

**М. А. Тиунов**

*Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН  
пр. Акад. Лаврентьева, 11, Новосибирск, 630090, Россия*

*michael\_tiuнов@mail.ru*

**ПОЛНЫЙ РАСЧЕТ  
ТРЕХМЕРНЫХ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ  
В ПРИБЛИЖЕНИИ СИЛЬНОГО СКИН-ЭФФЕКТА  
МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Разработан и реализован эффективный метод граничных интегральных уравнений, позволяющий проводить полный расчет трехмерных квазистационарных электромагнитных полей в приближении сильного скин-эффекта. Приводятся примеры расчета модельных и реальных систем формирования квазистационарных электромагнитных полей. Результаты расчетов сравниваются с аналитическими решениями и результатами измерений.

*Ключевые слова:* сильный скин-эффект, поверхностные токи и заряды, граничные интегральные уравнения.

**Введение**

Для нагрева и диагностики плазмы в мощных термоядерных установках в последнее время очень часто используются пучки положительных и отрицательных ионов, эмитируемые из источников плазмы с ВЧ разрядом [1; 2]. В таких источниках разряд в плазме поддерживается в диэлектрической камере за счет индуктивной или / и емкостной связи с электромагнитными полями катушки индуктивности высокочастотного (ВЧ) контура, расположенной вне плазменной камеры. Чтобы предотвратить сильное взаимодействие керамических стенок камеры с плазмой, часто в таких источниках устанавливаются внутренние металлические экраны. Во многих случаях эти экраны играют роль экрана Фарадея, предотвращающего развитие высоких электрических потенциалов в генерируемой плазме, которые могут привести к нежелательным изменениям ее свойств. Разряд в плазме при наличии таких экранов в основном поддерживается за счет индуктивной связи элект-

ромагнитных ВЧ полей. Поэтому важной проблемой при проектировании плазменного источника на основе ВЧ разряда является расчет ослабления индуктивно связанного электрического поля в присутствии внутренних проводящих экранов, которое определяет эффективность генерации плазмы.

Для решения таких задач, с одной стороны, требуется провести полный трехмерный расчет магнитного и электрического ВЧ полей с учетом вихревых токов во всех проводящих элементах источника, в том числе и в экране Фарадея. С другой стороны, длина волны ВЧ разряда в плазменном источнике (частота от 1 до 4 МГц) намного превышает характерные размеры самого источника. Это означает, что расчеты полей можно проводить в квазистационарном приближении, пренебрегая в уравнениях Максвелла токами смещения по сравнению с токами проводимости. В таких источниках вследствие использования высокой частоты для генерации ВЧ разряда электромагнитные поля проникают в проводники на очень малую глубину (толщина скин-слоя в меди от 66

до 33 мкм). Вследствие этого расчет квазистационарных полей в плазменном источнике на основе ВЧ разряда можно проводить в приближении сильного скин-эффекта, полагая толщину скин-слоя равной нулю.

В данной работе подробно описывается эффективный метод граничных интегральных уравнений, позволяющий проводить полный расчет трехмерных квазистационарных электромагнитных полей в приближении сильного скин-эффекта. Приводятся примеры расчета модельных и реальных систем формирования квазистационарных электромагнитных полей. Результаты расчетов сравниваются с аналитическими решениями и результатами измерений.

**Формулировка граничных интегральных уравнений задачи полного расчета трехмерных квазистационарных полей в приближении сильного скин-эффекта**

Задача расчета состоит в необходимости рассчитать электромагнитное поле, создаваемое переменными токами заданной плотности  $\vec{j}_c(\vec{r}, t)$ , протекающими в катушках заданной геометрии, а также неизвестными токами, текущими в проводниках с заданной геометрией. При этом проводники занимают не пересекающуюся с катушками часть пространства. В изотропной и однородной проводящей среде без дисперсии квазистационарные электромагнитные поля описываются следующими уравнениями Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi \frac{\rho}{\epsilon}; \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_c + \gamma \vec{E}), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\vec{j}_c$  – заданная плотность токов в катушках,  $\rho$  и  $\gamma \vec{E}$  – неизвестные плотности свободных зарядов и токов в проводящей среде,  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  – напряженности электрического и магнитного поля,  $\mu$  и  $\gamma$  – магнитная проницаемость и проводимость среды,  $c$  – скорость света в вакууме.

Будем рассматривать задачу расчета квазистационарных электромагнитных полей, создаваемых токами в катушках, синусоидально меняющихся во времени с угловой частотой  $\omega$ . При этом электромагнитное поле проникает в проводящую среду на характерную глубину, равную толщине скин-слоя:

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\gamma\omega}}. \tag{2}$$

Будем полагать, что ток в катушках в рассматриваемых системах меняется с частотой не менее 1 МГц. В этом случае толщина скин-слоя для меди не превысит 70 мкм, а для нержавеющей стали 450 мкм, что много меньше характерных размеров рассматриваемых систем. Это позволяет с хорошей точностью проводить расчет квазистационарных электромагнитных полей в приближении сильного скин-эффекта, полагая толщину скин-слоя равной нулю, т. е. для идеальных проводников. В этом приближении амплитуды синусоидально меняющихся во времени электрического и магнитного полей внутри проводников равны нулю, а снаружи описываются следующими уравнениями Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \dot{\vec{E}} &= 0; \\ \operatorname{div} \dot{\vec{H}} &= 0; \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}} &= -i \frac{\omega}{c} \mu \dot{\vec{H}}; \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{H}} &= \frac{4\pi}{c} \dot{\vec{j}}_c. \end{aligned} \tag{3}$$

На поверхности проводника амплитуды электрического и магнитного поля должны удовлетворять граничному условию Леонтовича [3], которое для идеального проводника распадается на следующих два граничных условия:

$$\begin{aligned} [\dot{\vec{E}} \times \vec{n}] &= 0; \\ (\dot{\vec{H}}, \vec{n}) &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где  $\vec{n}$  – вектор нормали к поверхности проводника.

Для решения уравнений (3) с граничными условиями (4) удобно ввести синусоидально меняющиеся во времени векторный магнитный  $\vec{A}$  и скалярный электрический  $\phi$  потенциалы. Определим амплитуду векторного магнитного потенциала по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \mu \dot{\vec{H}} &= \text{rot } \dot{\vec{A}}; \\ \text{div } \dot{\vec{A}} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Будем полагать, что проводники помещены в среды с одинаковой и постоянной магнитной проницаемостью. Тогда из последнего уравнения системы (3) и принятого определения векторного потенциала вместе с кулоновской калибровкой его по второй из формул (5) получим следующее уравнение, которому должна удовлетворять амплитуда векторного магнитного потенциала:

$$\Delta \dot{\vec{A}} = -\frac{4\pi\mu}{c} \dot{\vec{j}}_c. \quad (6)$$

Подставляя первую из формул (5) в предпоследнее уравнение системы (3), получим следующее уравнение:

$$\text{rot } \dot{\vec{E}} = -i \frac{\omega}{c} \text{rot } \dot{\vec{A}}. \quad (7)$$

Из этого уравнения получаем следующее выражение для квазистационарного электрического поля:

$$\dot{\vec{E}} = -i \frac{\omega}{c} \dot{\vec{A}} - \vec{\nabla} \dot{\phi}, \quad (8)$$

где  $\dot{\phi}$  – амплитуда скалярного электрического потенциала. Из формулы (8) с учетом первого из уравнений (3) и принятой нами кулоновской калибровки векторного потенциала получаем следующее уравнение, которому должен удовлетворять скалярный электрический потенциал:

$$\Delta \dot{\phi} = 0. \quad (9)$$

Для формулировки граничных интегральных уравнений задачи расчета квазистационарных электромагнитных полей в приближении сильного скин-эффекта будем искать решение уравнений (6) и (9) относительно векторного и скалярного потенциалов в виде следующих интегралов от неизвестного распределения поверхностных токов и зарядов на проводящих поверхностях:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{A}}(\vec{r}) &= \frac{\mu}{c} \oint_{S_e} \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' + \frac{\mu}{c} \int_{V_c} \frac{\dot{\vec{j}}_c(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'; \\ \dot{\phi}(\vec{r}) &= \oint_{S_e} \frac{\dot{\sigma}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\dot{\vec{J}}$  и  $\dot{\sigma}$  – искомые амплитуды поверхностных токов и зарядов;  $\dot{\vec{j}}_c$  – заданные амплитуды плотности токов в катушках, создающих электромагнитные поля;  $S_e$  –

замкнутые поверхности всех проводников, кроме катушек с током;  $V_c$  – объемы всех катушек с током.

Как отмечалось выше, в приближении сильного скин-эффекта магнитное поле внутри проводника равно нулю. При этом из второго из граничных условий (4) следует, что на поверхности проводника равна нулю нормальная компонента напряженности магнитного поля. Отличной от нуля остается только касательная к поверхности проводника компонента напряженности магнитного поля. Как следует из последнего из уравнений (3), в этом случае в каждой точке  $\vec{r}_e$  на самой проводящей поверхности амплитуда напряженности магнитного поля однозначно связана с амплитудой плотности поверхностных токов в данной точке следующим соотношением:

$$\dot{\vec{H}}(\vec{r}_e) = \frac{2\pi}{c} \left[ \dot{\vec{J}}(\vec{r}_e) \times \vec{n}(\vec{r}_e) \right], \quad \vec{r}_e \in S_e, \quad (11)$$

где  $\vec{n}(\vec{r}_e)$  – вектор нормали к проводящей поверхности в данной точке.

С другой стороны, из формул (5) и (10), получаем следующее интегральное выражение для напряженности магнитного поля через искомое распределение плотности поверхностных токов:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}(\vec{r}) &= \\ &= \frac{1}{c} \oint_{S_e} \left[ \dot{\vec{J}}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}_r \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dS' + \dot{\vec{H}}_c(\vec{r}), \end{aligned} \quad (12)$$

где через  $\dot{\vec{H}}_c(\vec{r})$  обозначен вклад в магнитное поле катушек с заданной геометрией и величиной токов, рассчитываемый по закону Био – Савара.

