

УДК 538.9

А. С. Криницын¹, И. В. Тихомиров², К. Н. Югай¹

¹ Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия

² Омский государственный технический университет
пр. Мира, 11, Омск, 644050, Россия

krinitss@mail.ru; Lab223@mail.ru; yugaykn@gmail.com

ТЕМПЕРАТУРА ПЕРЕХОДА БЕРЕЗИНСКОГО – КОСТЕРЛИЦА – ТАУЛЕССА В ДВУМЕРНОМ СВЕРХПРОВОДНИКЕ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ*

Методом Монте-Карло рассчитана температура перехода Березинского – Костерлица – Таулесса в двумерном сверхпроводнике 2-го рода при наличии внешнего магнитного поля. Показано, что вблизи второго критического поля заполнение ячеек размером $\xi \times \xi$, где ξ – длина когерентности при данной температуре, соответствует половинному. Показано также, что $T_{\text{ВКТ}}$ уменьшается при увеличении взаимодействия между вихрями и антивихрями и увеличении внешнего приложенного поля.

Ключевые слова: температура перехода Березинского – Костерлица – Таулесса, двумерный сверхпроводник 2-го рода, вихри Абрикосова.

Введение

Известно, что вихри, обусловленные тепловыми флуктуациями, понижают температуру перехода $T_{\text{ВКТ}}$ (температура перехода Березинского – Костерлица – Таулесса) по сравнению с критической температурой T_c , не учитывающей тепловые вихри ($T_{\text{ВКТ}} < T_c$) [1–4]. Этот механизм проявляется особенно эффективно в двумерных магнитных системах [5; 6] и сверхпроводниках [7–10]. В отсутствие внешнего магнитного поля в отдельном бесконечно протяженном слое вихри появляются парами вихрь-антивихрь. Заметим, что пара вихрь-антивихрь в слое равносильна замкнутому вихрю в объемном случае. При наличии внешнего поля при $T = 0$ появляются вихри, которые являются

только вихрями (или только антивихрями). Таким образом, при заданном внешнем поле, меньшем второго критического поля H_{c2} , температура $T_{\text{ВКТ}}$ будет, очевидно, падать по сравнению со случаем отсутствия поля. Полагаем, что внешнее магнитное поле перпендикулярно слою. Мы исследуем переход Березинского – Костерлица – Таулесса в двумерном сверхпроводнике во внешнем магнитном поле вблизи H_{c2} с учетом появления пар вихрь-антивихрь при конечной температуре.

Модель

В настоящей работе однослойный сверхпроводник моделируется двумерной квадратной сеткой размером $L \times L$ с периодиче-

* Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., грант № 14.В37.21.0771 от 24 августа 2012 г.

скими граничными условиями. Сетка состоит из клеток одного размера, отвечающего размеру вихря $\xi \times \xi$, где ξ – длина когерентности при данной температуре. Таким образом, $L = \xi N$, где N – число клеток в одном направлении. В процессе моделирования каждая клетка может быть в трех состояниях: пустая, содержащая вихрь или антивихрь. Перемещение вихря при этом может происходить в четырех направлениях, параллельных сторонам сетки, на величину ξ . Моделирование динамики системы осуществляется методом Монте-Карло по следующему алгоритму.

1. Линейные вихри случайным образом вводятся в систему изначально. Их число $N_h = [0, 5L^2 h]$, где [...] – целое, а $h \in [0, 1]$ – магнитное поле ($h = 1$ соответствует половинному заполнению системы).

2. Далее происходит генерация пар вихрь-антивихрь: с вероятностью $P \sim \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{kT}\right)$ в соседних не занятых клетках рождается пара, где ε_1 – энергия вихря, T – температура. Механизм генерации пар вихрь-антивихрь состоит из двух этапов: с указанной вероятностью выбирается незанятая ячейка – кандидат для рождения в ней вихря, далее, если у ячейки есть незанятые ближайшие соседи, случайным образом выбирается ближайшая ячейка для рождения антивихря. Если рядом нет незанятой ячейки, то рождения пары не происходит.

