусу вычисляется (см., например, [4–6]), что дает

$$\int r dr J_1(\lambda r) = \frac{\pi r}{2\lambda} (J_1(\lambda r) H_0(\lambda r) - J_0(\lambda r) H_1(\lambda r)), \quad (5)$$

где  $H_{0,1}$  – функции Струве [5; 6] (см. также дополнение 2). Интеграл по длине вычисляется элементарно, что дает

$$\iint dz dz' e^{-\lambda|z-z'|} = 2 \int_0^b dz' \int_0^{z'} dz e^{-\lambda(z-z')} = \frac{2}{\lambda} \left( b - \frac{1 - e^{-\lambda b}}{\lambda} \right). \quad (5')$$

После подстановки этих выражений в (4) оно приобретает окончательный вид

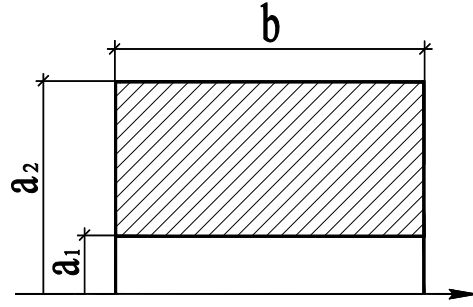


Рис. 1. Катушка прямоугольного сечения

$$L = \frac{2\pi^4 a_1 N^2}{(\alpha - 1)^2 \beta^2} \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{x^3} \left\{ \beta - \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \right\} \times \left\{ \alpha (J_1(\alpha x) H_0(\alpha x) - H_1(\alpha x) J_0(\alpha x)) - (J_1(x) H_0(x) - H_1(x) J_0(x)) \right\}^2.$$

Вводя функцию

$$F(s) = J_1(s) H_0(s) - H_1(s) J_0(s),$$

окончательное выражение для индуктивности в виде однократного интеграла можно записать как

$$L = \frac{2\pi^4 a_1 N^2}{(\alpha - 1)^2 \beta^2} \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{x^3} \left\{ \beta - \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \right\} \cdot \left\{ \alpha \cdot F(\alpha x) - F(x) \right\}^2. \quad (6)$$

Вывод выражения для взаимной индуктивности катушек прямоугольного сечения с совпадающими осями производится аналогично. Окончательное выражение для катушек, расположенных вдоль оси с зазором, имеет вид (использованы обозначения, аналогичные введенным ранее:  $\Delta$  – зазор между обмотками; величины без верхнего индекса относятся к одной катушке; верхний индекс «звездочка» маркирует размеры другой катушки)

$$L_{12} = \frac{\pi^4 N_1 N_2}{(a_2 - a_1)(a_2^* - a_1^*) b b^*} \times \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^4} (1 - e^{-\lambda b})(1 - e^{-\lambda b^*}) \times e^{-\lambda \Delta} (a_2 F(\lambda a_2) - a_1 F(\lambda a_1) a_2^* F(\lambda a_2^*) - a_1^* F(\lambda a_1^*)). \quad (6')$$

Другой часто встречающийся случай взаимного расположения катушек – это вло-

женные друг в друга катушки с совпадающими центрами и осями (рис. 2).

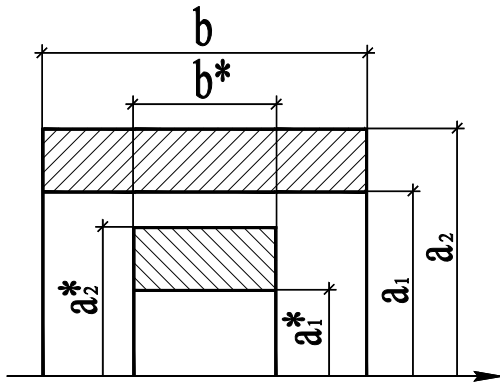


Рис. 2. Катушки с совпадающими центрами

В этом случае (в тех же обозначениях), их взаимная индуктивность может быть выражена в виде интеграла (предполагается, что  $b^* \leq b$ )

$$L_{12} = \frac{2\pi^4 N_1 N_2}{(a_2 - a_1)(a_2^* - a_1^*)bb^*} \times \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^3} \left( b^* - \frac{e^{-\lambda(b-b^*)} - e^{-\lambda(b+b^*)}}{\lambda} \right) (a_2 F(\lambda a_2) - a_1 F(\lambda a_1) a_2^* F(\lambda a_2^*) - a_1^* F(\lambda a_1^*)). \quad (6'')$$

### Некоторые применения полученных формул

Формально численные расчеты с использованием полученных формул не вызывают особых проблем. Подынтегральная функция в (6) при  $x \rightarrow 0$  не имеет особенностей, а именно она стремится к нулю как  $\sim x^2$ . Если размеры сечения катушки не слишком малы, то на верхнем пределе интеграл быстро сходится, так как подынтегральная функция стремится к нулю как  $\sim 1/x^4$ . С уменьшением размеров сечения сходимость, как и следовало ожидать, ухудшается (подынтегральная функция ведет себя как  $\sim \frac{1}{x}$ ) и интеграл  $\sim \ln(1/\beta)$ .