Помещая точку расчета поля по формуле (12) на проводящую поверхность и приравнявая значение этого поля правой части соотношения (11), получаем следующие граничные интегральные уравнения относительно искомой плотности поверхностных токов:

$$\begin{aligned} &\frac{2\pi}{c} \left[ \dot{\vec{J}}(\vec{r}_e) \times \vec{n}(\vec{r}_e) \right]_{\xi} - \\ &- \frac{1}{c} \oint_{S_e} \left[ \dot{\vec{J}}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}_{r_e} \left( \frac{1}{|\vec{r}_e - \vec{r}'|} \right) \right]_{\xi} dS' = \\ &= \dot{\vec{H}}_{c\xi}(\vec{r}_e), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2\pi}{c} \left[ \dot{\vec{J}}(\vec{r}_e) \times \vec{n}(\vec{r}_e) \right]_{\eta} - \\
 & - \frac{1}{c} \oint_{S_e} \left[ \dot{\vec{J}}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}_{r_e} \left( \frac{1}{|\vec{r}_e - \vec{r}'|} \right) \right]_{\eta} dS' = \\
 & = \dot{H}_{e\eta}(\vec{r}_e), \\
 & \vec{r}_e \in S_e.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь в каждой точке на поверхности проводника вводится своя локальная система координат с осями  $(\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$  такая, что орт  $\vec{e}_\zeta$  этой системы совпадает с нормалью к поверхности, а орты  $\vec{e}_\xi$  и  $\vec{e}_\eta$  – с касательными к поверхности в данной точке. Индексами  $\xi$  и  $\eta$  в уравнениях (13) обозначены компоненты векторных произведений и напряженности магнитного поля катушек вдоль орт  $\vec{e}_\xi$  и  $\vec{e}_\eta$  локальной системы координат в точке наблюдения  $\vec{r}_e$  на проводящей поверхности. Двух уравнений (13) достаточно для нахождения неизвестного распределения плотности поверхностных токов, которая в каждой точке наблюдения имеет только две компоненты.

Как и следовало ожидать, система уравнений (13) с точностью до записи совпадает с аналогичной системой для задачи линейной магнитостатики, описанной в работе [4], если положить магнитную проницаемость проводников равной нулю. Решение системы уравнений (13) позволяет по формулам (10) и (12) рассчитывать векторный потенциал и напряженность магнитного поля в любой точке пространства. Однако этого не достаточно для проведения расчета по формуле (8) напряженности квазистационарного электрического поля, поскольку неопределенным остается градиент скалярного электрического потенциала.

Для его нахождения надо учесть, что на поверхности проводника не равна нулю только нормальная компонента напряженности электрического поля, как это следует из первого граничного условия (4). При этом из первого уравнения системы (1) следует, что величина нормальной компоненты амплитуды напряженности электрического поля на самой проводящей поверхности однозначно связана с амплитудой плотности поверхностных зарядов следующим соотношением:

$$\dot{E}_n(\vec{r}_e) = 2\pi \dot{\sigma}(\vec{r}_e), \quad \vec{r}_e \in S_e. \tag{14}$$

С другой стороны, из формул (8) и (10), получаем следующее интегральное выражение для напряженности электрического поля через искомое распределение плотности поверхностных зарядов:

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{E}}(\vec{r}) = & \\
 = & - \frac{i\omega\mu}{c^2} \left( \oint_{S_e} \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' + \int_{V_e} \frac{\dot{\vec{j}}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right) - \\
 & - \oint_{S_e} \dot{\sigma}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_r \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dS'.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь считаются заданными геометрия и токи в катушках, а также найденным после решения уравнений (13) распределение плотности поверхностных токов на проводящих поверхностях. Расчет поля по формуле (15) проводится в пространстве вне проводников, магнитную проницаемость которого можно в дальнейшем, не нарушая общности, положить равной единице.

Рассчитывая по формуле (15) нормальную компоненту электрического поля на проводящей поверхности и приравнявая ее правой части соотношения (14), получаем следующие граничные интегральные уравнения относительно искомой амплитуды плотности поверхностных зарядов:

$$\begin{aligned}
 & 2\pi \dot{\sigma}(\vec{r}_e) + \oint_{S_e} \dot{\sigma}(\vec{r}') \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{|\vec{r}_e - \vec{r}'|} \right) dS' = \\
 & = - \frac{i\omega}{c} \dot{A}_n(\vec{r}_e), \\
 & \vec{r}_e \in S_e.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь символом  $\dot{A}_n$  обозначена амплитуда нормальной к проводящей поверхности в точке наблюдения компоненты векторного потенциала, рассчитываемая через амплитуды линейной плотности поверхностных токов и объемной плотности токов в катушках по формуле (10), через  $\partial/\partial n$  обозначена проекция градиента вдоль координаты точки наблюдения на нормаль к проводящей поверхности в точке наблюдения.

Решение граничного интегрального уравнения (16) в принципе позволяет по формуле (15) проводить расчет квазистационарного электрического поля в любой точке пространства вне проводников. Однако в работе [4] показано, что при численном ре-

шении уравнения типа (16) распределение поверхностных зарядов будет рассчитываться с низкой точностью вследствие наличия ошибки приближенного расчета правой части уравнения (16). В результате рассчитываемое по формуле (15) электрическое поле будет с плохой точностью удовлетворять первому из уравнений (3). В той же работе предложен метод регуляризации граничного интегрального уравнения (16) путем внесения в него первого из уравнений (3). Для квазистационарного электрического поля в приближении сильного скин-эффекта это уравнение может быть записано в следующем интегральном виде:

$$\oint_{S_e} \dot{\sigma}(\vec{r}') dS' = 0. \quad (17)$$

После регуляризации по методу, предложенному в работе [4], граничное интегральное уравнение (16) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} 2\pi \dot{\sigma}(\vec{r}_e) + \oint_{S_e} \dot{\sigma}(\vec{r}') \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{|\vec{r}_e - \vec{r}'|} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{S_e} \oint_{S_e} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{|\vec{r}_e - \vec{r}''|} \right) dS'' \right\} dS' = \\ = - \frac{i\omega}{c} \dot{A}_n(\vec{r}_e), \quad \vec{r}_e \in S_e. \end{aligned} \quad (18)$$

Любое решение этого уравнения, как показано в работе [4], удовлетворяет интегральному условию (17). Поэтому именно уравнение (18) необходимо решать для нахождения корректного распределения плотности поверхностных зарядов, которое позволяет с высокой точностью рассчитывать квазистационарное электрическое поле по формуле (15).

Уравнения (13) и (18) являются полной системой граничных интегральных уравнений для нахождения искомых распределений плотности поверхностных токов и зарядов. Их последовательное решение позволяет по формулам (10), (12) и (15) проводить полный расчет трехмерных квазистационарных электромагнитных полей в приближении сильного скин-эффекта.

**Численная реализация метода граничных интегральных уравнений задачи полного расчета трехмерных квазистационарных полей в приближении сильного скин-эффекта**

Описанный в предыдущем разделе метод граничных интегральных уравнений был

реализован нами в ранее разработанной программе MAGEL3D, исходно предназначенной для расчета трехмерных систем формирования стационарных электромагнитных полей. Численный расчет трехмерных квазистационарных полей проводится в приближении сильного скин-эффекта. При этом все проводящие поверхности, кроме катушек с током, представляются в виде набора треугольных поверхностных элементов. Аналогичное разбиение поверхностей электродов и изоляторов производится в программе MAGEL3D при решении задачи электростатики. В пределах каждого элемента линейная плотность поверхностных токов и плотность поверхностных зарядов полагается постоянной. В этом приближении формулы (10) для расчета амплитуд векторного и скалярного потенциалов принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{A}(\vec{r}) &= \\ &= \frac{1}{c} \sum_{k=1}^N \dot{J}_k \cdot \int_{S_{ek}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' + \frac{1}{c} \int_{V_c} \frac{\dot{j}_c(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'; \\ \dot{\phi}(\vec{r}) &= \sum_{k=1}^N \dot{\sigma}_k \cdot \int_{S_{ek}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'. \end{aligned} \quad (19)$$

В формуле (19) индексом  $k$  нумеруются поверхностные элементы, полное число которых равно  $N$ ;  $\dot{J}_k$  и  $\dot{\sigma}_k$  – искомые амплитуды линейной плотности поверхностных токов и плотность поверхностных зарядов в пределах  $k$ -го треугольного элемента, которые принимаются равными их величине в геометрическом центре элемента;  $S_{ek}$  – площадь  $k$ -го элемента. В принятом численном приближении формулы для расчета амплитуд напряженностей квазистационарных электромагнитных полей (12) и (15) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{H}(\vec{r}) &= \\ &= \frac{1}{c} \sum_{k=1}^N \left[ \dot{J}_k \times \vec{\nabla} \int_{S_{ek}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' \right] + \dot{H}_c(\vec{r}), \\ \dot{E}(\vec{r}) &= \\ &= - \frac{i\omega}{c^2} \left( \sum_{k=1}^N \dot{J}_k \cdot \int_{S_{ek}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' + \int_{V_c} \frac{\dot{j}_c(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right) - \\ &- \sum_{k=1}^N \dot{\sigma}_k \cdot \vec{\nabla} \int_{S_{ek}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'. \end{aligned} \quad (20)$$

Входящие в формулы (19) и (20) интегралы по площадям элементов равны скалярным потенциалам, наводимым ими в точке наблюдения  $\vec{r}$  при единичной плотности поверхностных зарядов. Для решения задач электростатики в программе MAGEL3D уже был реализован алгоритм аналитического расчета этих интегралов. Это существенно облегчило реализацию в ней описываемого метода граничных интегральных уравнений для расчета трехмерных квазистационарных полей.

При реализации данного метода отдельной разработки потребовал алгоритм численного расчета векторного потенциала катушек с током. Данный потенциал входит как в правую часть граничного интегрального уравнения (18) относительно искомой плотности поверхностных зарядов, так и в формулы (19) и (20) при расчете векторного потенциала и напряженности квазистационарного электрического поля. На данный момент нами реализован и описывается далее только алгоритм численного расчета векторного потенциала соленоида с током конечной толщины и длины.

Ток в соленоиде течет по азимуту и его векторный потенциал имеет только одну азимутальную компоненту. В цилиндрической системе координат, ось  $Z$  которой совпадает с осью соленоида, выражение для этой компоненты примет следующий вид:

$$A_{\theta sol}(r, z) = j_{sol} \times \int_{Z_1}^{Z_2} \int_{R_1}^{R_2} \left( \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \frac{r' \cos(\vartheta)}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos(\vartheta) + r'^2 + (z - z')^2}} d\vartheta \right) \times dr' dz', \quad (20)$$

где цилиндрические координаты точки наблюдения и текущей точки в объеме соленоида полагаются равными  $\vec{r} = (r, 0, z)$  и  $\vec{r}' = (r', \vartheta, z')$  соответственно;  $R_1$  и  $R_2$  – внутренний и наружный радиусы соленоида;  $Z_1$  и  $Z_2$  – аксиальные координаты левого и правого торца соленоида;  $j_{sol} = I \cdot w / ((R_2 - R_1) \cdot (Z_2 - Z_1))$  – плотность тока в соленоиде при токе в витке  $I$  и числе витков  $w$ .

