

А. В. Бойко

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН
ул. Институтская, 4/1, Новосибирск, 630090, Россия*

*Тюменский государственный нефтегазовый университет
ул. Володарского, 56, Тюмень, 625500, Россия*

boiko@itam.nsc.ru

О МОДЕЛИРОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В ПОДАТЛИВЫХ ТРУБАХ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ ГЕМОДИНАМИКИ *

Работа направлена на формирование адекватных физических моделей, описывающих механизмы взаимодействия податливых стенок труб с возмущениями потока, применительно к задачам гемодинамики с целью выявления условий, при которых возникает гидродинамическая неустойчивость.

Ключевые слова: податливые покрытия, течение в трубах, гидродинамическая неустойчивость, гемодинамика.

Введение

Течение крови в сосудах является частным случаем ламинарного пульсирующего течения неньютоновской жидкости в трубах, вообще говоря, сложного поперечного сечения с податливыми стенками. С конца XIX в. известно, что ламинарное стационарное течение в каналах и трубах при определенных условиях может терять устойчивость, что приводит к возникновению и усилению вихревых возмущений в потоке и, как следствие, к увеличению потерь на трение и другим негативным явлениям. К этим условиям относятся, например, характерный размер поперечного сечения трубы, ее форма, скорость и вязкость потока.

В последние годы при рассмотрении течения крови широко используется прямой численный расчет применительно к сосудам конкретного пациента или к упрощенной модели сосуда, что очень важно в прикладном плане, но, как правило, не позволяет делать обобщающих выводов о физических процессах, сопровождающих ту или иную

патологию. Вместе с тем существует весьма небольшое количество обобщающих теоретических и расчетных исследований по всему комплексу проблем, связанных с гидродинамической неустойчивостью и неустойчивостью границы при стационарном или пульсирующем течении жидкости в каналах с податливыми (вязкоупругими) стенками.

Известно, что течение ньютоновской жидкости в круглой трубе с твердыми стенками устойчиво по отношению к малым возмущениям при любых числах Рейнольдса. Для рассматриваемого класса задач устойчивости потенциально важными могут быть следующие усложняющие факторы: неньютоновская реология крови [1–3], пульсационность потока [4–7], податливость стенок [8; 9] и форма сосуда [10; 11]. В классической постановке устойчивость течений несжимаемой ньютоновской жидкости рассматривалась для плоских и орбитальных каналов с твердыми стенками, а также для труб круглого и эллиптического сечений [12–18]. Более сложные модели те-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 13-01-00270-а.

чений ньютоновской жидкости при наличии податливости стенок или пульсационного потока ограничены каналами круглого сечения с толстыми стенками [19–26]. Также имеются исследования о гидродинамической устойчивости в круглых каналах течения крови (неньютоновской жидкости) с твердыми стенками [27; 28]. Общий вывод, который можно сделать из этих исследований, состоит в том, что пульсации потока в характерном для гемодинамики диапазоне частот, а также реология крови оказывают незначительное и даже стабилизирующее влияние на течение. В частности числа Воммерсли, характеризующие пульсации потоков крови, как правило, не превышают $Wo = 10$, а псевдопластичная реология крови приводит к наполнению профилей скорости, что способствует устойчивости течения.

Исследования комбинированного влияния на устойчивость оставшихся факторов (формы канала и податливости его стенки) и разработка соответствующего теоретического аппарата, по всей видимости, до сих пор не проводились. Вместе с тем применительно к стационарному течению воды в каналах и пограничных слоях установлено, что наличие «мягких» покрытий стенок приводит к возникновению неустойчивостей в потоке и в покрытии, причем в результате последних покрытие перестает быть гидравлически гладким (см., например, обзор [29]). Поэтому патологические изменения в вязкоупругих свойствах стенок артерий, вызванные, например, аневризмой сосуда [30–32], могут приводить к такому поведению тока крови и деформации стенок, которые можно попытаться объяснить с помощью подходов линейной теории гидродинамической устойчивости.

С теоретической точки зрения проблема взаимодействия потока со стенкой сосуда – частная проблема взаимодействия потока с деформируемой конструкцией, связана с адекватной трехмерной формулировкой вязкоупругих характеристик стенки на всю ее толщину при помощи уравнений Навье и соответствующих граничных условий [33–35]. Так как толщина стенки сосуда, как правило, существенно меньше его радиуса, альтернативой служит моделирование стенки при помощи двумерной теории оболочек [36]. Это связано с тем, что деформации и смещения стенки в рамках классического

линейного подхода теории гидродинамической устойчивости малы, и можно сформулировать относительно простые линеаризованные граничные условия между стенкой и потоком. Вместе с тем следует иметь в виду вероятно (предварительно) напряженное состояние стенки, вызванное давлением потока крови и наличием мышечных волокон. В целом, трехмерная модель больше приближена к реальности, однако ее сложнее реализовать в численном расчете. Кроме того, получение результатов повышенной точности имеет смысл, если вязкоупругие свойства стенки и реология потока известны с хорошей точностью, что, как правило, не так в случае гемодинамики. Между тем двумерные модели более просты и воспроизводят существенные динамические особенности стенки (ее инерцию, эластичность и демпфирующие свойства).