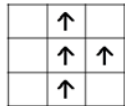
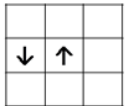
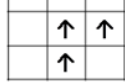
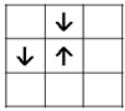
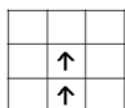
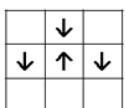
Direction probability of movement	Vortex-vortex interaction	Vortex-antivortex interaction
$P_L = 1 - \frac{3}{4}\alpha$ $P_{UDR} = \frac{1}{4}\alpha$		
$P_{UL} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha$ $P_{DR} = \frac{1}{4}\alpha$		
$P_{URL} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\alpha$ $P_D = \frac{1}{4}\alpha$		

Рис. 1. Вероятность перемещения вихря

3. Движение вихрей происходит следующим образом: случайно выбирается клетка, и если она занята, то делается попытка переместить вихрь (антивихрь). Для определенности рассмотрим вероятность выбора направления движения для вихря, так как для антивихря будет симметричная картина. Алгоритм определения вероятности представлен пунктами.

(а) Если вихрь окружают пустые ячейки (ближайшие 4 соседа) или вихри одного знака, то вероятность, очевидно, для всех четырех направлений будет равна 1/4.

(б) Если вихрь окружают вихри того же знака, то ввиду пункта (а) возможны три ситуации, отраженные во второй колонке рис. 1.

(в) В третьей колонке представлены вероятности для выбора движения, если вихрь окружают вихри противоположного знака. Ввиду пункта (а) здесь также будет три различные ситуации.

(г) Случаи, в которых вихрь окружают вихри разного знака, не увеличивают число представленных на рис. 1 ситуаций. Дело в том, что для данной модели мы можем точно сказать, как будет вести себя вихрь только для двух значений параметра взаимодействия: $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. Следовательно, формула для вероятности может иметь только линейную зависимость от параметра α . При $\alpha = 1$ (отсутствие взаимодействия) все направления для выбора движения равновероятны вне зависимости от окружения вихря. Рассмотрим случай сильного взаимодействия $\alpha = 0$. Если в ближайших ячейках есть вихри противоположного знака, то вихрь в любом случае выберет направление для перемещения к одному из них. Следовательно, вероятность не зависит от того, что находится в оставшихся ячейках: вихрь того же знака или пустая ячейка. При этом возможные вероятности ввиду пункта (а) ограничиваются тремя ситуациями, представленными в третьей колонке рис. 1. При отсутствии вихрей противоположного знака, очевидно, ввиду пункта (а) вероятность будет определяться только числом вихрей одного знака (вторая колонка рис. 1). После определения направления движения, осуществляется попытка переместить вихрь (антивихрь): движение вихря (антивихря) к вихрю (антивихрю) не происходит, а при движении вихря (антивихря) к антивихрю (вихрю) происходит их аннигиляция. Будем считать, что сделан

один шаг Монте-Карло (MCS), когда по указанной схеме используются все клетки.

4. Шаги 2–3 повторяем до тех пор, пока число вихрей не выйдет на свое асимптотическое значение. Число шагов Монте-Карло, отвечающее этому значению, обозначим t_{\max} (далее мы будем использовать время, нормированное на шаг Монте-Карло). В результате получаем зависимость $n(t)$, где $0 \leq t \leq t_{\max}$.

5. Выбираем новую конфигурацию линейных вихрей и повторяем шаги 1–4 N_C раз. Усредняя по конфигурациям, получаем среднее число вихрей и антивихрей $\langle \bar{n}(t) \rangle$ с погрешностью $\Delta \langle \bar{n}(t) \rangle$, где $\bar{\dots}$ – статистическое усреднение по шагам Монте-Карло, а $\langle \dots \rangle$ – среднее по начальным конфигурациям линейных вихрей.

Для получения достоверных численных значений необходимо правильно подобрать параметры модели: L (в единицах ξ), t_{\max} , и N_C . На рис. 2 представлены результаты моделирования для различных L при фиксированных h и T . Видно, что зависимости $n(t)$ для $L = 64, 128$ практически не отличаются друг от друга, в то время как для $L = 32$ график идет значительно ниже. Таким образом, для расчетов мы брали значение $L = 64$, так как дальнейшее увеличение L нецелесообразно. Из рис. 2 также можно оценить значение t_{\max} . Видно, что начиная с $t = 450$ MCS число вихрей практически не зависит от t , поэтому мы ограничились $t_{\max} = 500$ MCS. Выбор параметра N_C является важным моментом, поскольку точность любого компьютерного моделирования во многом определяется числом статистических конфигураций. При увеличении числа конфигураций график сглаживается. Далее в наших расчетах использовалось значение $N_C = 200$.