В формуле (21) выделенный в скобках интеграл по азимуту совпадает с векторным потенциалом бесконечно тонкого кольца с единичным током, который далее обозначается

через  $A_{ring}(r, z, r', z')$  и описывается следующей известной формулой:

$$A_{ring}(r, z, r', z') = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{r'}{r}} \cdot \left[ \left( \frac{2}{k} - k \right) \cdot K(k) - \frac{2}{k} \cdot E(k) \right]. \quad (21)$$

Здесь  $K(k)$  и  $E(k)$  – полные эллиптические интегралы первого и второго рода от аргумента  $k = \sqrt{4r \cdot r' / ((r + r')^2 + (z - z')^2)}$ .

Используя данную формулу, остальное интегрирование по сечению соленоида в соответствии с формулой (21) производится численно.

Особо следует отметить случай, когда точка наблюдения находится внутри сечения соленоида или очень близко к нему. В этом случае при расчете векторного потенциала соленоида резко падает точность численного интегрирования по его сечению вследствие стремления аргумента эллиптических интегралов в формуле (22) к единице, а самих интегралов к бесконечности. Для повышения точности численного интегрирования при расчете векторного потенциала соленоида внутри и вблизи его сечения нами разработан следующий алгоритм выделения особенности подынтегральной функции в формуле (21), описываемой формулой (22).

Легко показать, что вблизи кольца с током его векторный потенциал, описываемый формулой (22), будет стремиться к векторному потенциалу прямолинейной бесконечной нити с единичным током, то есть

$$\tilde{A}_{ring}(r, z, r', z') = \frac{1}{c} \ln \left[ (r - r')^2 + (z - z')^2 \right]. \quad (22)$$

Здесь введено обозначение  $\tilde{A}_{ring}$  для приближенного значения векторного потенциала кольца при условии  $(r - r')^2 + (z - z')^2 \ll r'^2$ . Для повышения точности численного интегрирования исходная формула (21) переписывается в следующем виде:

$$A_{\theta sol}(r, z) = j_{sol} \times \int_{Z_1}^{Z_2} \int_{R_1}^{R_2} \left[ A_{ring}(r, z, r', z') - \tilde{A}_{ring}(r, z, r', z') \right] \times$$

$$\times dr' dz' + \left. \int_{Z_1}^{Z_2} \int_{R_1}^{R_2} \tilde{A}_{ring}(r, z, r', z') dr' dz' \right\}. \quad (23)$$

В формуле (24) подынтегральная функция первого двойного интеграла особенностей уже не имеет, и этот интеграл с высокой точностью рассчитывается численно, а второй двойной интеграл берется аналитически и описывается следующей формулой:

$$\begin{aligned} & \int_{Z_1}^{Z_2} \int_{R_1}^{R_2} \tilde{A}_{ring} dr' dz' = \\ & = \left\{ (r-r') \cdot (z-z') \cdot \ln \left[ (r-r')^2 + (z-z')^2 \right] - \right. \\ & - 3 \cdot (r-r') \cdot (z-z') + (r-r')^2 \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{(z-z')}{(r-r')} \right) + \\ & \left. + (z-z')^2 \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{(r-r')}{(z-z')} \right) \right\} \Big|_{R_1}^{R_2} \Big|_{Z_1}^{Z_2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Разработанные алгоритмы численного расчета векторного потенциала поверхностных токов и объемного тока соленоида позволили нам существенно упростить алгоритм и повысить точность расчета потокосцепления, а значит, и индуктивности соленоида. Из определения векторного потенциала следует, что поток магнитного поля через любой замкнутый контур можно вычислить как интеграл вдоль контура от касательной к контуру компоненты векторного потенциала. Из этого следует, что потокосцепление соленоида можно вычислить через интеграл по объему соленоида от векторного потенциала по следующей формуле:

$$\Psi_{sol} = \frac{w}{S_{sol}} \int_{Z_1}^{Z_2} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} A_\theta(r, \theta, z) \cdot r d\theta dr dz, \quad (25)$$

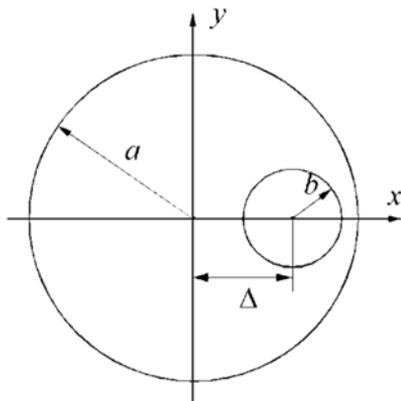


Рис. 1. Поперечное сечение соленоида с проводящим цилиндрическим стержнем, расположенным вне оси соленоида

где  $(r, \theta, z)$  – локальная цилиндрическая система координат соленоида,  $A_\theta$  – азимутальная компонента векторного потенциала в этой системе,  $w$  – число витков соленоида,  $S_{sol} = (R_2 - R_1) \cdot (Z_2 - Z_1)$  – площадь поперечного сечения соленоида.

Описанные в данном разделе алгоритмы и формулы позволили реализовать в уже существовавшей программе MAGEL3D, исходно предназначенной для расчета только стационарных трехмерных электромагнитных полей, также возможность моделирования трехмерных квазистационарных полей в приближении сильного скин-эффекта с использованием описанного метода граничных интегральных уравнений.

### Примеры расчета модельных и реальных систем формирования квазистационарных электромагнитных полей

#### Внеосевой цилиндрический стержень внутри соленоида

В качестве первого примера нами рассчитывалась модельная задача о бесконечно длинном проводящем цилиндрическом стержне, расположенном вне оси бесконечно длинного соленоида так, что оси стержня и соленоида параллельны (рис. 1).

На рис. 1  $a$  и  $b$  – радиусы соленоида и цилиндра соответственно,  $\Delta$  – расстояние между осями цилиндра и соленоида. Ток в соленоиде меняется во времени по синусоидальному закону с такой частотой, что толщиной скин-слоя в цилиндре можно пренебречь. Т. Д. Ахметовым и А. А. Ивановым найдено аналитическое решение данной задачи<sup>1</sup>, которое для компонент квазистационарного электрического поля имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} E_x = & -\frac{y}{2} \cdot \left( 1 - \frac{b^2}{(x-\Delta)^2 + y^2} \right) + \\ & + b^2 \cdot \Delta \cdot \frac{(x-\Delta) \cdot y}{\left( (x-\Delta)^2 + y^2 \right)^2}, \end{aligned}$$

<sup>1</sup> См.: Ахметов Т. Д., Иванов А. А. Экранирование соленоидального электрического поля экраном Фарадея в двумерном случае (в печати).

$$E_y = \frac{x}{2} \cdot \left( 1 - \frac{b^2}{(x-\Delta)^2 + y^2} \right) + b^2 \cdot \Delta \cdot \frac{y^2}{((x-\Delta)^2 + y^2)^2} \quad (26)$$

На рис. 2 показаны силовые линии квазистационарного электрического поля, построенные по формулам (27) при заданном  $\Delta = 50$  мм и двух радиусах цилиндра 10 и 25 мм. Силовые линии на рис. 2 построены с постоянным шагом по векторному потенциалу, и их густота прямо пропорциональна напряженности электрического поля.

На рис. 3 показано распределение напряженности квазистационарного электрического поля на поверхности проводящего

цилиндрического стержня, расположенного внутри соленоида на расстоянии  $\Delta = 50$  мм от его оси. Здесь сплошной линией показано распределение поля, рассчитанное аналитически по формулам (27), и кружками приведены полученные в численных расчетах значения электрического поля в центрах треугольных элементов при аппроксимации цилиндрической поверхности по азимуту  $N_\varphi = 32$  прямоугольниками, каждый из которых разбивался двумя диагоналями на треугольные элементы. Величина электрического поля нормирована на значение поля на расстоянии  $\Delta$  от оси при отсутствии цилиндра. Расчеты проводились при радиусах цилиндра 10 и 25 мм.

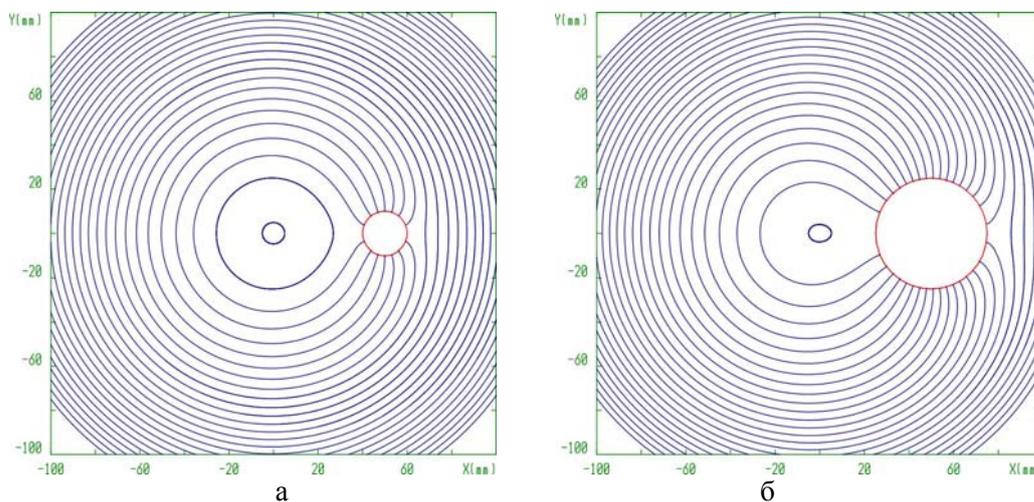


Рис. 2. Аналитически рассчитанные силовые линии квазистационарного электрического поля (синий цвет) для проводящего цилиндрического стержня (красный цвет), расположенного внутри соленоида на расстоянии  $\Delta = 50$  мм от его оси: а – радиус цилиндра  $b = 10$  мм; б – радиус цилиндра  $b = 25$  мм

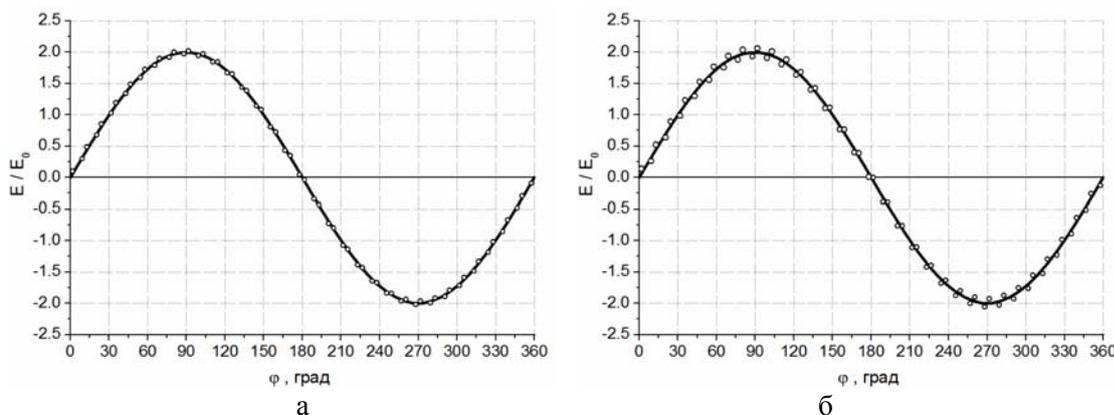


Рис. 3. Аналитическое (сплошные линии) и численное (кружки) распределение напряженности квазистационарного электрического поля на поверхности проводящего цилиндрического стержня, расположенного внутри соленоида на расстоянии  $\Delta = 50$  мм от его оси: а – радиус цилиндра  $b = 10$  мм; б – радиус цилиндра  $b = 25$  мм

