

УДК 535.412

**А. В. Богомягков, В. Л. Дорохов, О. И. Мешков
А. С. Польшгалов, А. Л. Щеглов**

*Институт ядерной физики им. И. Г. Будкера СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 11, Новосибирск, 633090, Россия*

*Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 633090, Россия*

*A.V.Bogomyagkov@inp.nsk.su; Dorohov_VL@mail.ru; O.I.Meshkov@inp.nsk.su
alexandr.polygalov@mail.ru; shcheglov13@gmail.ru*

ОПЫТ ЮНГА СО ЩЕЛЯМИ ПОД УГЛОМ

Предложен модифицированный вариант опыта Юнга с использованием щелей, расположенных под произвольным углом. Выполнен математический анализ предложенной схемы, показывающий, что распределение интенсивности может быть аппроксимировано гиперболической функцией. Экспериментальным путем установлено соответствие действительности с теорией. Анализ экспериментальных результатов проведен двумя разными способами обработки цифровых данных интерференционной картины. Установлен нетривиальный факт: интерференционные картины от щелей с различными (но симметричными относительно 90°) углами между ними, имеют одинаковое распределение интенсивности. Данная работа может быть расширением спектра лабораторных работ на стандартных практикумах по оптике.

Ключевые слова: опыт Юнга, интерференция, косые, наклонные щели, угол раствора, лабораторная работа по оптике.

Введение

Эксперименты по двухлучевой интерферометрии используются во многих лабораторных практикумах по оптике [1; 2]. Описания классических интерференционных опытов (билинза Бийе, бипризма Френеля, зеркало Ллойда, опыт Юнга) широко представлены в учебниках по физике [3]. Интересно, что предложенные около двухсот лет назад оптические схемы нашли применение в наши дни на таких крупных современных установках, как электрон-позитронные коллайдеры и источники синхротронного излучения. Так, зеркало Ллойда и двухщелевой интерферометр используются для измере-

ния поперечных размеров пучков электронов и позитронов [4; 5].

Интерферометр, построенный по классической схеме Юнга, позволяет при помощи достаточно простых средств экспериментально исследовать такие фундаментальные физические понятия, как время когерентности и поперечная длина когерентности [2]. Из распределения интенсивности в интерференционной картине может быть рассчитана длина волны света. Изменения в интерференционной картине достигаются варьированием расстояния между щелями, при этом стандартным заданием лабораторной работы является сравнение измеренной частоты интерференционных максимумов с расчетной¹.

¹ Wave optics for Internet. URL: <http://vsg.quasihome.com/interf.htm>

Мы предлагаем схему двухлучевой интерференции на наклонных щелях. Получающаяся интерференционная картина сравнительно просто рассчитывается аналитически и позволяет исследовать все эффекты, изучаемые в классической постановке опыта Юнга. Кроме того, возможно сравнение с теорией и формы интерференционной полосы, т. е. в регистрируемой интерференционной картине добавляется еще одно пространственное измерение.

Уравнения интерференции

Математически строгое решение задачи дифракции можно представить в виде суперпозиции сферических волн, исходящих из точек открытой плоскости $z=0$. Тогда, для произвольной точки на экране искомое решение для напряженности электрического поля может быть приведено к виду интеграла Кирхгофа [7]:

$$E_p = \frac{k}{2\pi i} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(x, y) \frac{e^{ikR}}{R} \cos \theta dx dy,$$

где \tilde{E} – комплексная амплитуда, интегрирование ведется по плоскости $z=0$, R – расстояние от элементарной площадки до

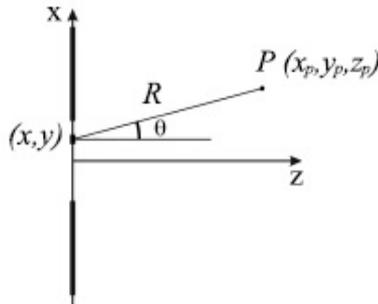


Рис. 1. Схема щелей для нахождения интеграла Кирхгофа

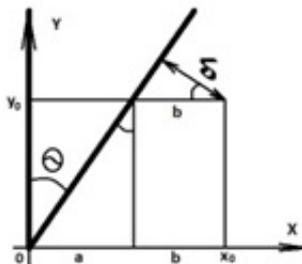


Рис. 2. Схема наклонных щелей с углом раствора θ ; (x_0, y_0, L) – координата произвольной точки на экране. L – расстояние от щелей до экрана

точки наблюдения, θ – угол между нормалью к экрану, проведенной в точке с координатами (x, y) , и прямой, соединяющей эту точку экрана с точкой наблюдения.