Небезынтересно применить формулы (6), (6') и (6'') к случаям, в которых удастся получить приближенные аналитические выражения для индуктивности (взаимной индуктивности).

Простейший пример такого рода – вычисление индуктивности  $L_\infty$  тонкого ( $\alpha \rightarrow 1$ , или  $a_1 = a_2 = a$ ) и длинного ( $\beta \rightarrow \infty$ ) соленоидов. Хорошо известный результат (см., например, [3]), получается, если считать, что поле внутри соленоида однородно и равно  $\frac{4\pi NJ}{cb}$ , т. е. не учитывать ослабление поля на торцах и поле вне соленоида.

В этом случае простейшие вычисления дают:  $L_\infty = \frac{4\pi^2 N^2}{\beta} \cdot a$ . Применение формулы

(6) позволяет получить поправки к индуктивности, связанные с указанными эффектами. Для разложения части подынтегральной функции, зависящей от  $\alpha$ , проще воспользоваться прямо выражением (5), что дает (пренебрегаем также членом с  $e^{-\beta x}$ , который дает малые поправки):

$$L \approx 2 \cdot \frac{(2\pi)^2 N^2 a}{\beta^2} \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{x} \cdot J_1^2(x) \left( \beta - \frac{1}{x} \right).$$

Приведенный интеграл вычисляется точно, что дает

$$L \approx \frac{4\pi^2 N^2 a}{\beta} \left( 1 - \frac{8}{3\pi\beta} \right) = L_\infty \left( 1 - \frac{8}{3\pi\beta} \right). \quad (7)$$

Второй член в скобках представляет собой искомую поправку, связанную с конечностью длины соленоида. Учет члена с  $e^{-\beta x}$  дает окончательный результат в виде ряда (см. [4. С. 58])

$$L = L_\infty \left( 1 - \frac{8}{3\pi\beta} + \frac{1}{\beta^2} \sum_{m=0}^\infty \left( \frac{2m!}{m!m+1!} \right)^2 \times \frac{2m+1}{m+2} \left( \frac{-1}{4\beta^2} \right)^m \right). \quad (7')$$

Интересно, что без этих поправок можно найти индуктивность соленоида произвольной толщины, т. е. при произвольном  $\alpha$ . Этот результат легко получается прямым вычислением энергии магнитного поля на единицу длины бесконечного соленоида (внутри обмотки поле равно

$$\frac{4\pi NJ}{cb} \left( 1 - \frac{r - a_1}{a_2 - a_1} \right),$$

а в полости оно такое же, как поле бесконечно тонкого соленоида). Внутренняя ин-

дуктивность, связанная с полем внутри обмотки, получается равной

$$L_{\infty} \frac{\alpha^2 + 2\alpha - 3}{6},$$

а полная индуктивность соответственно равна

$$L = L_{\infty} \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 3}{6}. \quad (8)$$

Тот же результат получается и с использованием выражения (4), если переставить порядок интегрирования по  $\lambda$  и радиусу, а в (5') выражение в скобках заменить на  $\beta$ . Интеграл по  $\lambda$  при этом оказывается равен

$$\int_0^{\infty} \frac{J_1(\lambda r) J_1(\lambda r') d\lambda}{\lambda}.$$

Используя подстановку

$$\frac{2J_1(\lambda)}{\lambda} = J_0(\lambda) + J_2(\lambda),$$

можно свести этот интеграл к сумме интегралов от произведения функций Бесселя, что дает

$$\int_0^{\infty} \frac{J_1(\lambda r) J_1(\lambda r') d\lambda}{\lambda} = \frac{r}{2r'}, \quad r > r',$$

$$\frac{r'}{2r}, \quad r < r'.$$

Вычисление двукратного интеграла по радиусам в точности приводит к выражению (8).

Достаточно простым оказывается также вычисление взаимной индуктивности двух одинаковых длинных тонких соленоидов, расположенных вдоль одной оси без зазора. Используя ту же процедуру, что при выводе (7), можно получить

$$L_{12} = \frac{4\pi^2 a^2 N^2}{b^2} \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \cdot J_1^2(\lambda a) = L_{\infty} \frac{4}{3\pi\beta}.$$

### Заключение

В работе получены выражения для индуктивности и взаимной индуктивности катушек прямоугольного сечения в виде однократных интегралов, пригодные для численных расчетов. Получены аналитические формулы для ряда практически интересных частных случаев.

*Дополнение 1.* Выражение (2) дает полную индуктивность системы проводников с током произвольной конфигурации. Принято разделять эту индуктивность на две части: внутреннюю, которая определяется

энергией магнитного поля внутри проводника, и внешнюю, определяемую энергией магнитного поля в пространстве вне проводников. Применяя использованное при выводе (1) векторное тождество

$$\operatorname{div}[\vec{A} \times \vec{H}] = \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{H},$$

легко получить выражения для внутренней и внешней индуктивности системы токов в виде

$$L_{\text{int}} = \frac{1}{J^2} \iint \frac{\vec{j}(\vec{r}) \vec{j}(\vec{r}') dV dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} +$$

$$+ \frac{c^2}{4\pi J^2} \oiint_S [\vec{A} \times \vec{H}] d\vec{S},$$

$$L_{\text{ext}} = -\frac{c^2}{4\pi J^2} \oiint_S [\vec{A} \times \vec{H}] d\vec{S}.$$

В этих выражениях поверхностный интеграл берется по поверхности проводника, так что единичный вектор нормали к поверхности направлен вне него.