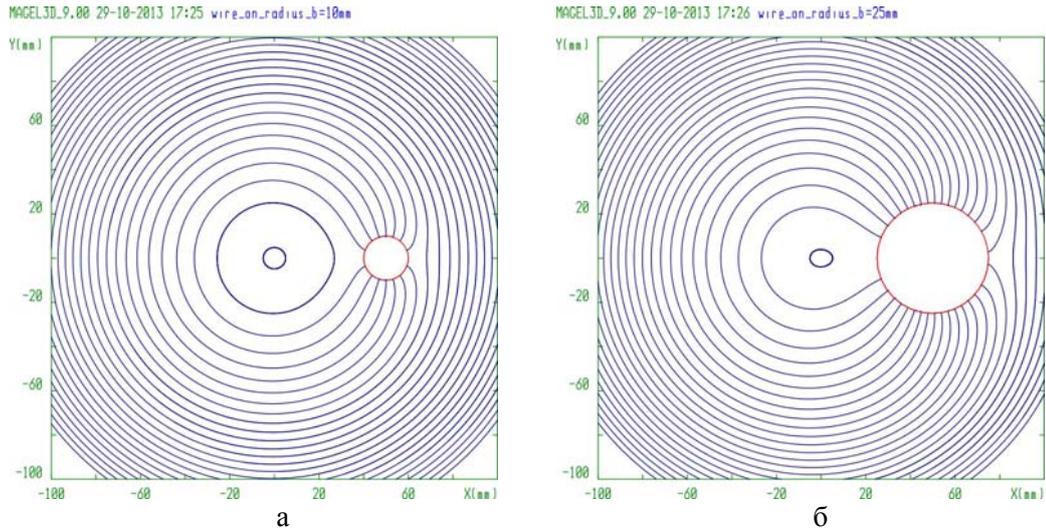


Рис. 4. Полученные в численных расчетах силовые линии квазистационарного электрического поля (синий цвет) для проводящего цилиндрического стержня (красный цвет), расположенного внутри соленоида на расстоянии  $\Delta = 50$  мм от его оси:  $a$  – радиус цилиндра  $b = 10$  мм;  $b$  – радиус цилиндра  $b = 25$  мм

При численных расчетах использовался описываемый в данной работе метод граничных интегральных уравнений для расчета трехмерных квазистационарных полей в приближении сильного скин-эффекта. Видно, что численные результаты в среднем совпадают с аналитическими расчетами. Их отклонения симметричны и объясняются тем, что поверхность цилиндра в численных расчетах моделируется многогранником. Этим же объясняются большие отклонения электрического поля при большем радиусе цилиндра.

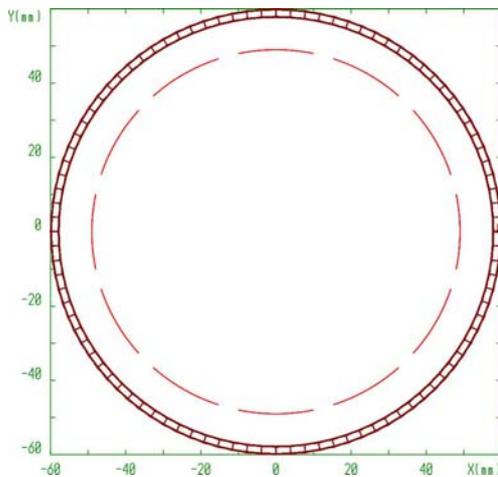


Рис. 5. Поперечное сечение бесконечно длинного соленоида (темно-красный цвет) с бесконечно тонким экраном Фарадея, состоящим из  $N = 12$  бесконечно длинных цилиндрических проводящих пластин (ярко-красный цвет)

На рис. 4 показаны полученные в численных расчетах при числе разбиений по азимуту  $N_\varphi = 32$  силовые линии квазистационарного электрического поля при заданном параметре  $\Delta = 50$  мм и двух радиусах цилиндра 10 и 25 мм. Видно, что построенные таким образом силовые линии хорошо совпадают с силовыми линиями, рассчитанными по аналитическим формулам (27) и показанными на рис. 2.

#### *Модельный бесконечно тонкий экран Фарадея*

В качестве второго примера нами рассчитывалась модельная задача о бесконечно тонком и бесконечно длинном экране Фарадея, помещенном в бесконечно длинный соленоид (рис. 5). Ток в соленоиде меняется во времени по синусоидальному закону с такой угловой частотой  $\omega$ , что толщиной скин-слоя в экране можно пренебречь по сравнению с поперечной длиной пластин. Т. Д. Ахметовым и А. А. Ивановым найдено полуаналитическое решение данной задачи и показано, что квазистационарное электрическое поле является суперпозицией квазистационарного электрического поля соленоида без экрана и электростатического поля поверхностных зарядов на пластинах

экрана, распределенных по следующему закону<sup>2</sup>:

$$\sigma(\theta) = -\frac{E_0}{2\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{\beta} \theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{\beta} \theta_m - \sin^2 \frac{\pi}{\beta} \theta}}. \quad (27)$$

В формуле (28)  $E_0 = \frac{\omega}{c} \cdot \frac{B_s \cdot R_F}{2}$  – квазистатическое электрическое поле в соленоиде без экрана на радиусе экрана  $R_F$  при амплитуде магнитного поля соленоида равной  $B_s$ ,  $\beta = 2\pi/N$  – угловой период экрана Фарадея,  $\theta_m < \beta/2$  – максимальный полуугол раствора каждой из пластин экрана,  $-\theta_m \leq \theta \leq \theta_m$  – текущий угол вдоль первой пластины экрана, центр которой лежит в плоскости  $Y = 0$  (см. рис. 5).

Далее приводятся результаты полуаналитических и численных расчетов данной задачи при параметрах соленоида и экрана, близких к экспериментальным и приведенным в работе Т. Д. Ахметова и А. А. Иванова<sup>3</sup>:  $B_s = 75,4$  Гс,  $f = 4$  МГц,  $R_F = 49$  мм,  $N = 12$  и  $N = 14$  при фиксированной длине пластин  $L = 20$  мм. Все расчеты проводились с помощью программы MAGEL3D в приближении, что длины соленоида и экрана Фарадея много больше радиуса экрана.

При полуаналитических расчетах толщины пластин экрана и поверхностные токи на них полагались равными нулю. Поверхность каждой пластины аппроксимировалась в виде набора прямоугольников, каждый из которых разбивался двумя диагоналями на четыре треугольных элемента. Плотность поверхностных зарядов на каждом элементе полагалась постоянной. Ее значение определялось в геометрическом центре элемента по формуле (28). Поскольку распределение зарядов, описываемое формулой (28), имеет интегрируемую особенность на краях пластины при  $\theta = \pm\theta_m$ , для повышения точности расчетов производилось сгущение элементов к краям пластины по закону геометрической прогрессии. Проверялась сходимость результатов полуаналитических расчетов по числу разбиения поверхностей пластин на элемен-

ты и показателю сгущения элементов к краям пластины.

При численных расчетах использовался описываемый в данной работе метод граничных интегральных уравнений для расчета трехмерных квазистационарных полей в приближении сильного скин-эффекта. При этом пластины экрана имели конечную толщину, равную двум радиусам закругления краев пластин. Расчеты проводились при двух значениях радиуса закругления, равных 0,2 и 0,1 мм. Проверялась сходимость результатов численного моделирования по числу разбиения основных поверхностей и краев пластин на элементы.

На рис. 6 приведены значения полуаналитических расчетов (непрерывные кривые) и численного моделирования (значки) распределения квазистационарного электрического поля для  $N = 12$  (рис. 6, а, б) и  $N = 14$  (рис. 6, в, г) вдоль радиальных линий, проходящих через центр пластины при  $\theta = 0^\circ$  (рис. 6, а, в) и через центр зазора между пластинами при  $\theta = \beta/2$  (рис. 6, б, г). Из этого рисунка можно видеть, что результаты численного моделирования бесконечно тонкого экрана Фарадея приближаются к результатам полуаналитических расчетов по мере уменьшения радиуса закругления и толщины пластин.

На рис. 7 показаны силовые линии квазистационарного электрического поля, рассчитанные для  $N = 12$  (рис. 7, а, в) и  $N = 14$  (рис. 7, б, г) полуаналитически (рис. 7, а, б) и путем численного моделирования (рис. 7, в, г) при радиусе закругления пластин 0,1 мм. Данные силовые линии строились с постоянным шагом по векторному потенциалу магнитного поля, и их густота отражает напряженность электрического поля. Видно, что силовые линии, построенные полуаналитически (см. рис. 7, а, б) и путем численного моделирования (см. рис. 7, в, г), достаточно хорошо совпадают.

#### *Расчет ВЧ драйвера источника плазмы с тонким экраном Фарадея*

Для демонстрации возможностей предлагаемого метода граничных интегральных уравнений нами в приближении сильного скин-эффекта был проведен расчет реальной системы формирования квазистационарного электромагнитного поля – ВЧ драйвера ис-

<sup>2</sup> Ахметов Т. Д., Иванов А. А. Экранирование соленоидального электрического поля...

<sup>3</sup> Там же.