Максимальное число вихрей вблизи H_{C2}

Увеличение температуры приводит к увеличению вихрей и антивихрей, рождающихся попарно. При $T = 0$ число пар вихрь-антивихрь равно нулю, и при $H \geq H_{C2}$ число вихрей определяется только внешним полем. При увеличении внешнего поля чис-

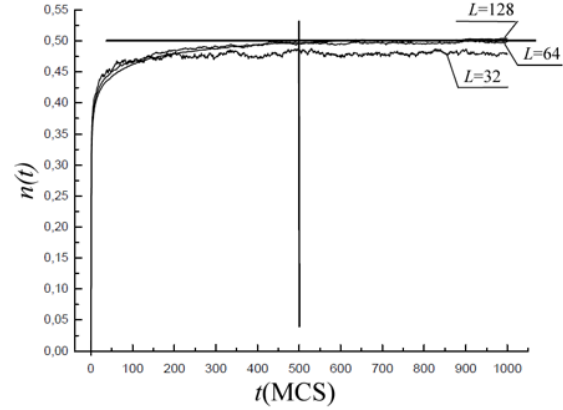


Рис. 2. Зависимость концентрации вихрей от времени

ло вихрей увеличивается, т. е. увеличивается число заполненных ячеек. Какое число заполненных ячеек соответствует разрушению сверхпроводимости вихрями? Соответствует ли H_{C2} полное заполнение всех ячеек? Эти вопросы не являются тривиальными по следующим причинам. Во-первых, при переходе от сверхпроводящего состояния к нормальному при внешнем поле, приближающемся снизу к значению второго критического поля H_{C2} , динамика вихрей, т. е. протекание процессов слияния и разрушения вихрей при плотной упаковке вихрей в плоскости 2D сверхпроводника невозможна из-за отсутствия степеней свободы вихрей в этой плоскости. Во-вторых, как будет показано ниже, плотная упаковка вихрей делает термодинамически невыгодным состояние с поверхностной сверхпроводимостью, возникающее во внешнем магнитном поле $H_{C2} \leq H \leq H_{C3}$, где H_{C3} – третье критическое поле.

При переходе от сверхпроводящего состояния к нормальному при внешнем поле, приближающемся снизу к значению критического поля H_{C2} , динамика вихрей (т. е. их перемещения на соседние ячейки) невозможна, если заполнены все ячейки. Кроме того, невозможны также тепловые флуктуации, которые могли бы привести к эффекту плавления вихрей. Однако тепловые перемещения вихрей были бы возможны и при значениях внешнего приложенного поля, близких к H_{C2} , если бы часть ячеек была свободна. Далее мы убедимся, что при этих условиях оказывается незаполненной поло-

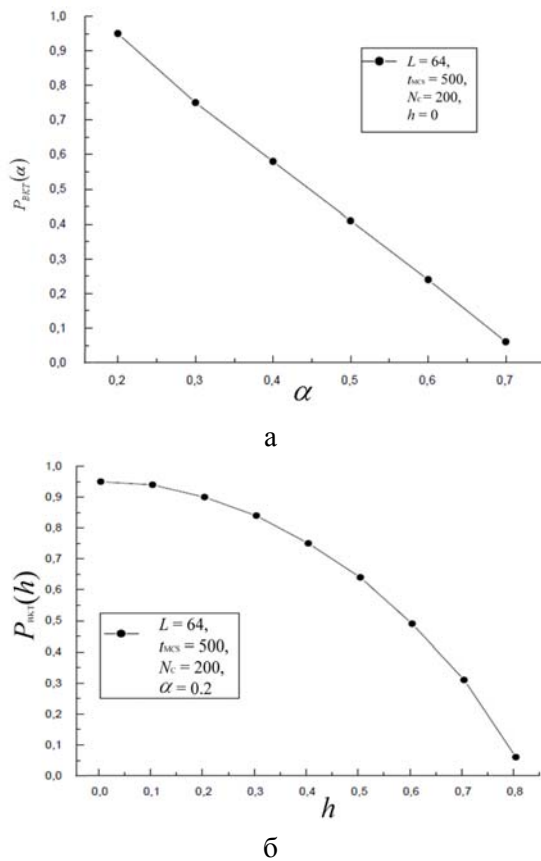


Рис. 3. Зависимость вероятности рождения пары вихрь-антивихрь при температуре перехода Березинского – Костерлица – Таулесса $P_{\text{вкт}}$: а – от величины взаимодействия между вихрями и антивихрями; б – от величины приложенного магнитного поля