Однако вычисления с интегралом Кирхгофа довольно громоздки. Поэтому мы воспользуемся альтернативным способом рассчитать интенсивность поля на экране.

Выведем аналитическое представление для интерференционной картины на непараллельных щелях. Выберем систему координат (XY) так, чтобы одна из щелей совпала с осью OY , как это показано на рис. 2.

Рассчитаем интенсивность в точке (x_0, y_0) . Соответственные расстояния для набега фаз для произвольной точки от каждой щели $r_1 = \sqrt{L^2 + x_0^2}$ и $r_2 = \sqrt{L^2 + \delta^2}$. Где $\delta = x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta$. Следовательно, поля в искомой точке будут выглядеть как

$$\begin{cases} E_1 = E_0 \cos(\omega t - r_1 k) \\ E_2 = E_0 \cos(\omega t - r_2 k) \end{cases}$$

Тогда, складывая их, мы получим

$$E = 2E_0 \cos\left(\omega t - \frac{k}{2}(r_1 + r_2)\right) \cos\left(\frac{k}{2}(r_1 - r_2)\right).$$

Усреднение квадрата поля для нахождения интенсивности дает следующее выражение:

$$I = \frac{c}{4\pi} E_0^2 \left(\cos\left(\frac{k}{2}(r_1 - r_2)\right) \right)^2.$$

Теперь видно, что положение максимумов интерференции определяется аргументом косинуса

$$\frac{k}{2}(r_1 - r_2) = \pi n,$$

где $n \in Z$.

Далее, при вычислениях используется факт, что $L \gg x_0, y_0$:

$$\frac{\pi}{\lambda} \left(\sqrt{L^2 + x_0^2} - \sqrt{L^2 + \delta^2} \right) = \pi n,$$

$$\frac{\pi L}{\lambda} \left(1 + \frac{x_0^2}{2L^2} - 1 - \frac{\delta^2}{2L^2} \right) = \pi n,$$

$$\frac{1}{2\lambda L} \left(x_0^2 - (x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta)^2 \right) = n,$$

$$(y_0^2 - x_0^2) \sin \theta - 2x_0 y_0 \cos \theta = \frac{2\lambda L n}{\sin \theta}.$$

Теперь сделаем поворот системы координат в плоскости (XY) на угол $\frac{\theta}{2}$ так,

чтобы обе щели симметрично располагались относительно оси OY под углами $\theta/2$. Для этого сделаем замену

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta/2 - y' \sin \theta/2 \\ y = x' \sin \theta/2 + y' \cos \theta/2 \end{cases}$$

Далее, после замены, для удобства опускаем написание штрихованных индексов и индекса ноль.

$$\begin{aligned} & \left((x \sin \theta/2 + y \cos \theta/2)^2 - (x \sin \theta/2 - y \cos \theta/2)^2 \right) \times \\ & \times \sin \theta - 2(x \sin \theta/2 + y \cos \theta/2) \times \\ & \times (x \sin \theta/2 - y \cos \theta/2) \cos \theta = \frac{2\lambda L n}{\sin \theta}, \\ & y = \frac{\lambda L n}{x \sin \theta}. \end{aligned} \quad (1)$$

Итак, мы получили аналитическую зависимость распределений максимумов интенсивности на интерференционной картине, которые являются гиперболами.

Эксперимент

В качестве источника света во время эксперимента использовался лазер, освещающий две щели, расположенные под углом друг к другу. Щели были изготовлены из бритвенных лезвий, ширина каждой из щелей составляла 0,5 мм при длине 60 мм. По принципу Гюйгенса – Френеля каждая точка на щели является источником сферической электромагнитной волны. Эти волны интерферируют на экране, на расстоянии L от щелей. На месте экрана расположен ПЗС (прибор с зарядовой связью), т. е. матрица, подключенная к компьютеру, для считывания картины (рис. 3).