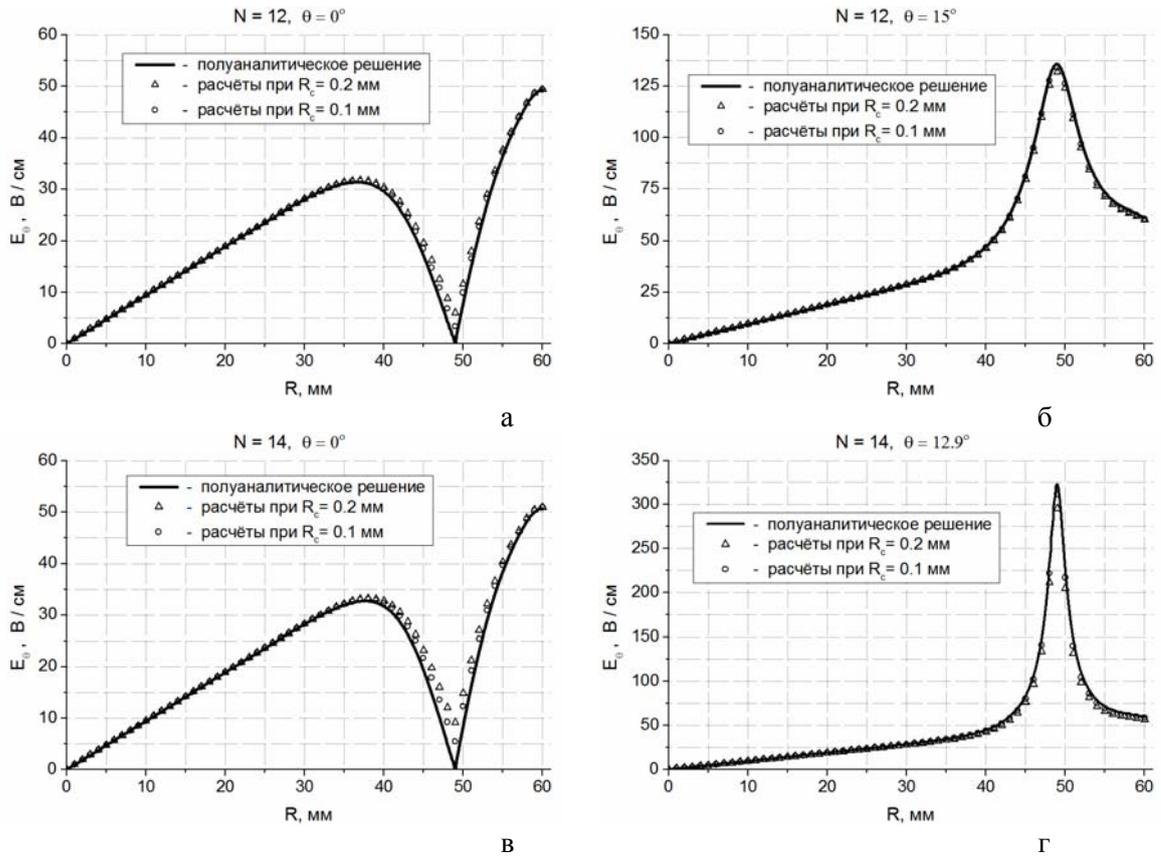


Рис. 6. Полуаналитическое (непрерывные кривые) и численное (значки) распределение квазистационарного электрического поля в модельном экране Фарадея вдоль радиальных линий при  $\theta = 0$  (а, в) и при  $\theta = \beta/2$  (б, г): а и б –  $N = 12$ ; в и г –  $N = 14$

точника плазмы с тонким экраном Фарадея [1], общий вид которого показан на рис. 8. Система состоит из короткой катушки индуктивности ( $I$ ), подсоединенной к ВЧ контуру, и экрана Фарадея с внутренним радиусом 146 мм и толщиной 1 мм (2), имеющего 40 продольных разрезов длиной 97,5 мм и шириной 3 мм. Катушка и экран располагаются между проводящими диском и кольцом (3).

Ток в катушке с тремя витками с заданной амплитудой 150 А меняется во времени по синусоидальному закону с частотой  $f = 4$  МГц, поэтому толщина скин-слоя много меньше толщины экрана, и расчеты можно проводить в приближении сильного скин-эффекта. При численном моделировании катушка моделировалась как соленоид с толщиной намотки, равной диаметру медных трубок, из которых выполнены витки катушки. Длина соленоида принималась равной длине катушки по крайним виткам. Число витков в соленоиде принималось рав-

ным числу витков катушки, а ток считался равномерно распределенным по сечению соленоида. В расчетах к кольцу присоединялся проводящий цилиндрический стакан, для того чтобы смоделировать реальное распределение электромагнитного поля в ВЧ драйвере.

Задача состояла в проведении полного расчета системы и построении силовых линий квазистационарного магнитного и электрического полей. Кроме того, необходимо было рассчитать индуктивность соленоида с учетом наличия экрана Фарадея, а также проводящего диска и кольца и сравнить ее с измеренной в эксперименте индуктивностью катушки.

На рис. 9 представлены результаты расчетов силовых линий квазистационарного магнитного поля ВЧ драйвера источника плазмы без экрана (рис. 9, а) и с тонким экраном (рис. 9, б–г) Фарадея. Здесь темно-красными линиями показан соленоид, фиолетовыми – проводящие диск, кольцо

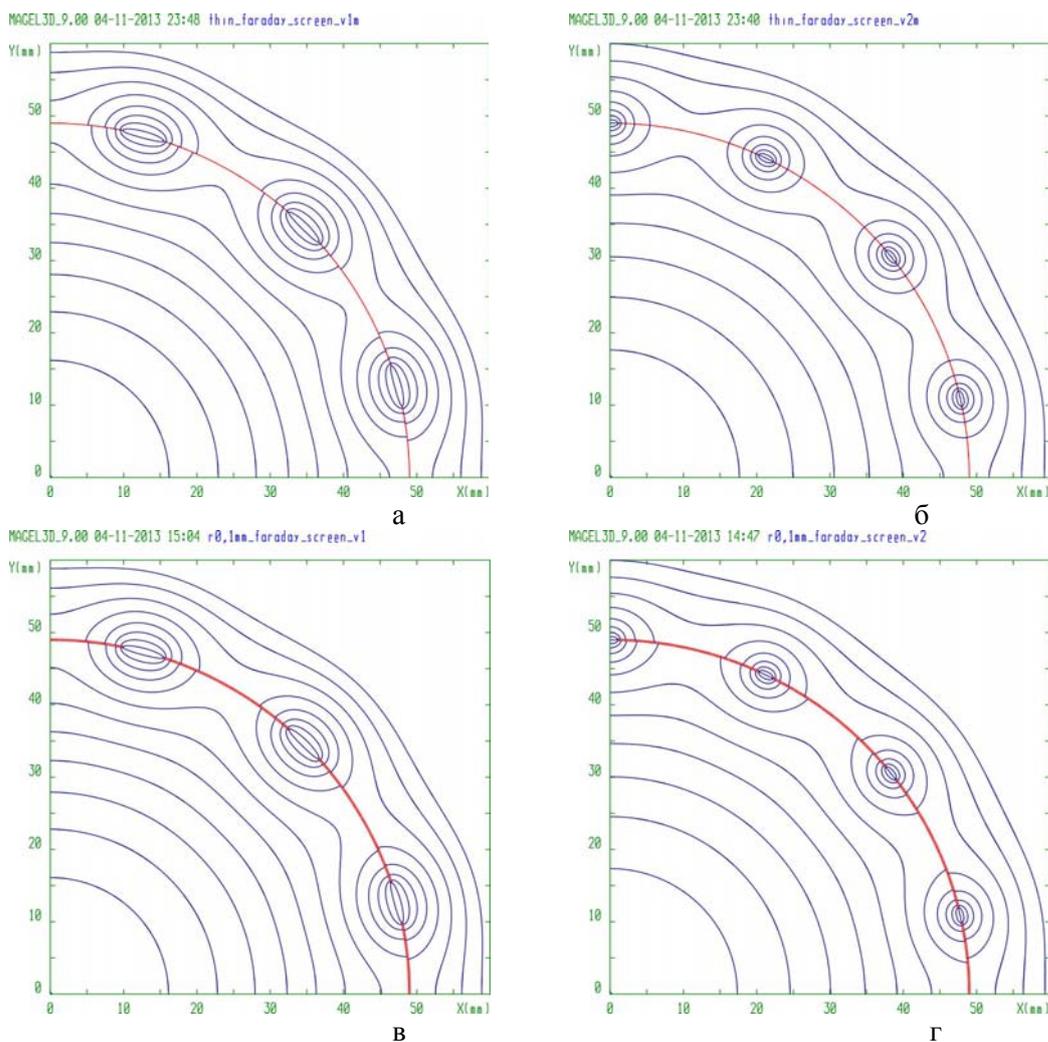


Рис. 7. Силовые линии квазистационарного электрического поля, рассчитанные полуаналитически при  $N=12$  (а) и  $N=14$  (б) и путем численного моделирования при  $N=12$  (в) и  $N=14$  (г) при радиусе закругления пластин 0,1 мм

и экран Фарадея, зелеными – силовые линии магнитного поля.

На рис. 9, а–в силовые линии стартуют с центральной плоскости соленоида  $Z = 54$  мм на расстоянии от оси  $Z$ , меняющимся в диапазоне от 200 до 500 мм таким образом, чтобы между линиями сохранялся постоянный шаг по магнитному потоку. В результате густота силовых линий отражает напряженность магнитного поля. На рис. 9, б, в силовые линии строились в  $RZ$  плоскостях, проходящих через центр разреза в экране и центр пластины экрана соответственно.

Из рис. 9, а–г можно видеть, что наличие экрана Фарадея приводит к выталкиванию силовых линий магнитного поля в зазор между пластинами экрана и в пространство между экраном и катушкой индуктивности. Особенно это видно, если сравнить рис. 9, б с рис. 9, в. Как проникают силовые линии

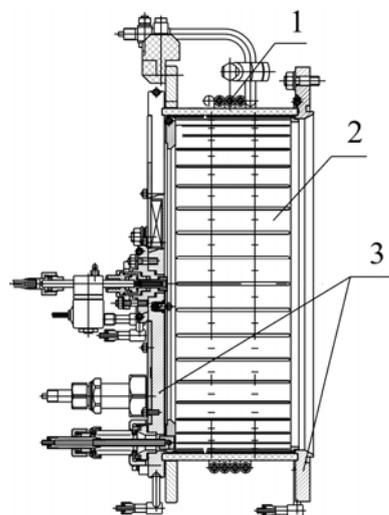


Рис. 8. Общий вид ВЧ драйвера источника плазмы с тонким экраном Фарадея: 1 – катушка с током; 2 – экран Фарадея толщиной 1 мм с 40 продольными разрезами, 3 – проводящие диск и кольцо