Последний подход достаточно популярен в исследованиях, направленных на управление ламинарно-турбулентным переходом и турбулентностью при помощи искусственных податливых покрытий в пограничных слоях [37–40]. Для ряда течений результаты теории подтверждены экспериментально. Также применительно к этим течениям и пограничным слоям проведены систематические расчеты для различных типов податливой стенки, показавшие, что, помимо неустойчивости движения жидкости, при определенных условиях может возникать неустойчивость границы. Эксперименты показывают, что эта неустойчивость действительно имеет место и выражается в изменении формы стенки, так что она перестает быть гидравлически гладкой и коробится (выпячивается). Следует отметить, что рассмотренные свойства податливых поверхностей в этих исследованиях не имели отношения к сосудам в теле человека или животных – они ограничены плоской геометрией и простейшими моделями покрытий.

В отличие от них стенка сосуда обладает рядом существенных усложняющих свойств [41]. В современных исследованиях, как правило, применяется трехслойное описание стенок. Считается, что стенка артерии состоит из тонкого внутреннего эндотелиального слоя (интимы), среднего мышечного слоя с коллагеновыми и эластичными волокнами, создающими анизотропный каркас (медии), и наружного соединительного

слоя (адвентиции). Кроме того, артерия погружена в окружающую ткань, свойства податливости которой могут отличаться в зависимости от органа. В зависимости от детализации описания слоев артерии и исходя из особенностей их строения (мышечные, мышечно-эластические, эластические), возраста пациента и т. п. существует несколько моделей, описывающих их вязкоупругие свойства (свойства податливости). В основном они отличаются описанием наиболее сложно устроенного среднего слоя (меди) [42; 43].

Как видно, набор определяющих данную проблему параметров и их возможные диапазоны довольно велики. В данной работе строится иерархия физических моделей, характеризующих механизмы взаимодействия вязкоупругих стенок каналов с возмущениями потока, применительно к задачам гемодинамики, что позволяет сделать ряд упрощающих предположений относительно определяющих параметров. Также предполагается, что каналы имеют постоянное поперечное сечение и не искривлены, не имеют ответвлений и пор, а течение несжимаемое. В соответствии с данными предыдущих исследований по устойчивости считается, что бегущая волна в стенке возникает в основном как отклик на возмущения давления в потоке. Модели будут построены на комбинированном описании стенок на основе двумерной теории оболочек и окружающей ткани и на трехмерных уравнениях линейной теории гидродинамической устойчивости.

Иерархия моделей податливой стенки

Как уже отмечалось, теория оболочек (простейшие варианты в формулировке Кирхгофа – Лява для поперечного нагружения) применялась ранее для описания плоских податливых покрытий. В наиболее ранних работах применялась либо чисто оболочечная, либо мембранная модель. В работах [44; 45] и некоторых других поперечные колебания плоской пластины $\eta(x, \theta, t)$ задавались уравнением мембраны, причем ее внутренне напряженное состояние описывалось постоянными коэффициентами натяжения T_x в продольном направлении

$$-T_x \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + m\ddot{\eta} = -p_i + f_e,$$

где $\ddot{\eta} = \partial^2 \eta / \partial t^2$, m – масса оболочки на единицу длины, а p_i и f_e – внутренне давление и внешние силы, которые могут зависеть как от координат, так и от времени. В более поздних работах, в которых рассматривались и наклонные к направлению основного потока возмущения, учитывалось также поперечное натяжение $-T_z \partial \eta / \partial z$. В работах [46; 47] и некоторых других уравнения поперечных колебаний оболочки $\eta(x, \theta, t)$ представлялись в виде

$$L(\eta) + m\ddot{\eta} = -p_i + f_e,$$

где $L(\eta)$ – линейный оператор, зависящий только от координат и характеризующий напряжение, препятствующее поперечному смещению η . В качестве оператора L выступает, как правило,

$$L = D \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4},$$

где D – изгибная жесткость материала оболочки. При $D \rightarrow \infty$ оболочка ведет себя как твердое тело. В качестве сил f_e могли выступать реакция основания $g(\rho_F - \rho_B)$, вызванная разностью плотностей жидкости ρ_F и однородного основания ρ_B (g – ускорение свободного падения), на котором располагалась пластина, внешнее давление p_e , сила упругости $-k\eta$ основания (где k – коэффициент упругости) и сила трения $d \partial \eta / \partial t$, где d – коэффициент демпфирования.