Обработка экспериментальных данных

Для щелей с углами раствора в 47 и 17° были получены следующие интерференционные картины (рис. 4). Они имеют определенный масштаб, поэтому для калибровки поверх ПЗС матрицы был наложен разлинованный лист бумаги с известными размерами. Соответственно, зная параметры матрицы (количество пикселей на каждой оси), можно определить масштабы интерференционной картины.

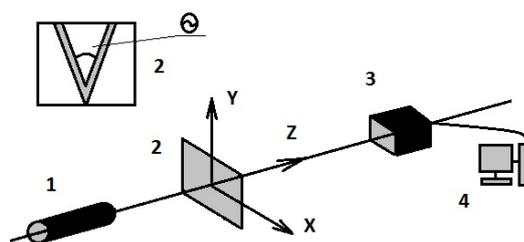


Рис. 3. Схема эксперимента: 1 – лазер; 2 – схема щелей; 3 – ПЗС матрица; 4 – компьютер

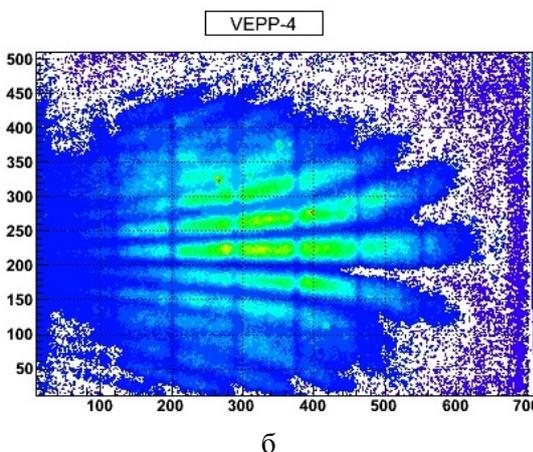
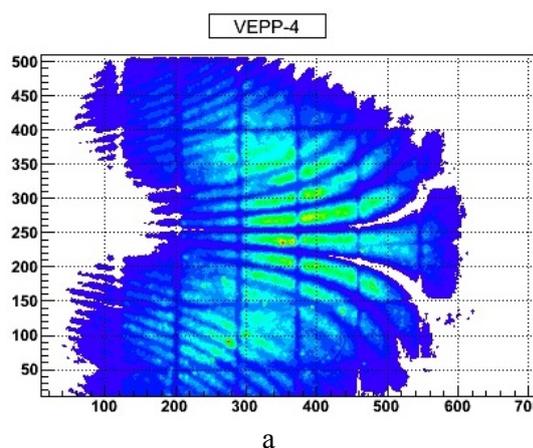


Рис. 4. Угол раствора щелей: а – 47°; б – 17° (по осям отложены пиксели)

Теперь, зная калибровку и остальные параметры условий проведения эксперимента, можно выполнить аппроксимацию максимумов ветвями гиперболы. Аппроксимация проводилась методом наложения на картину распределения интерференции нескольких порядков максимумов по формуле (1).

Подгонка осуществляется аналогично на рис. 6–8.

Затем для максимума с наилучшим по видимости совпадением, картинка обреза-

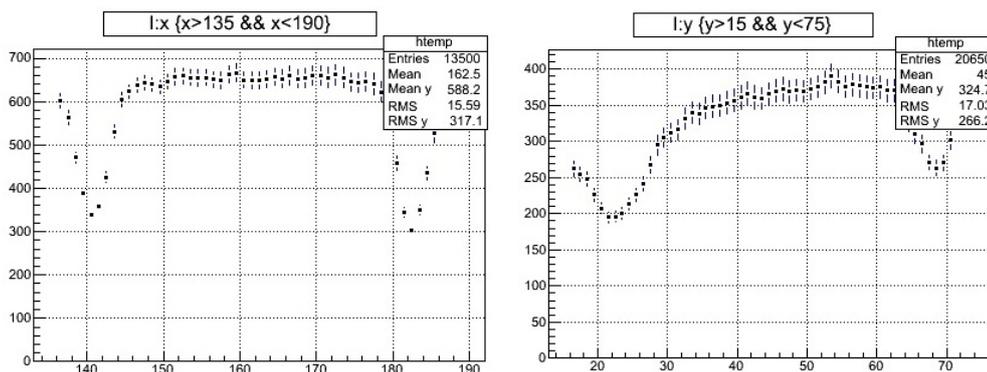


Рис. 5. Калибровочные масштабы: *a* – по оси X – $9,2 \cdot 10^3$; *b* – по оси Y – 10^4 (пиками являются линии сетчатого листа бумаги)