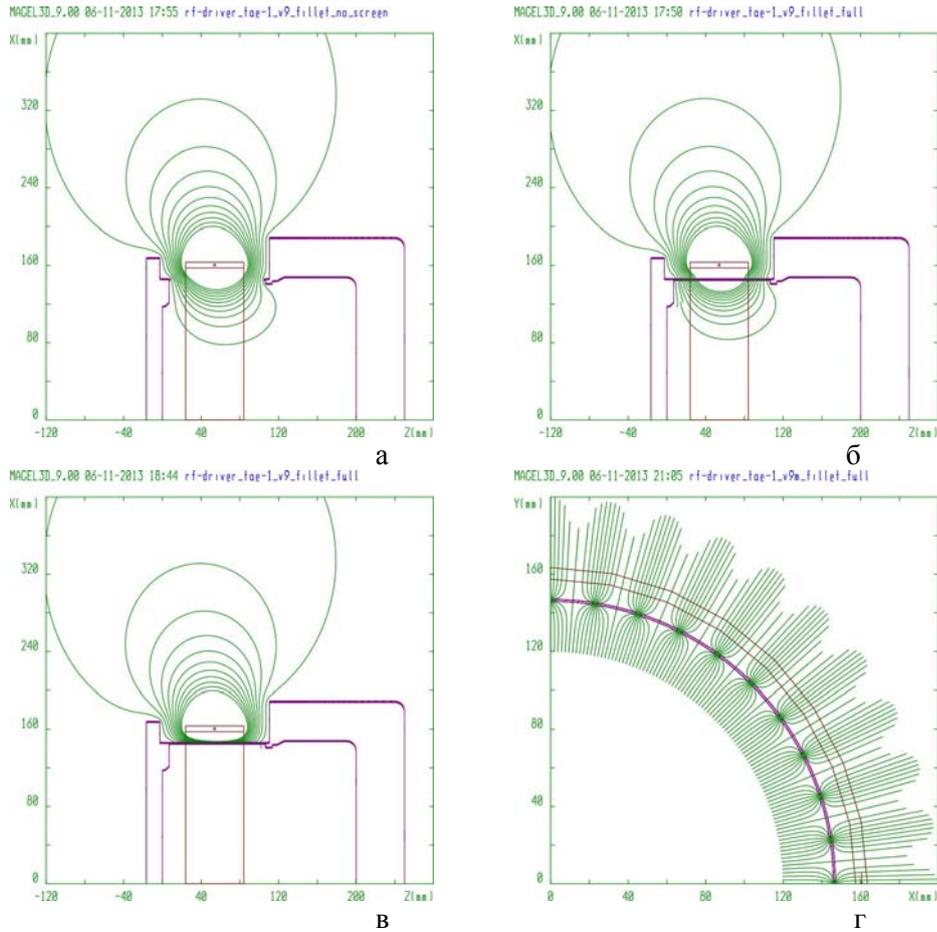


Рис. 9. Результаты расчетов силовых линий квазистационарного магнитного поля ВЧ драйвера источника плазмы без экрана (а) и с тонким экраном Фарадея (б–г): б – ZX проекция линий, расположенных в плоскости RZ, проходящей через центр разреза в экране; в – ZX проекция линий, расположенных в плоскости RZ, проходящей через центр пластины экрана; г – XY проекция линий, стартующих с радиуса 120 мм в центральной плоскости соленоида (темно-красные линии – соленоид; фиолетовые – проводящие диск, кольцо со стаканом и экран Фарадея; зеленые – силовые линии магнитного поля)

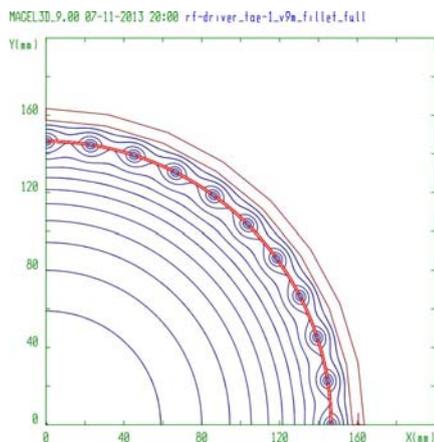


Рис. 10. Расчетные силовые линии квазистационарного электрического поля ВЧ драйвера источника плазмы с тонким экраном Фарадея (линии синего цвета), лежащие в центральной XY плоскости соленоида. Сечение соленоида показано темно-красными линиями, сечение пластин экрана Фарадея показано ярко-красными линиями

магнитного поля сквозь экран Фарадея, хорошо видно на рис. 9, г, где показана XY проекция силовых линий, стартующих с радиуса 120 мм в центральной плоскости соленоида.

На рис. 10 представлены рассчитанные силовые линии квазистационарного электрического поля ВЧ драйвера источника плазмы с тонким экраном Фарадея, лежащие в центральной плоскости соленоида. Силовые линии стартуют на расстоянии от оси Z, меняющемся в диапазоне от 0 до 155 мм таким образом, чтобы между линиями сохранялся постоянный шаг по векторному потенциалу магнитного поля. В результате густота силовых линий отражает напряженность электрического поля.

На рис. 11 показаны расчетные зависимости от радиуса квазистационарных магнитно-

го (рис. 11, а) и электрического (рис. 11, б) полей ВЧ драйвера источника плазмы с тонким экраном Фарадея в центральной плоскости катушки индуктивности. Здесь непрерывными и точечными линиями показаны зависимости полей вдоль радиальных линий, проходящих через центр зазора в экране Фарадея и центр пластины экрана соответственно. Для сравнения пунктирными линиями на этом рисунке показаны радиальные зависимости полей без экрана Фарадея.

Рис. 11, а очень хорошо показывает, что наличие экрана Фарадея приводит к концентрации квазистационарного магнитного поля в пространстве между экраном и катушкой индуктивности. Также видно, что

вихревые токи в экране Фарадея приводят к заметному ослаблению магнитного поля внутри экрана по сравнению с расчетами без экрана (пунктирная линия на рис. 11, а). Вследствие этого при наличии экрана Фарадея также уменьшается квазистационарное электрическое поле внутри экрана (пунктирная и непрерывная линии на рис. 11, б). Одновременно непрерывная линия на рис. 11, б показывает, что электрическое поле усиливается в зазоре между пластинами примерно в три раза по сравнению с полем без экрана. Точечная линия на рис. 11, б показывает, что на радиальной линии, проходящей через центр пластины экрана, квазистационарное электрическое поле, как и следовало ожидать, заметно ослабевает вблизи пластины.

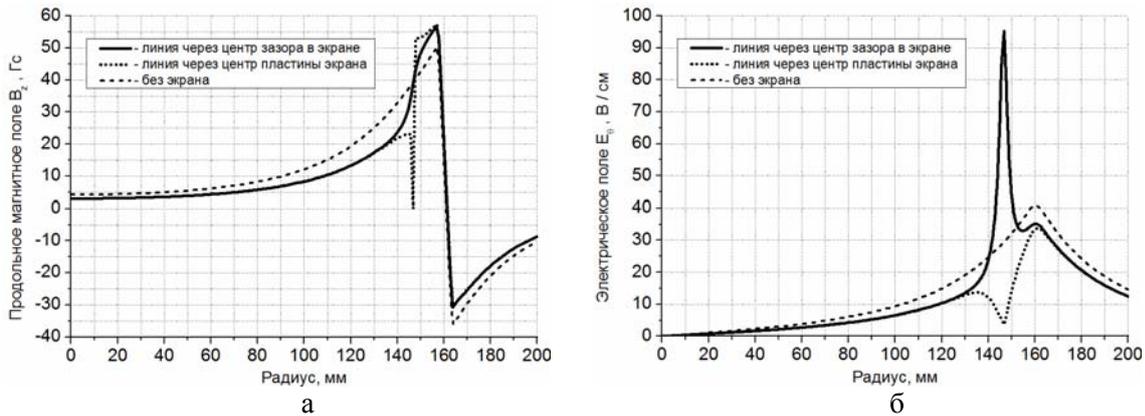


Рис. 11. Расчетные зависимости от радиуса квазистационарных магнитного (а) и электрического (б) полей ВЧ драйвера источника плазмы с тонким экраном Фарадея в центральной плоскости катушки индуктивности

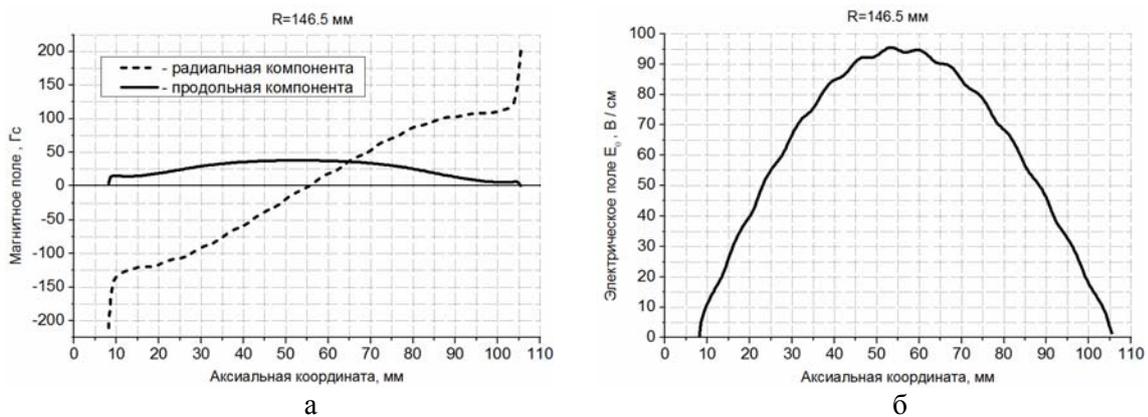


Рис. 12. Расчетные зависимости квазистационарных магнитного (а) и электрического (б) полей ВЧ драйвера источника плазмы с тонким экраном Фарадея вдоль центральной линии зазора в экране Фарадея

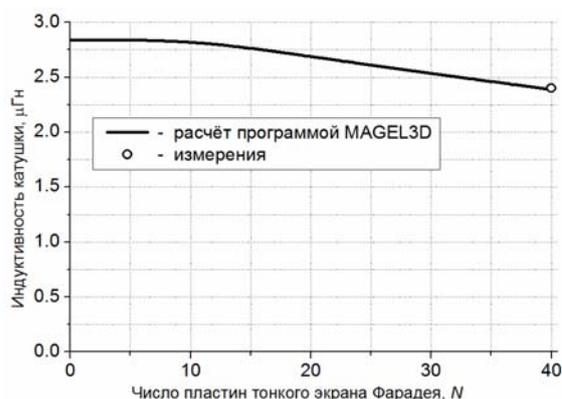


Рис. 13. Расчетная зависимость индуктивности катушки ВЧ драйвера источника плазмы с тонким экраном Фарадея от числа пластин  $N$  в экране (непрерывная кривая) и измеренная в эксперименте индуктивность катушки при наличии экрана с  $N = 40$  (кружок)

На рис. 12 показаны расчетные зависимости квазистационарных магнитного и электрического полей ВЧ драйвера источника плазмы с тонким экраном Фарадея вдоль центральной линии зазора в экране при радиусе 146,5 мм. Аксиальная координата этой линии меняется в диапазоне от 8 до 105,5 мм. Видно, что продольная компонента магнитного поля и азимутальная компонента электрического поля максимальны в центре зазора и близки к нулю на его краях. И наоборот, радиальная компонента магнитного поля достигает своего минимума и максимума на краях зазора и обнуляется в его центре (пунктирная линия на

рис. 12, а). Наличие биений в приведенных кривых объясняется тем, что продольный размер поверхностных треугольных элементов, описывающих численное распределение поверхностных токов и зарядов на пластинах экрана Фарадея, много больше зазора между пластинами.