вина ячеек, и это половинное заполнение является максимальным. Более того, вихри в этих условиях могут терять свои индивидуальные свойства и образовывать некие кластеры вихрей с общей нормальной сердцевиной, общим вихревым сверхтоком и потоком, равным $\Phi_0 N$, где Φ_0 – квант потока, N – число вихрей в кластере. Такой сценарий будет выгоден термодинамически, если поверхностная энергия границы раздела нормальная сердцевина – сверхпроводящее окружение по меньшей мере не будет изменяться при таком переходе. Поскольку поверхностная энергия отрицательна, то чем больше поверхность раздела данного состояния, тем оно термодинамически предпочтительнее. В рассматриваемом случае двумерной системы поверхностная энергия одного вихря пропорциональна $2\pi\xi$, где ξ – длина когерентности, а после разрушения вихрей поверхностная энергия всей системы – длине периметра сверхпроводника L_S ,

т. е. $2\pi\xi N_S = L_S$, где N_S – число вихрей перед разрушением. С другой стороны, N_S – максимальное число вихрей в сверхпроводнике с данным периметром рассматриваемого двумерного сверхпроводника. При внешнем приложенном поле, меньшем H_{C2} , $H < H_{C2}$, число вихрей N также будет меньше N_S , $N < N_S$. Можно утверждать, что объединение N вихрей в кластер типа описанного выше не противоречит термодинамике: периметр этого кластера L_N составит $2\pi\xi N$, а его поток будет равен $\Phi_0 N$. В общем случае при $H < H_{C2}$ число подобных образований, т. е. кластеров вихрей, может образовываться больше единицы и

$$\sum_i N^{(i)} < N_S,$$

где $N^{(i)}$ – число квантов потока в i -м кластере. При $H = H_{C2}$ все кластеры должны, очевидно, сливаться, образуя финальную картину с поверхностной сверхпроводимостью и поверхностными сверхтоками.

Поскольку между двумя вихрями имеет место отталкивательное взаимодействие, увеличивающееся при их сближении по закону $\frac{1}{x}$, где x – расстояние между вихрями, то слияние вихрей возможно при квантовом туннелировании вихрей. Это еще одно проявление макроскопического квантования в сверхпроводящей системе. Из общих соображений можно предположить, что вероятность туннелирования будет зависеть от величины приложенного магнитного поля, возрастая при возрастании поля.

Значение N_S можно оценить с помощью выражения $N_S = \frac{H_{C2} S}{\Phi_0}$, где S – полная площадь

слоя нашего двумерного сверхпроводника. Обозначим через N_{tot} – число вихрей, соответствующее полному заполнению площади S , т. е. оно равно полному числу ячеек: $N_{\text{tot}} = \frac{S}{\pi\xi^2}$. Используя соотношение

$$\sqrt{2}H_{cm} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda\xi}$$

показать, что $N_S = \frac{N_{\text{tot}}}{2}$, т. е. сверхпроводимость разрушается при половинном заполнении ячеек. Здесь H_{cm} – термодинамическое критическое поле, а λ – лондоновская

глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник. Сам по себе этот результат представляется на первый взгляд весьма неожиданным. Однако именно при этом условии, т. е. при половинном заполнении ячеек, поверхностная энергия при $H \geq H_{cm}$ не увеличивается, а остается неизменной.

Результаты

Взаимодействие вихрей друг с другом и вихря с антивихрем мы учитывали с помощью параметра α : при отсутствии взаимодействия $\alpha \rightarrow 1$ и при сильном взаимодействии $\alpha \rightarrow 0$. Расчеты показывают, что с увеличением взаимодействия между вихрями и антивихрями и при отсутствии внешнего поля, температура перехода Березинского – Костерлица – Таулесса увеличивается (рис. 3, а). Заметим, что в данном случае число вихрей и антивихрей совпадает.