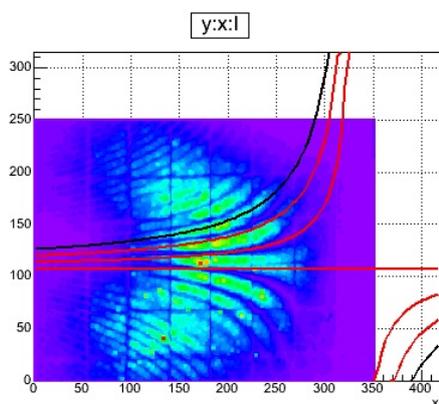


Рис. 6. Подгонка теоретических кривых к экспериментальным зависимостям

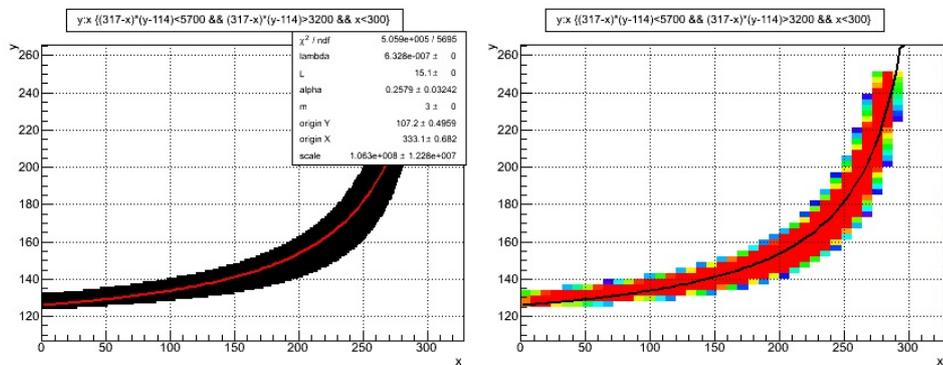


Рис. 7. Подгонка теории к данным эксперимента по выделенной области: *a* – без учета интенсивности; *b* – с учетом интенсивности

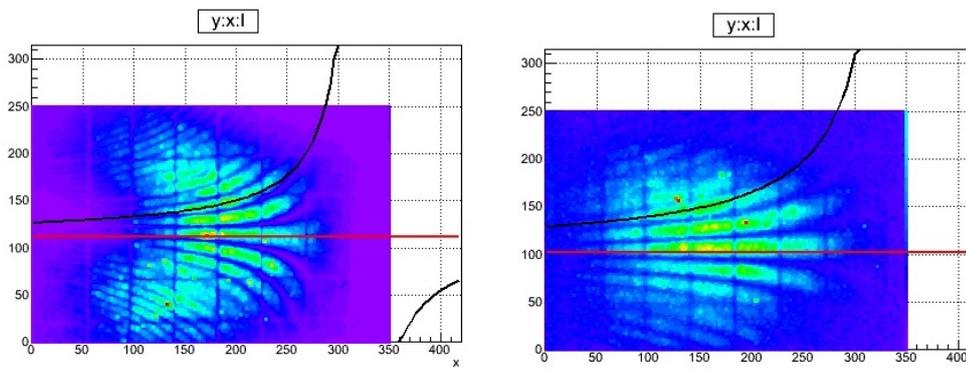


Рис. 8. Примеры максимумов интенсивности: *a* – $47,9^\circ$ на третьем порядке максимума; *b* – 17° на втором порядке максимума

лась в пределах видимого участка повышенной интенсивности. Координатная линия вдоль оси OY выбрана из симметрии. Положение оси OX и параметры угла раствора между щелями варьировались для повышения точности совпадения гипербол, полученных теоретически и в ходе эксперимента. Точно, как на рис. 7.

Так, для щелей, используемых в эксперименте, аппроксимацию полученных максимумов можно наблюдать на рис. 8.

Вычисления показывают следующие результаты: для щелей с углом 47° расчетное значение получилось равным $46 \pm 5^\circ$; а для 17° $18 \pm 3^\circ$. Причиной погрешностей являются: неточность изготовления щелей, условия проведения эксперимента и приближение линий максимумов интерференции аппроксимацией.