В более поздних работах [45; 48–50] оба подхода были объединены. Также вместо модели пружин и демпферов для описания вязкоупругих свойств основания в отдельных работах использовались полные уравнения Навье [37].

Для рассматриваемой в данной работе задачи ограничения этих подходов связаны прежде всего со следующими предположениями:

- 1) плоская геометрия стенки и течения;
- 2) отсутствие анизотропии свойств стенки;
- 3) постоянство коэффициентов натяжения и изгибной жесткости, в частности независимость коэффициентов натяжения от времени (в соответствии с пульсациями ос-

новного течения) и изгибной жесткости от поперечной координаты.

Последнее предположение существенно ограничивает учет пульсаторных свойств течения и патологий стенки. Второе предположение хотя бы приближенно можно считать справедливым, вообще говоря, только в плоском или осесимметричном случае, если рассматривать двумерные возмущения, но в отсутствие хорошо документированных свойств анизотропии стенок сосудов при анализе устойчивости имеет смысл предположить изотропию свойств стенки и в более сложных конфигурациях. Первое предположение является очень сильным ограничением, так как формы поперечных сечений сосудов весьма разнообразны. С другой стороны, известно, что течение в круглой трубе с твердыми стенками устойчиво по отношению к малым вихревым возмущениям при любых числах Рейнольдса. Эллиптичность формы трубы делает его неустойчивым при конечных числах Рейнольдса [18]. Поэтому ниже на основе теории оболочек [36] основной упор делается на течение в канале круглого сечения, толщина стенки которого может меняться по радиусу.

Тонкую, изотропную и однородную оболочку постоянной толщины h можно характеризовать «нейтральной» поверхностью, такой что напряжения на этой нейтральной поверхности не могут быть изгибающими. Положение этой нейтральной поверхности можно описать трехмерными декартовыми координатами x_1 , x_2 и x_3 , а также двумерными ортогональными криволинейными координатами поверхности α_1 и α_2 . Связь положения точки P на нейтральной поверхности, задаваемой этими двумя системами координат, дается соотношениями

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(\alpha_1, \alpha_2); & x_2 &= f_2(\alpha_1, \alpha_2); \\ x_3 &= f_3(\alpha_1, \alpha_2), \end{aligned}$$

или вектором

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}(\alpha_1, \alpha_2) &= \\ &= f_1(\alpha_1, \alpha_2)\bar{\mathbf{e}}_1 + f_2(\alpha_1, \alpha_2)\bar{\mathbf{e}}_2 + f_3(\alpha_1, \alpha_2)\bar{\mathbf{e}}_3. \end{aligned}$$

Путь между двумя близко расположенными на нейтральной поверхности точками P и P' , $PP' = d\bar{\mathbf{r}}$ задается выражением

$$d\bar{\mathbf{r}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2.$$

Тогда расстояние ds , равное длине вектора $d\bar{\mathbf{r}}$, получается из скалярного произведения

$$(ds)^2 = d\bar{\mathbf{r}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} = A_1^2 (d\alpha_1)^2 + A_2^2 (d\alpha_2)^2,$$

где A_1 и A_2 – параметры Ламэ:

$$\begin{aligned} A_1^2 &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \alpha_1} = \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \alpha_1} \right|^2, \\ A_2^2 &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \alpha_2} = \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \alpha_2} \right|^2. \end{aligned}$$

В дальнейшем потребуются также радиусы кривизны R_1 и R_2 по криволинейным направлениям, получаемые из соответствующих определений:

$$R_1 = \frac{A_1^2}{\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{n}}}{\partial \alpha_1}}; \quad R_2 = \frac{A_2^2}{\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{n}}}{\partial \alpha_2}},$$

где $\bar{\mathbf{n}}$ – вектор единичной нормали к нейтральной поверхности.

Наиболее полная формулировка колебаний оболочки дается уравнениями Лява. Они определяют отклонение ее поверхности под действием сил давления любой природы. В общем случае они описывают и ситуации, когда силы, возвращающие оболочку к состоянию равновесия, вызваны также внутренними напряжениями, не зависящими от отклонения поверхности (предварительно-напряженные состояния). При этом уравнения разделяются на линейную систему уравнений, определяющую эти начальные напряжения N_{11}^0 , N_{12}^0 , N_{21}^0 и N_{22}^0 , как функции статических нагрузок q_1^0 , q_2^0 , q_3^0 по ортогональным координатам и на линейную систему уравнений, определяющую колебания оболочки как функцию динамических нагрузок q_1^{1*} , q_2^{1*} , q_3^{1*} . Первая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{1}{A_1 A_2} \times \\ &\times \left[\frac{\partial(N_{11}^0 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(N_{21}^0 A_1)}{\partial \alpha_2} + N_{12}^0 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} - N_{22}^0 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right] + \\ &+ \frac{Q_{13}^0}{R_1} = -q_1^0, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \times \left[\frac{\partial(N_{12}^0 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(N_{22}^0 A_1)}{\partial \alpha_2} + N_{21}^r \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - N_{11}^0 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right] + \frac{Q_{23}^0}{R_2} = -q_2^0,$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(Q_{13}^0 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(Q_{23}^0 A_1)}{\partial \alpha_2} \right] - \left(\frac{N_{11}^0}{R_1} + \frac{N_{22}^0}{R_2} \right) = -q_3^0,$$