Также была рассчитана зависимость индуктивности катушки ВЧ драйвера от числа  $N$  равномерно расставленных по азимуту пластин в экране Фарадея при неизменных геометрии и размерах пластин, показанных на рис. 10 ярко-красными линиями. Полученная зависимость представлена на рис. 13 непрерывной кривой, кружком показана измеренная в эксперименте индуктивность катушки при наличии экрана с  $N = 40$ . Видно, что рассчитанная и измеренная с таким экраном величины индуктивности совпадают с хорошей точностью.

#### *Расчет ВЧ драйвера источника плазмы с толстым экраном Фарадея*

Для демонстрации возможностей предлагаемого метода граничных интегральных уравнений нами в приближении сильного скин-эффекта также был проведен расчет ВЧ драйвера источника плазмы с толстым экраном Фарадея [2] (рис. 14).

Система состоит из короткой катушки индуктивности (1), подсоединенной к ВЧ контуру, и экрана Фарадея (2) с внутренним радиусом 92 мм и толщиной 7 мм, имеюще-

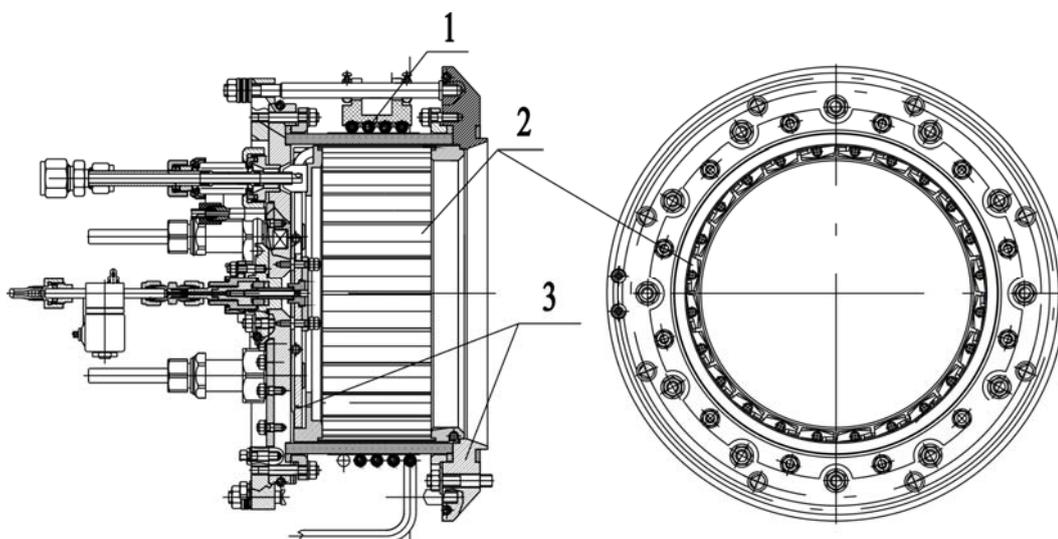


Рис. 14. Общий вид ВЧ драйвера источника плазмы с толстым экраном Фарадея: 1 – катушка с током; 2 – экран Фарадея толщиной 7 мм с 24 продольными разрезами; 3 – проводящие диск и кольцо

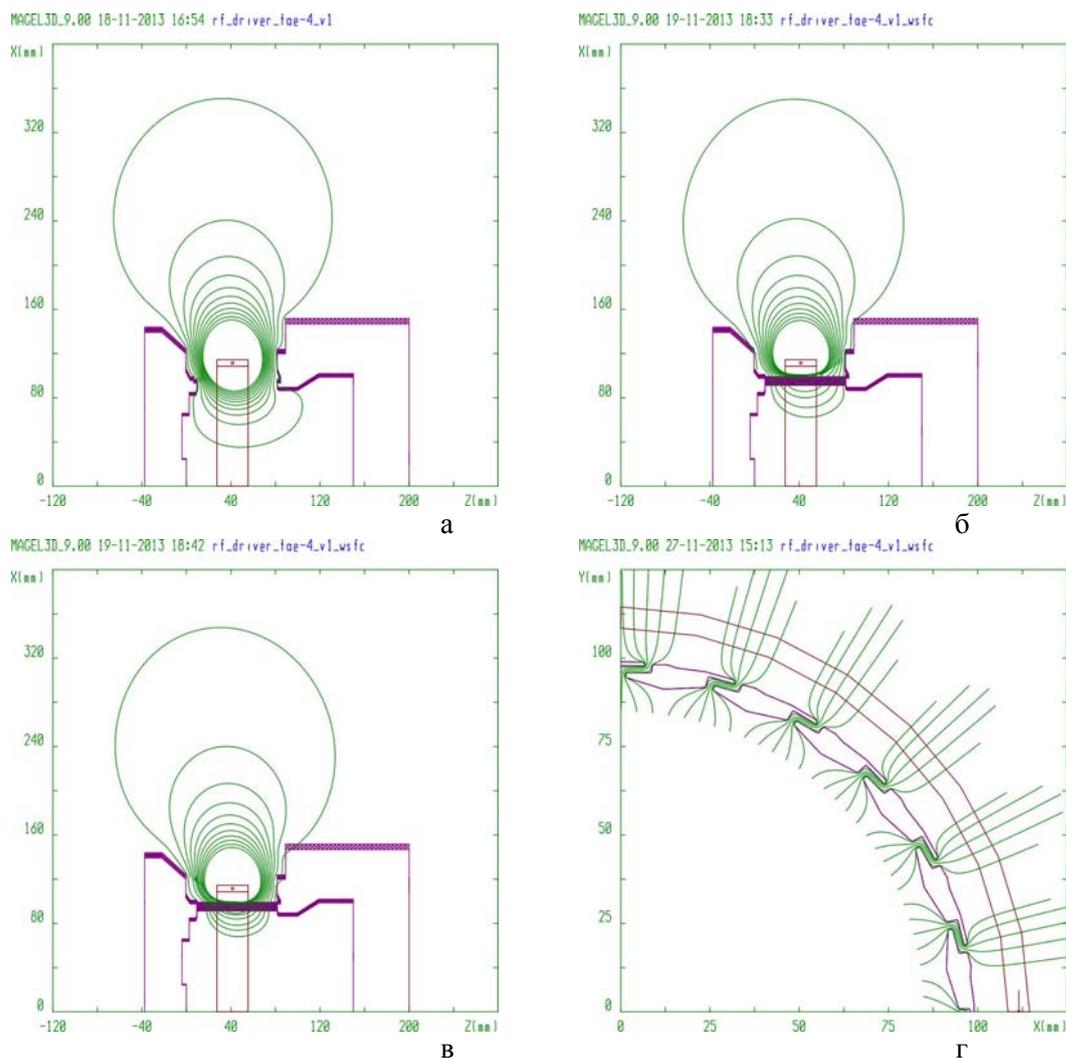


Рис. 15. Результаты расчетов силовых линий квазистационарного магнитного поля ВЧ драйвера источника плазмы при отсутствии (а) и наличии (б–г) толстого экрана Фарадея: б – ZX проекция линий, стартующих снаружи экрана из плоскости RZ, проходящей через центр внутреннего разреза в экране; в – ZX проекция линий, стартующих снаружи экрана из плоскости RZ, в которой пластина экрана имеет максимальную толщину; г – XY проекция линий, стартующих с радиуса 85 мм в центральной плоскости соленоида (темно-красные линии – соленоид; фиолетовые – проводящие диск, кольцо со стаканом и экран Фарадея; зеленые – силовые линии магнитного поля)

го 24 продольных разреза фигурной формы длиной 72 мм и шириной 2 мм. Катушка и экран располагаются между проводящими диском и кольцом (3). В расчетах к кольцу присоединялся проводящий цилиндрический стакан, для того чтобы смоделировать реальное распределение электромагнитного поля в ВЧ драйвере. Ток в катушке с тремя витками имеет заданную амплитуду 170 А и меняется во времени по синусоидальному закону с частотой  $f = 4$  МГц.

На рис. 15 представлены результаты расчетов силовых линий квазистационарного магнитного поля ВЧ драйвера источника плазмы с толстым экраном Фарадея. Расчеты

проводились без экрана (рис. 15, а) и при наличии толстого экрана Фарадея (рис. 15, б–г). Здесь темно-красными линиями показан соленоид, фиолетовыми – проводящие диск, кольцо и экран Фарадея, зелеными – силовые линии магнитного поля.

На рис. 15, а–в силовые линии стартуют с центральной плоскости соленоида на расстоянии от оси Z 41,5 мм, меняющемся в диапазоне от 150 до 350 мм таким образом, чтобы между линиями сохранялся постоянный шаг по магнитному потоку. В результате густота силовых линий отражает напряженность магнитного поля. На рис. 15, б, в силовые линии стартовали в RZ плоскостях,

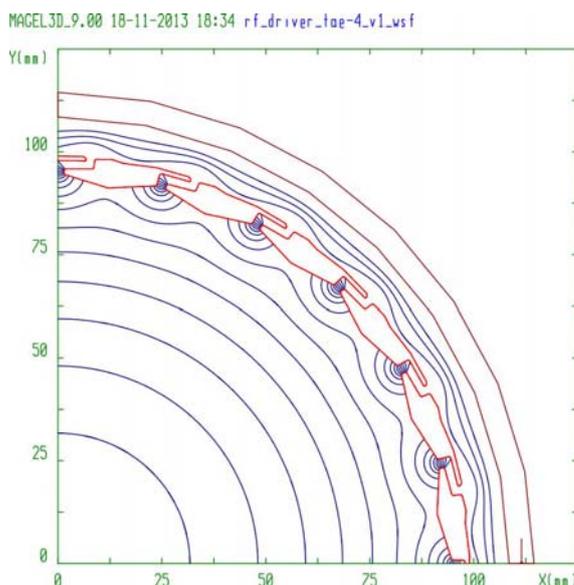


Рис. 16. Расчетные силовые линии квазистационарного электрического поля ВЧ драйвера источника плазмы с толстым экраном Фарадея (линии синего цвета), лежащие в центральной  $XY$  плоскости соленоида. Сечение соленоида показано темно-красными линиями, сечение пластин экрана Фарадея – ярко-красными

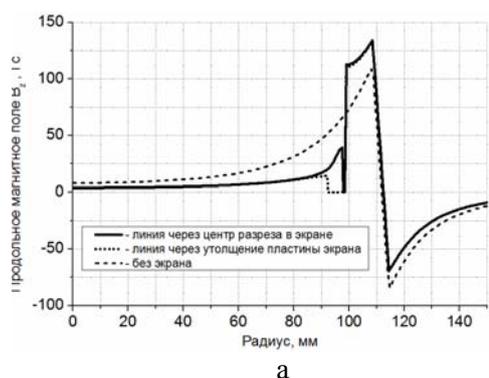
проходящих через центр внутреннего разреза в экране и плоскость максимального утолщения пластины экрана соответственно.