Также из аналитического выражения для интерференций можно заметить, что синус в знаменателе принимает равные значения для углов, симметрично отстоящих от 90° . Это означает, что картины интерференции для щелей, например, под углами в 80 и 100° должны быть одинаковыми. Поэтому была проведена еще пара опытов для щелей с углом раствора в 80 и 100° при одинаковых условиях (рис. 9).

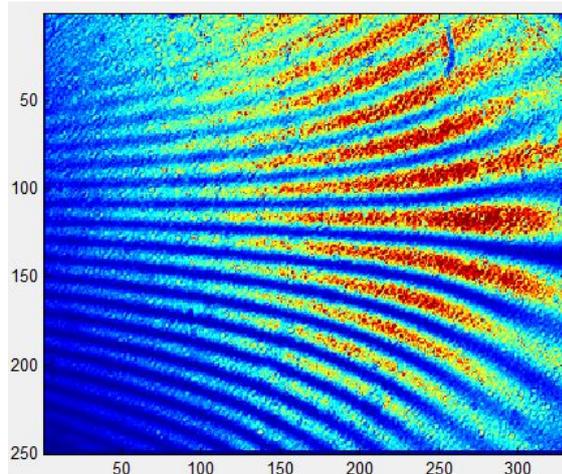
Для наглядности можно просто наложить одну картину на другую, и действительно, можно найти сходство. Рисунок 10 является результатом совмещения левой части интерференционной картины для щелей с углом 80° , и правой – с углом 100° при помощи графического редактора.

Для более тщательного анализа было произведено сравнение измеренных частот интерференционных максимумов.

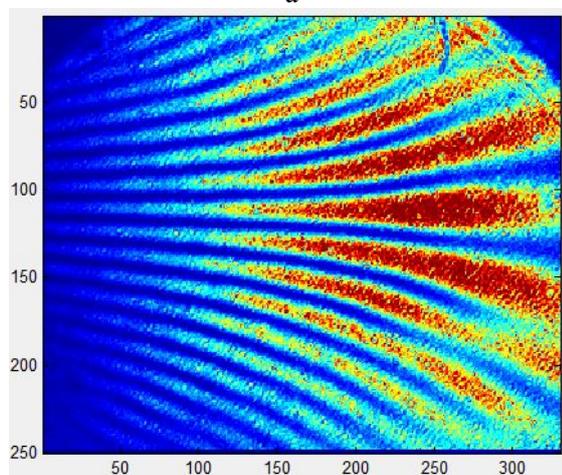
Суть метода состоит в следующем: имея интерференционную картину (рис. 11) в произвольном сечении можно построить распределения интенсивности вдоль выбранной координаты (как на рис. 12). Это дает возможность получить Фурье-образ распределения (рис. 13).

При постоянных L и d_0 (расстояние от угла вдоль биссектрисы между щелями, в случае если они выходят не из одной точки), выражение для интенсивности интерференционной картины, получаемой от щелей, расположенных под углом θ , можно записать в форме

$$I = I_0(1 + \cos(v(y) \cdot x)),$$



а



б

Рис. 9. Результат обработки распределения интенсивности в Matlab: а – для 80° ; б – для 100°