где Q_{13}^0 и Q_{23}^0 определяются из уравнений на статические изгибающие моменты M_{11}^0 , M_{12}^0 , M_{21}^0 , M_{22}^0 :

$$Q_{13}^0 = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(M_{11}^0 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(M_{21}^0 A_1)}{\partial \alpha_2} + M_{12}^0 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - M_{22}^0 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right],$$

$$Q_{23}^0 = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(M_{12}^0 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(M_{22}^0 A_1)}{\partial \alpha_2} + M_{21}^0 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - M_{11}^0 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right].$$

Когда искомые статические напряжения N_{11}^0 , N_{12}^0 , N_{21}^0 , N_{22}^0 найдены, решается вторая система уравнений:

$$\frac{1}{A_1 A_2} \times \left[\frac{\partial(N_{11}^0 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(N_{21}^0 A_1)}{\partial \alpha_2} + N_{12}^1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} - N_{22}^1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right] + \frac{Q_{13}^1}{R_1} - \rho h \ddot{u}_1^1 = -q_1^{1*},$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \times \left[\frac{\partial(N_{12}^1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(N_{22}^1 A_1)}{\partial \alpha_2} + N_{21}^1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - N_{11}^1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right] + \frac{Q_{23}^1}{R_2} - \rho h \ddot{u}_2^1 = -q_2^{1*},$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(Q_{13}^1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(Q_{23}^1 A_1)}{\partial \alpha_2} \right] - \left(\frac{N_{11}^1}{R_1} + \frac{N_{22}^1}{R_2} \right) + \nabla_0^2 u_3^1 - \rho h \ddot{u}_3^1 = -q_3^{1*},$$

где

$$\nabla_0^2 = \frac{1}{A_2 A_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[N_{11}^0 \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + N_{21}^0 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[N_{22}^0 \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + N_{12}^0 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right] \right\},$$

а Q_{13}^1 и Q_{23}^1 определяются из уравнений на динамические изгибающие моменты M_{11}^0 , M_{12}^0 , M_{21}^0 , M_{22}^0 :

$$Q_{13}^1 = \frac{1}{A_2 A_1} \left[\frac{\partial(M_{11}^1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(M_{21}^1 A_1)}{\partial \alpha_2} + M_{12}^1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - M_{22}^1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right],$$

$$Q_{23}^1 = \frac{1}{A_2 A_1} \left[\frac{\partial(M_{12}^1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(M_{22}^1 A_1)}{\partial \alpha_2} + M_{21}^1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - M_{11}^1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right].$$

В этих уравнениях использованы следующие обозначения ($i=1$ или 2):

$$N_{11}^i = K(\varepsilon_{11}^i + \nu \varepsilon_{22}^i),$$

$$N_{22}^i = K(\varepsilon_{22}^i + \nu \varepsilon_{11}^i),$$

$$N_{12}^i = \frac{K(1-\nu)}{2} \varepsilon_{12}^i,$$

$$N_{21}^i = \frac{K(1-\nu)}{2} \varepsilon_{21}^i,$$

$$M_{11}^i = D(k_{11}^i + \nu k_{22}^i),$$

$$M_{22}^i = D(k_{22}^i + \nu k_{11}^i),$$

$$M_{12}^i = \frac{D(1-\nu)}{2} k_{12}^i,$$

$$M_{21}^i = \frac{D(1-\nu)}{2} k_{21}^i.$$

Здесь $K = Eh/1-\nu^2$ и $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ – мембранная и изгибная жесткости оболочки, соответственно; E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки, соответственно. При этом ε_{11}^i , ε_{12}^i , ε_{21}^i и

ε_{22}^i – мембранные деформации, выражающиеся через статические отклонения u_1^i , u_2^i и u_3^i как

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^i &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1^i}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2^i}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{u_3^i}{R_1}, \\ \varepsilon_{22}^i &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2^i}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1^i}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{u_3^i}{R_2}, \\ \varepsilon_{12}^i = \varepsilon_{21}^i &= \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial (u_1^i/A_1)}{\partial \alpha_2} + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial (u_2^i/A_2)}{\partial \alpha_1},\end{aligned}$$