При наличии внешнего приложенного магнитного поля число вихрей обусловлено этим полем и флуктуационным механизмом, так что число вихрей больше числа антивихрей. На рис. 3, б представлена зависимость вероятности рождения пары вихрь-антивихрь при температуре перехода Березинского – Костерлица – Таулесса от величины приложенного магнитного поля. Как видно, при фиксированном параметре взаимодействия $P_{\text{ВКТ}}$ уменьшается при увеличении поля. Поскольку вероятность рождения пары вихрь-антивихрь связана с температурой соотношением $P \sim \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{kT}\right)$, то температура перехода Березинского – Костерлица – Таулесса также уменьшается при увеличении магнитного поля. Очевидно, это связано с тем, что число вихрей, которое необходимо добавить до максимального, соответствующего половинному заполнению, значения, и обусловленных увеличением внешнего поля, уменьшается.

Заключение

Результаты проведенных исследований позволяют сделать следующие выводы.

1. В двумерном сверхпроводнике при внешнем приложенном магнитном поле H порядка второго критического поля H_{C2} число вихрей соответствует половинному заполнению ячеек с характерными размерами по-

рядка длины когерентности ξ при данной температуре.

2. При $H < H_{C2}$ возможно образование кластеров вихрей с потоком, кратным кванту потока Φ_0 , и поверхностной энергией, равной поверхностной энергии всех вихрей, образующих кластер.

3. Температура перехода Березинского – Костерлица – Таулесса $T_{\text{ВКТ}}$ возрастает при возрастании энергии взаимодействия между вихрями и антивихрями.

4. Температура перехода $T_{\text{ВКТ}}$ уменьшается при увеличении внешнего приложенного магнитного поля при фиксированном параметре взаимодействия.

Список литературы

1. Березинский В. Л. Разрушение дальнего порядка в одномерных и двумерных системах с непрерывной группой симметрии. I. Классические системы // ЖЭТФ. 1970. Т. 59, вып. 3. С. 907–920.
2. Березинский В. Л. Разрушение дальнего порядка в одномерных и двумерных системах с непрерывной группой симметрии. II. Квантовые системы // ЖЭТФ. 1971. Т. 61, вып. 3. С. 1144–1156.
3. Kosterlitz J. M., Thouless D. J. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems // J. Phys. C. 1973. Vol. 6. No. 7. P. 1181–1204.
4. Nelson D. R., Kosterlitz J. M. Universal Jump in the Superfluid Density of Two-Dimensional Superfluids // Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 39. No. 19. P. 1201–1205.
5. Chern C.-H. Modeling the Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition in NiGa₂S₄ // Phys. Rev. B. 2008. Vol. 78. P. 020403.
6. Sun Y.-Z., Yi L., Wysin G. M. Berezinskii – Kosterlitz – Thouless phase transition for the dilute planar rotator model on a triangular lattice // Phys. Rev. B. 2008. Vol. 78. P. 155409.
7. Dupuis N. Berezinskii – Kosterlitz – Thouless transition and BCS-Bose crossover in the two-dimensional attractive Hubbard model // Phys. Rev. B. 2004. Vol. 70. P. 134502.
8. Lupilli C. M., Pfeifer P., Wexler C. Universality Away from Critical Points in Two-Dimensional Phase Transitions // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 96. P. 140603.
9. Kogan V. G. Interaction of vortices in thin superconducting films and the Berezinskii –

Kosterlitz – Thouless transition // Phys. Rev. B. 2007. Vol. 75. P. 064514.

10. *Benfatto L., Castellani C., Giamarchi T.* Sine-Gordon Description of Berezinskii – Kosterlitz – Thouless Vortices in Superconductors Immersed in an External Magnetic Field // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 99. P. 207002

11. *Шмидт В. В.* Введение в физику сверхпроводников. М.: МЦНМО, 2000. 402 с.

Материал поступил в редколлегию 12.03.2014

A. S. Krinitsyn, I. V. Tikhomirov, K. N. Yugay

**THE TEMPERATURE OF BEREZINSKY – KOSTERLITZ – THOULESS TRANSITION
IN TWO-DIMENSIONAL SUPERCONDUCTOR IN AN EXTERNAL FIELD**

The Method of Monte-Carlo calculated temperature of Berezinsky – Kosterlitz – Thouless transition in two-dimensional superconductor 2nd type in the presence of an external magnetic field. It is shown that near the upper critical field filling cells with a size of $\xi \times \xi$ relation, where ξ – coherence length at a given temperature, corresponds to half. It is also shown that T_{BKT} decreases with increasing interaction between the vortices and antivortices and increase of the external applied magnetic field.

Keywords: temperature of Berezinsky – Kosterlitz – Thouless transition, two-dimensional superconductor 2nd type, the Abrikosov vortices.