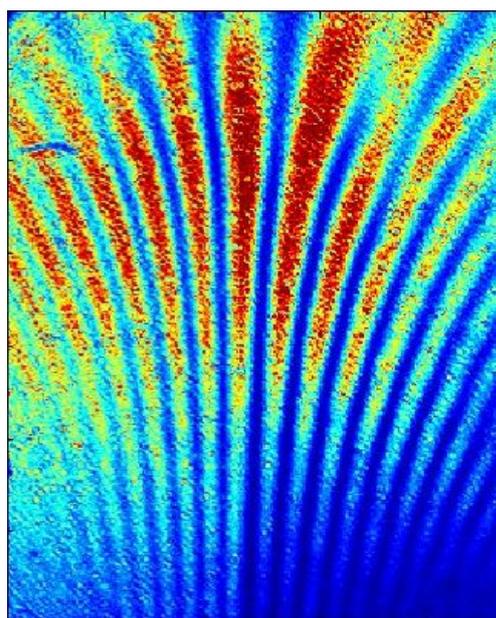


Рис. 10. Пример наложения интерференционных картин для 80 и 100°

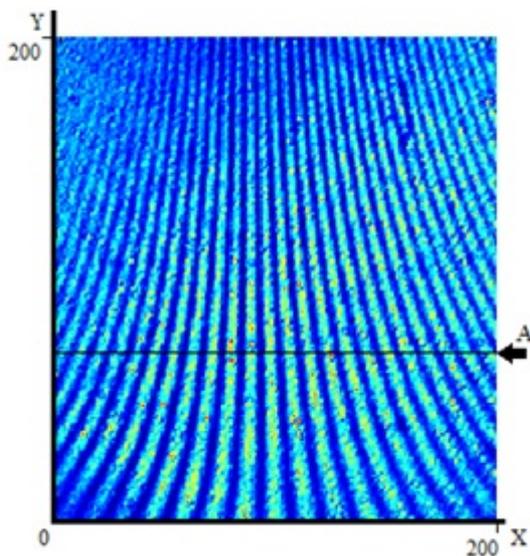


Рис. 11. Пример интерференционной картины

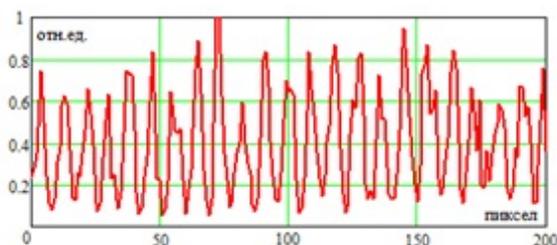


Рис. 12. Распределение интенсивности в относительных единицах в поперечном сечении

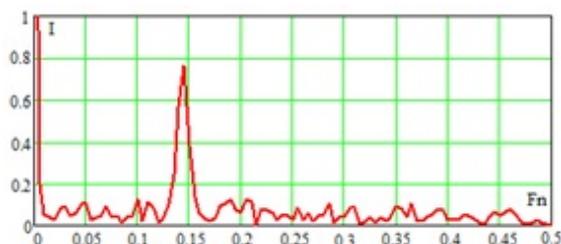


Рис. 13. Фурье-образ распределения интенсивности в поперечном сечении

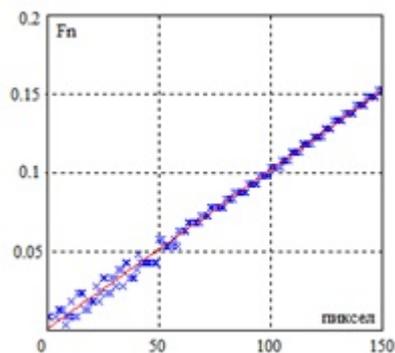


Рис. 14. Зависимость основной гармоники пространственной частоты от координаты

где, в соответствии с формулой (1),

$$v(y) = \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{y \sin \theta}{L} + \varphi \left(\frac{d_0}{L} \right) \right). \quad (2)$$

Видно, что пространственная частота $v(y)$ ($[v] = \text{см}^{-1}$) прямо пропорциональна координате y и $\sin \theta$, что и было использовано для проверки теоретически предсказанной зависимости.

Чтобы убедиться в том, что частота $v(y)$ действительно прямо пропорциональна координате Y , было применено широко используемое в алгоритмах цифровой обработки сигналов дискретное преобразование Фурье, с помощью которого по полученным экспериментально картинам интерференции определялась зависимость основной гармоники пространственной частоты v от координаты Y . Из формулы (2) видно, что эта зависимость должна описываться уравнением

$$\omega(y) = a \cdot y + b,$$

где

$$a = \frac{\pi \sin \theta}{\lambda L}, \quad b = \frac{\pi}{\lambda} \cdot \varphi \left(\frac{d_0}{L} \right).$$

Понятно, что, зная параметры установки $(L, d_0, \lambda, \theta)$ и определив наклон кривой a , можно определить длину волны излучения источника.

Для проверки зависимости $v(y)$ от угла θ коэффициент наклона кривой a был определен для нескольких значений угла раствора щелей интерферометра. Как видно из рис. 14, экспериментально полученные зависимости совпадают с рассчитанными теоретически.

Построение подобных зависимостей для щелей с угловыми растворами в 80° и 100° дает следующую картину (рис. 15).