а k_{11}^i , k_{12}^i , k_{21}^i и k_{22}^i – изгибающие деформации, задаваемые равенствами

$$\begin{aligned}k_{11}^i &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \beta_1^i}{\partial \alpha_1} + \frac{\beta_2^i}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \\ k_{22}^i &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta_2^i}{\partial \alpha_2} + \frac{\beta_1^i}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}, \\ k_{12}^i = k_{21}^i &= \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial (\beta_1^i/A_1)}{\partial \alpha_2} + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial (\beta_2^i/A_2)}{\partial \alpha_1}, \\ \beta_1^i &= \frac{u_1^i}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3^i}{\partial \alpha_1}, \\ \beta_2^i &= \frac{u_2^i}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3^i}{\partial \alpha_2}.\end{aligned}$$

Применительно к рассматриваемой задаче, может быть оправдано дальнейшее упрощение этих уравнений при помощи широко используемого приближения Доннелла – Муштари – Власова, в котором предполагается, что мембрана нагружается и в основном отклоняется по нормали к поверхности. Основное предположение состоит в том, что продольными отклонениями можно пренебречь в выражениях для изгибающей деформации (но не в выражениях для мембранной деформации). Тогда мембранные деформации остаются неизменными, а изгибающие деформации принимают вид

$$\begin{aligned}k_{11}^i &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3^i}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2^2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial u_3^i}{\partial \alpha_2}, \\ k_{22}^i &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3^i}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{1}{A_1^2 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_3^i}{\partial \alpha_1}, \\ k_{12}^i &= -\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_1^2} \frac{\partial u_3^i}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_2^2} \frac{\partial u_3^i}{\partial \alpha_2} \right).\end{aligned}$$

Еще одно предположение состоит в том, что учитывается только нормальное нагружение, а влиянием внешних сил на поведение мембраны по касательной к ней-

тральной поверхности оболочки можно пренебречь. Кроме того, пренебрегаем членами Q_{31}/R_1 и Q_{32}/R_2 . Уравнения движения приобретают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial (N_{11}^1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (N_{21}^1 A_1)}{\partial \alpha_2} + N_{12}^1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} - N_{22}^1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} &= 0, \\ \frac{\partial (N_{12}^1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (N_{22}^1 A_1)}{\partial \alpha_2} + N_{21}^1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - N_{11}^1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} &= 0, \\ \frac{1}{A_2 A_1} \left[\frac{\partial (Q_{13}^1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (Q_{23}^1 A_1)}{\partial \alpha_2} \right] - \\ - \left(\frac{N_{11}^1}{R_1} + \frac{N_{22}^1}{R_2} \right) + \nabla_0^2 u_3 - \rho h \ddot{u}_3^i &= -q_3^{1*}.\end{aligned}$$

Рассмотрим, к чему сводятся эти уравнения в случае осесимметричных труб постоянной и переменной толщины.

В случае круглой трубы постоянной толщины $A_1 = 1$, $A_2 = R$, $R_1 = \infty$, $R_2 = R$, $\alpha_1 = z$ (продольная координата), $\alpha_2 = \vartheta$ (азимутальная координата) и

$$\begin{aligned}R \frac{\partial N_{11}^1}{\partial z} + \frac{\partial N_{21}^1}{\partial \vartheta} &= 0, \\ R \frac{\partial N_{12}^1}{\partial z} + \frac{\partial N_{22}^1}{\partial \vartheta} &= 0,\end{aligned}$$

$$D \nabla^4 u_3 + N_{22}^1 - \frac{1}{R} \nabla_0^2 u_3^1 + \rho h \ddot{u}_3^i = q_3^{1*}.$$

В случае двумерных (не зависящих от z) возмущений первое и второе уравнения дают $\partial u_1^1 / \partial z = -v / R u_3^1$ и $u_2^1 = 0$ соответственно, а последнее принимает вид

$$D \nabla^4 u_3^1 + \frac{Eh}{R^2} u_3^1 - \frac{1}{R} \nabla_0^2 u_3 + \rho h \ddot{u}_3^i = q_3^{1*},$$

где

$$\begin{aligned}\nabla^4 &= \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \vartheta^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4}{\partial \vartheta^4}, \\ \nabla_0^2 &= N_{11}^0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{N_{12}^0}{R} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \vartheta} + \frac{N_{22}^0}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}.\end{aligned}$$

Примененные выше выражения для N_{11}^i , N_{12}^i , N_{22}^i и M_{11}^i , M_{12}^i , M_{22}^i справедливы также для оболочек неравномерной толщины $h(\alpha_1, \alpha_2)$, если оболочка везде разрезается нейтральной поверхностью на две равные части. В этом случае мембранные и изгибающие напряжения становятся функциями координат

$$K = K(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{Eh(\alpha_1, \alpha_2)}{1 - \nu^2},$$

$$D = D(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{Eh^3(\alpha_1, \alpha_2)}{12(1-\nu^2)}.$$

Если толщины разрезанных частей мембраны не равны, уравнения движения можно соответствующим образом модифицировать (см. [36]), но этот случай в данной работе не рассматривается.