*Дополнение 2.* В большинстве программ, используемых для математических расчетов, имеются встроенные процедуры для вычисления функций Бесселя. Для вычисления значений функций Струве необходимо использовать ряд [5; 6]

$$H_{\nu}(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^{\nu+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}x\right)^{2k}}{\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(k + \nu + \frac{3}{2}\right)}.$$

При больших значениях аргумента удобно использовать асимптотические выражения [5; 6]

$$H_0(x) = N_0(x) + \frac{2}{\pi} \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{x^5} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{x^7} + \dots \right],$$

$$H_1(x) = N_1(x) + \frac{2}{\pi} \times$$

$$\times \left[ 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1^2 \cdot 3}{x^4} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{x^6} - \dots \right],$$

где  $N_{1,2}$  – функции Неймана. Ошибка в приведенных выражениях не превышает величины первого отброшенного члена и имеет тот же знак [5; 6]. При больших значениях аргумента приведенные формулы позволяют свести выражение

$$J_1(x)H_0(x) - J_0(x)H_1(x)$$

к

$$\frac{2}{\pi x} + \frac{2J_1(x)}{\pi} \cdot \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \dots \right] - \frac{2J_0(x)}{\pi} \times$$

$$\times \left[ 1 + \frac{1}{x^2} - \dots \right]$$

(здесь использовано выражение для вронскиана функций Бесселя).

*Дополнение 3.* Альтернативное выражение для полной индуктивности катушки цилиндрической симметрии может быть получено из закона сохранения энергии электромагнитного поля катушки при медленном, квазистатическом изменении тока в ней. Энергией возникающего электрического поля можно при этом пренебречь и закон сохранения энергии приобретает вид

$$\frac{\partial H^2}{\partial t} \frac{1}{8\pi} + \operatorname{div} \frac{c}{4\pi} [E \times H] =$$

$$= -\vec{j} \cdot \vec{E} = -\vec{j} \cdot \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right).$$

Интегрируя по всему пространству и пользуясь отсутствием потока вектора Пойтинга через поверхность бесконечно большого радиуса, получим

$$\frac{\partial \varepsilon_H}{\partial t} = \frac{LJ\dot{J}}{c^2} = \frac{1}{c} \int \vec{j} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dV',$$

где интеграл в правой части берется по объему катушки. Очевидным образом полученное выражение сводится к (2). Используя цилиндрическую симметрию, его можно далее преобразовать, вводя поток магнитного поля

$$\Phi(r, z) = \int_0^r 2\pi r' dr' H_z(r', z) = 2\pi r A_\phi(r, z).$$

Тогда, используя очевидную пропорциональность потока току в катушке, получим

$$\frac{LJ\dot{J}}{c} = \int j \frac{\partial}{\partial t} \frac{\Phi(r'', z)}{2\pi r'} dV' =$$

$$= \int j \frac{J}{J} \frac{\Phi(r'', z')}{2\pi r'} 2\pi r' dr' dz'.$$

Далее это выражение сводится очевидным образом к

$$\frac{LJ}{c} = \langle \Phi \rangle = \frac{1}{J} \cdot \int_S j \Phi dS,$$

где интеграл берется по поперечному сечению катушки. Для катушки малого сечения и с постоянной плотностью тока получим часто встречающееся выражение  $\frac{LJ}{c} = \Phi$ , где  $\Phi$  – поток магнитного поля через площадь сечения катушки.

### Список литературы

1. Калантаров П. Л., Цейтлин Л. А. Расчет индуктивностей. Л.: Энергоатомиздат, 1986.
2. Тунов М. А. Расчет квазистационарных магнитных полей в аксиально-симметричном случае методом эквивалентных контуров. Новосибирск, 1982. Препринт ИЯФ 82-59.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974.
5. Handbook of Math. Functions with Formulas, Graphs and Math. Tables / Eds. M. Abramowitz, I. A. Stegun. 9<sup>th</sup> printing. N. Y.: Dover, 1972. P. 496–498.
6. Справочник по спец. функциям с формулами, графиками и мат. таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. С. 313–321.

Материал поступил в редколлегию 01.11.2013

A. A. Ivanov

### CALCULATION OF SELF INDUCTANCE AND MUTUAL INDUCTANCE OF COILS WITH RECTANGULAR CROSS SECTION

An inductance and mutual inductance of coils with rectangular cross section is given in a form of one-dimensional integral. The formula is appropriate for numerical calculation of the inductances with given accuracy.

*Keywords:* self inductance, mutual inductance, coils with rectangular cross section.