Смещение относительно нуля по вертикальной оси как раз обусловлено свободным членом формулы (2). Но так как щели выполнены одинаковым образом, то константа смещения графиков тоже будет одинаковой. Поэтому достаточно сравнить лишь углы наклонов по аппроксимации. Сравнивая наклоны относительно оси Ox , находим, что тангенс угла наклона в обоих случаях дает значение $(-0,028)$. Совпадение до третьего порядка подтверждает факт одинаковости интерференционных картин, который на первый взгляд кажется совершенно нетривиальным.

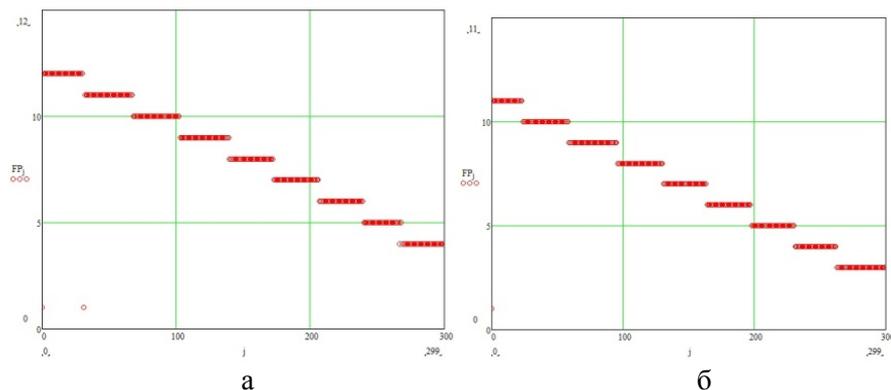


Рис. 15. Примеры зависимостей пространственной частоты от координаты:
а – для 80° ; б – для 100°

Заключение

Предложена модификация классического опыта Юнга, позволяющая использовать все достоинства цифровой регистрации интерференционной картины. Примененная в эксперименте схема с косыми щелями может использоваться как расширение стандартной лабораторной работы, используемой во многих практикумах по оптике.

Список литературы

1. Лабораторный практикум «Оптика»: Учеб. пособие / Под ред. Д. А. Самарченко. М.: МИФИ, 2008. 320 с.
2. Санин А. Л. Опыт Юнга с диффузно рассеянным светом: Метод. указания к ла-

бораторной работе / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2002.

3. Сивухин Д. В. Оптика: Учеб. пособие. 2-е изд., испр. М.: Наука, 1985.

4. Chubar O. Transverse Electron Beam Size Measurements using the Lloyd's Mirror Scheme of Synchrotron Light Interference // Proc. of IEEE PAC-95. P. 2447.

5. Mitsuhashi T. Spatial Coherency of the Synchrotron Radiation at the Visible Light Region and Its Application for the Electronbeam Profile Measurement // Proc. of IEEE PAC-97. P. 766.

6. Яковлев В. И. Классическая электродинамика: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2009. 302 с.

Материал поступил в редколлегию 20.02.2014

**A. V. Bogomyagkov, V. L. Dorokhov, O. I. Meshkov
A. S. Polygalov, A. L. Shcheglov**

*Institute of Nuclear Physics of SB RAS
11 Lavrentiev Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation*

*Novosibirsk State University
2 Pirogov Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation*

*A.V.Bogomyagkov@inp.nsk.su; Dorohov_VL@mail.ru; O.I.Meshkov@inp.nsk.su
alexandr.polygalov@mail.ru; shcheglov13@gmail.ru*

YOUNG'S EXPERIMENT ON SLITS WITH AN ANGLE BETWEEN THEM

Here are proposed a modified version of Young's experiment on slits with an arbitrary angle between them. Also here performed mathematical analysis of the proposed scheme, showing that the intensity distribution can be approximated by a hyperbolic function. Experimental data confirm theoretical calculations. Analysis of the experimental results has conducted using two different methods of processing the digital data of the interference pattern. Theoretical calculations and experimental results established a nontrivial fact, that the interference patterns for slits with different, but symmetrical respect to 90° angles have the same intensity distribution. This experiment may be used as a standard laboratory work in University on optics workshop.

Keywords: Young's experiment, interference, slits with an angle between them, opening angle, laboratory work on optics, interference pattern.