Применительно к моделированию сосуда, будем считать, что его особенность (патология) создается частичным или полным истончением или утолщением стенки (например, среднего мышечного слоя – меди). При этом толщина h стенки сосуда зависит только от ϑ , т. е. $h = h(\vartheta)$. В этом случае смещения становятся существенно трехмерными и уравнения движения остаются связанными:

$$R \frac{\partial N_{11}^1}{\partial z} + \frac{\partial N_{21}^1}{\partial \vartheta} = 0,$$

$$R \frac{\partial N_{12}^1}{\partial z} + \frac{\partial N_{22}^1}{\partial \vartheta} = 0,$$

$$D\nabla^4 u_3^1 + Lu_3^1 + N_{22}^1 - \frac{1}{R} \nabla_0^2 u_3^1 + \rho h \ddot{u}_3^1 = q_3^{1*}.$$

Здесь введен оператор

$$L = \frac{D_\vartheta}{R} \left[\frac{1+\nu}{R} \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \vartheta} + (1-\nu) \frac{\partial^3}{\partial z^3} + \frac{2}{R^3} \frac{\partial^3}{\partial \vartheta^3} \right] + \frac{D_{\vartheta\vartheta}}{R^2} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right).$$

Эластичное основание

Окружающая оболочку среда, состоящая из однородного материала с плотностью ρ_B , модулем Юнга E_B , модулем сдвига G_B и коэффициентом Пуассона ν_B одинаковой толщины h_B , может рассматриваться в ряде случаев как набор действующих на нейтральную поверхность оболочки равномерно распределенных пружин и демпферов (см., например, [45; 48–50]) с коэффициентами упругости $k_3 = E_B/h_B$ и $k_1 = k_2 = G_B/h_B$ и коэффициентами демпфирования d_1 , d_2 и d_3 по направлениям α_1 , α_2 и α_3 .

Эффект присоединенной массы, вызванный наличием среды, учитывается в уравнениях движения добавочным членом $\rho_B h_B/3$, который можно получить из энергетических

соображений [36]. Правые части в уравнениях Лява приобретут вид

$$q_1^{1*} = q_1^1 - \frac{1}{3} \rho_B h_B \ddot{u}_1^1 - d_1 \dot{u}_1^1 - k_1 u_1^1,$$

$$q_2^{1*} = q_2^1 - \frac{1}{3} \rho_B h_B \ddot{u}_2^1 - d_2 \dot{u}_2^1 - k_2 u_2^1,$$

$$q_3^{1*} = q_3^1 + \frac{1}{3} \rho_B h_B \ddot{u}_3^1 - d_3 \dot{u}_3^1 - k_3 u_3^1,$$

где q_1^1 , q_2^1 и q_3^1 – оставшиеся силы. В приближении Доннелла – Муштари – Власова учитывается только последнее из этих равенств (что подразумевает $k_1 = k_2 = d_1 = d_2 = 0$), т. е.

$$R \frac{\partial N_{11}^1}{\partial z} + \frac{\partial N_{21}^1}{\partial \vartheta} = 0,$$

$$R \frac{\partial N_{12}^1}{\partial z} + \frac{\partial N_{22}^1}{\partial \vartheta} = 0,$$

$$D\nabla^4 u_3^1 + Lu_3^1 + N_{22}^1 - \frac{1}{R} \nabla_0^2 u_3^1 + k_3 u_3^1 +$$

$$+ d_3 \dot{u}_3^1 + \left(\rho h + \frac{1}{3} \rho_B h_B \right) \ddot{u}_3^1 = q_3^1.$$

Рассмотренная модель вязкоупругого основания справедлива, если модули Юнга среды и оболочки существенно различны. В данной работе предполагается, что это условие выполняется. В противном случае основание нужно моделировать в виде вязкоупругой сплошной среды, как это сделано, например, в [37].

Линеаризованные уравнения движения жидкости в круглой трубе и граничные условия

В дальнейшем принимается, что единственной внешней динамической силой, приложенной к мембране, являются пульсации давления $q_3^1 = -p$, вызываемые малыми возмущениями потока. Также предполагается, что основное течение в канале $W = W(r, t)$. Тогда линеаризованные уравнения Навье – Стокса для возмущений скорости $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}^T$ и пульсаций давления p в канале с круглым сечением (течение внутри оболочки с круглой нейтральной поверхностью) радиусом R принимают вид [51]

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + W \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{dW}{dR} v_3^1 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu_F}{\rho_F} \nabla^2 v_1,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_2}{\partial t} + W \frac{\partial v_2}{\partial z} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \frac{\mu_F}{\rho_F} \left(\nabla^2 v_2 - \frac{v_2}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_3}{\partial \vartheta} \right), \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} + W \frac{\partial v_3}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu_F}{\rho_F} \left(\nabla^2 v_3 - \frac{v_3}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_2}{\partial \vartheta} \right), \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial \vartheta} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_3)}{\partial r} &= 0,\end{aligned}$$