Из рис. 15,  $a$ – $г$  можно видеть, что наличие экрана Фарадея приводит к выталкиванию силовых линий магнитного поля в зазор между пластинами экрана и в пространство между экраном и катушкой индуктивности. Особенно это видно на рис. 15,  $г$ , где показана  $XY$  проекция сило-

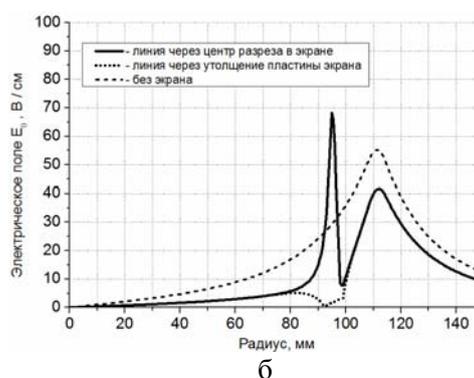
вых линий и хорошо видно, как проникают сквозь толстый экран Фарадея силовые линии магнитного поля, стартующие с радиуса 85 мм в центральной плоскости соленоида. Сравнение магнитного потока снаружи экрана на рис. 9,  $г$  и 15,  $г$  хорошо показывает, что толстый экран Фарадея сильнее выталкивает силовые линии магнитного поля в зазор между пластинами экрана и в пространство между экраном и катушкой индуктивности по сравнению с тонким экраном.

На рис. 16 представлены рассчитанные силовые линии квазистационарного электрического поля ВЧ драйвера источника плазмы с толстым экраном Фарадея, лежащие в центральной  $XY$  плоскости соленоида. Силовые линии стартуют на расстоянии от оси  $Z$ , меняющемся в диапазоне от 0 до 105 мм таким образом, чтобы между линиями сохранялся постоянный шаг по векторному потенциалу магнитного поля. В результате густота силовых линий отражает напряженность электрического поля.

На рис. 17 показаны расчетные зависимости от радиуса квазистационарных магнитного и электрического полей ВЧ драйвера источника плазмы с толстым экраном Фарадея в центральной плоскости катушки индуктивности. Здесь непрерывными и точечными линиями показаны зависимости полей вдоль радиальных линий, проходящих через центр внутреннего разреза в экране Фарадея и через плоскость максимального утолщения пластины экрана соответственно. Для сравнения пунктирными линиями на этом рисунке показаны ради-



а



б

Рис. 17. Расчетные зависимости от радиуса квазистационарных магнитного ( $a$ ) и электрического ( $б$ ) полей ВЧ драйвера источника плазмы с толстым экраном Фарадея в центральной плоскости катушки индуктивности

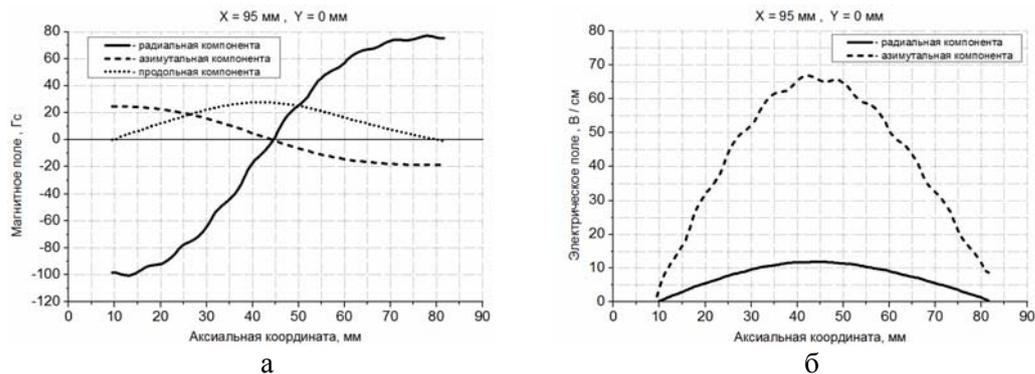


Рис. 18. Расчетные зависимости квазистационарных магнитного (а) и электрического (б) полей ВЧ драйвера источника плазмы с толстым экраном Фарадея вдоль центра внутреннего разреза в экране Фарадея при максимальном электрическом поле в центральной плоскости соленоида

альные зависимости полей без экрана Фарадея.

Рисунок 17, а очень хорошо показывает, что наличие толстого экрана Фарадея приводит к концентрации квазистационарного магнитного поля в пространстве между экраном и катушкой индуктивности. Также видно, что вихревые токи в экране Фарадея приводят к ослаблению магнитного поля внутри экрана почти в три раза по сравнению с расчетами без экрана (пунктирная линия на рис. 17, а). Вследствие этого при наличии толстого экрана Фарадея также почти в три раза уменьшается квазистационарное электрическое поле внутри экрана (пунктирная и непрерывная линии на рис. 17, б). Из сравнения рис. 11 и 17 видно, что такой параметр, как относительное ослабление полей с экраном и без экрана, для толстого экрана Фарадея примерно в два раза больше, чем для тонкого экрана.

Одновременно непрерывная линия на рис. 17, б показывает, что электрическое поле усиливается в зазоре между пластинами толстого экрана примерно в два раза по сравнению с полем без экрана (для тонкого экрана это усиление превышало три раза, см. рис. 11, б). Точечная линия на рис. 17, б показывает, что на радиальной линии, проходящей через плоскость максимального утолщения пластины экрана, квазистационарное электрическое поле, как и следовало ожидать, заметно ослабевает вблизи пластины и близко к нулю внутри нее.

На рис. 18 показаны расчетные зависимости квазистационарных магнитного и электрического полей ВЧ драйвера источ-

ника плазмы с толстым экраном Фарадея вдоль центральной линии внутреннего разреза в экране при радиусе 95 мм. Аксиальная координата этой линии меняется в диапазоне от 9,5 до 81,6 мм. На рис. 18, а, б видно, что продольная компонента магнитного поля (точечная линия на рис. 18, а), а также радиальная и азимутальная компоненты электрического поля максимальны в центральной плоскости соленоида и близки к нулю на краях разреза. И наоборот, радиальная и азимутальная компоненты магнитного поля достигают минимума и максимума на краях разреза в экране Фарадея и обнуляются в его центре (непрерывная и пунктирная линии на рис. 18, а). Наличие биений в приведенных кривых объясняется тем, что продольный размер поверхностных

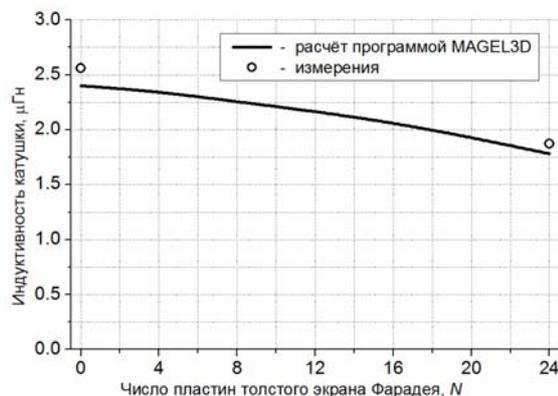


Рис. 19. Расчетная зависимость индуктивности катушки ВЧ драйвера источника плазмы с толстым экраном Фарадея от числа пластин  $N$  в экране (непрерывная кривая) и измеренная в эксперименте индуктивность катушки без экрана и с экраном при  $N = 24$  (кружки)

треугольных элементов, описывающих численное распределение поверхностных токов и зарядов на пластинах экрана Фарадея, много больше зазора между пластинами. Также была рассчитана зависимость индуктивности катушки ВЧ драйвера от числа  $N$  равномерно расставленных по азимуту пластин в толстом экране Фарадея при неизменных геометрии и размерах пластин, показанных на рис. 16 ярко-красными линиями. Полученная зависимость представлена на рис. 19 непрерывной кривой. На этом же рисунке кружком показана измеренная в эксперименте индуктивность катушки без экрана и с экраном при  $N = 24$ . Видно, что расчетные и измеренные величины индуктивности катушки отличаются менее чем на 10 %.

### Заключение

Разработан и реализован эффективный метод граничных интегральных уравнений, позволяющий проводить полный расчет систем формирования трехмерных квазистационарных электромагнитных полей в приближении сильного скин-эффекта. Проведены тестовые полные расчеты модельных и реальных систем формирования квазистационарных электромагнитных полей. Хорошее совпадение результатов расчетов с аналитическими решениями и результатами измерений показало высокую эффектив-

ность и точность разработанных и реализованных методов и алгоритмов.

Автор выражает благодарность профессору А. А. Иванову за многочисленные обсуждения и полезные замечания в ходе выполнения данной работы.

### Список литературы

1. Sorokin A., Belov V., Davydenko V., Deichuli P., Ivanov A., Podyminogin A., Shikhovtsev I., Shulzhenko G., Stupishin N., Tiunov M. Characterization of 1 MW, 40 keV, 1 s Neutral Beam for Plasma Heating // Rev. Sci. Instrum. 2010. Vol. 81. P. 02B108.
2. Belchenko Yu. I., Gorbovsky A. I., Ivanov A. A., Konstantinov S. G., Sanin A. L., Shikhovtsev I. V., Tiunov M. A. Multiaperture Negative Ion Source // 3<sup>rd</sup> International Symposium on Negative Ions, Beams and Sources (NIBS). Jyvaskyla, FINLAND, 2013. Vol. 1515. P. 167–176. DOI: 10.1063/1.4792783.
3. Леонтович М. А. О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел. // Исследования по распространению радиоволн. Сборник второй. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. С. 5–12.
4. Тозони О. В., Маергойз И. Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. Киев: Техника, 1974. 352 с.

*Материал поступил в редколлегию 14.01.2014*

**M. A. Tiunov**

*Institute of Nuclear Physics of SB RAS  
11 Lavrentiev Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation*

*michael\_tiunov@mail.ru*

### THE FULL CALCULATION OF THREE-DIMENSIONAL QUASI-STATIONARY ELECTROMAGNETIC FIELDS IN APPROACH OF THE STRONG SKIN EFFECT BY THE METHOD OF THE BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS

The efficient method of the boundary integral equations allowing to carry out the full simulation of three-dimensional quasi-stationary electromagnetic fields in approach of the strong skin effect is devised and realized. Examples of calculations of modeling and real systems of formation of quasi-stationary electromagnetic fields are given. The comparisons of results of simulation with analytical solutions and observed data are presented.

*Keywords:* the strong skin effect, the surface currents and charges, the boundary integral equations.