где μ_F – динамическая вязкость жидкости, ρ_F – ее плотность и

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Граничные условия между жидкостью и оболочкой состоят в непрерывности скоростей на границе:

$$\begin{aligned}v_1|_{r=R} &= \frac{\partial u_1^1}{\partial t}, \quad v_2|_{r=R} = \frac{\partial u_2^1}{\partial t}, \\ v_3|_{r=R} &= \frac{\partial u_3^1}{\partial t}.\end{aligned}$$

Из-за наличия членов типа $\sim 1/r$ для обеспечения гладкости и ограниченности решений необходимо также накладывать нетривиальные условия на оси оболочки. Эти условия имеют сугубо числовую, а не физическую природу и связаны с особенностью, имеющей место в полярной системе координат в точке $r = 0$. Эти условия можно получить, потребовав независимости решения от угла при $r = 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial}{\partial \vartheta} (v_1 \bar{\mathbf{e}}_z + v_2 \bar{\mathbf{e}}_\vartheta + v_3 \bar{\mathbf{e}}_r) = \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial \vartheta} \bar{\mathbf{e}}_z + v_1 \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}_z}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_2}{\partial \vartheta} \bar{\mathbf{e}}_\vartheta + \\ &+ v_2 \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_3}{\partial \vartheta} \bar{\mathbf{e}}_r + v_3 \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}_r}{\partial \vartheta} = 0,\end{aligned}$$

где $\bar{\mathbf{e}}_z$, $\bar{\mathbf{e}}_r$ и $\bar{\mathbf{e}}_\vartheta$ – единичные векторы в аксиальном, радиальном и азимутальном направлениях соответственно. Эти единичные векторы соответствуют единичным векторам декартовой системы координат $\bar{\mathbf{e}}_1$, $\bar{\mathbf{e}}_2$, $\bar{\mathbf{e}}_3$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{e}}_r &= \cos \vartheta \bar{\mathbf{e}}_1 + \sin \vartheta \bar{\mathbf{e}}_2, \\ \bar{\mathbf{e}}_\vartheta &= -\sin \vartheta \bar{\mathbf{e}}_1 + \cos \vartheta \bar{\mathbf{e}}_2, \\ \bar{\mathbf{e}}_z &= \bar{\mathbf{e}}_3,\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\mathbf{e}}_r}{\partial \vartheta} &= -\sin \vartheta \bar{\mathbf{e}}_1 + \cos \vartheta \bar{\mathbf{e}}_2 = \bar{\mathbf{e}}_\vartheta, \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}_\vartheta}{\partial \vartheta} &= -\cos \vartheta \bar{\mathbf{e}}_1 - \sin \vartheta \bar{\mathbf{e}}_2 = -\bar{\mathbf{e}}_r,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{e}}_z}{\partial \vartheta} = 0.$$

Это дает

$$\frac{\partial v_1}{\partial \vartheta} \bar{\mathbf{e}}_z + \left(\frac{\partial v_3}{\partial \vartheta} - v_2 \right) \bar{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{\partial v_2}{\partial \vartheta} + v_3 \right) \bar{\mathbf{e}}_\vartheta = 0.$$

Так как каждая компонента не должна иметь азимутальной зависимости, последнее уравнение эквивалентно следующей системе граничных условий:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_2}{\partial \vartheta} + v_3 \Big|_{r=0} &= 0, \\ \frac{\partial v_3}{\partial \vartheta} - v_2 \Big|_{r=0} &= 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial \vartheta} \Big|_{r=0} &= 0.\end{aligned}$$

Пусть возмущения в потоке и оболочке представляются в виде суперпозиции бегущих волн, имеющих фиксированные частоту $\omega = 2\pi/T$ и продольное волновое число $\alpha = 2\pi/\lambda$ (T и λ – период и длина волны соответственно):

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ p \end{bmatrix} (z, \vartheta, r, t) &= \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \\ \tilde{p} \end{bmatrix} (\vartheta, r) \exp[i(\alpha z - \omega t)], \\ \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \end{bmatrix} (z, \vartheta, t) &= \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \end{bmatrix} (\vartheta) \exp[i(\alpha z - \omega t)].\end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в линеаризованные уравнения Навье – Стокса и колебаний оболочки приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}i(\alpha W - \omega) \tilde{v}_1 + W_r \tilde{v}_3 &= -i\alpha \tilde{p} + \frac{\mu_F}{\rho_F} \tilde{\nabla}^2 \tilde{v}_1, \\ i(\alpha W - \omega) \tilde{v}_2 &= \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \vartheta} + \frac{\mu_F}{\rho_F} \left(\tilde{\nabla}^2 \tilde{v}_2 - \frac{\tilde{v}_2}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial \vartheta} \right), \\ i(\alpha W - \omega) \tilde{v}_3 &= \\ &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \frac{\mu_F}{\rho_F} \left(\tilde{\nabla}^2 \tilde{v}_3 - \frac{\tilde{v}_3}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial \vartheta} \right), \\ i\alpha \tilde{v}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tilde{v}_3)}{\partial r} &= 0,\end{aligned}$$

$$K\left(R\alpha^2\tilde{u}_1 - i\alpha v\tilde{u}_3\right) - \frac{1-v}{2R}\left(\frac{\partial K}{\partial\vartheta}\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\vartheta} + K\frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial\vartheta^2}\right) -$$

$$-i\alpha\left(\frac{1+v}{2}K\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\vartheta} + \frac{1-v}{2}\frac{\partial K}{\partial\vartheta}\tilde{u}_2\right) = 0,$$

$$\alpha^2\frac{1-v}{2}RK\tilde{u}_2 - i\alpha\left(\frac{1+v}{2}K\frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial\vartheta^2} + v\frac{\partial K}{\partial\vartheta}\tilde{u}_1\right) -$$

$$-\frac{1}{R}\left(K\frac{\partial^2\tilde{u}_2}{\partial\vartheta^2} + K\frac{\partial\tilde{u}_3}{\partial\vartheta} + \frac{\partial K}{\partial\vartheta}\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\vartheta} + \frac{\partial K}{\partial\vartheta}\tilde{u}_3\right) = 0,$$

$$D\tilde{\nabla}^4\tilde{u}_3 + \tilde{L}\tilde{u}_3 + \frac{K}{R}\left(\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\vartheta} + \tilde{u}_3 + i\alpha v R\tilde{u}_1\right) -$$

$$-\frac{1}{R}\tilde{\nabla}_0^2\tilde{u}_3 + k_3\tilde{u}_3 - i\omega d_3\tilde{u}_3 -$$

$$-\omega^2\left(\rho h + \frac{1}{3}\rho_B h_B\right)\tilde{u}_3 = -\tilde{p}|_{r=R} = -\tilde{p}^R,$$

$$\tilde{v}_3|_{r=R} = \tilde{v}_3^R = -i\omega\tilde{u}_3.$$

Здесь введены операторы

$$\tilde{L} =$$

$$= \frac{D_9}{R}\left[-\alpha^2\frac{1+v}{R}\frac{\partial}{\partial\vartheta} - i\alpha^3(1-v) + \frac{2}{R^3}\frac{\partial^3}{\partial\vartheta^3}\right] +$$

$$+ \frac{D_{99}}{R^2}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} - \alpha^2 v\right),$$

$$\tilde{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \alpha^2,$$

$$\tilde{\nabla}^4 = \alpha^4 - \frac{2\alpha^2}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{R^4}\frac{\partial^4}{\partial\vartheta^4},$$

$$\tilde{\nabla}_0^2 = -\alpha^2 N_{11}^0 + 2i\alpha\frac{N_{12}^0}{R}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{N_{22}^0}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}.$$

Нормировки

Введем характерные масштабы длины \bar{L} и скорости \bar{W} и нормируем $z, r, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3$ на \bar{L} , скорости $r, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3$ на \bar{W} , время на \bar{L}/\bar{W} и давление \tilde{p} на $\rho_F \bar{W}^2$. Если использовать те же обозначения для координат, смещений, скоростей и давления, что и в размерных уравнениях выше, система уравнений примет вид

$$i(\alpha W - \omega)\tilde{v}_1 + W_r\tilde{v}_3 = -i\alpha\tilde{p} + \frac{1}{\text{Re}}\tilde{\nabla}^2\tilde{v}_1,$$

$$i(\alpha W - \omega)\tilde{v}_2 =$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\text{Re}}\left(\tilde{\nabla}^2\tilde{v}_2 - \frac{\tilde{v}_2}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\tilde{v}_3}{\partial\vartheta}\right),$$

$$i(\alpha W - \omega)\tilde{v}_3 =$$

$$= -\frac{\partial\tilde{p}}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}}\left(\tilde{\nabla}^2\tilde{v}_3 - \frac{\tilde{v}_3}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\tilde{v}_2}{\partial\vartheta}\right),$$

$$i\alpha\tilde{v}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{v}_2}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\tilde{v}_3)}{\partial r} = 0,$$

$$K\left(\alpha^2\tilde{u}_1 - i\alpha v\tilde{u}_3\right) - \frac{1-v}{2}\left(\frac{\partial K}{\partial\vartheta}\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\vartheta} + K\frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial\vartheta^2}\right) -$$

$$-i\alpha\left(\frac{1+v}{2}K\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\vartheta} + \frac{1-v}{2}\frac{\partial K}{\partial\vartheta}\tilde{u}_2\right) = 0,$$

$$\alpha^2\frac{1-v}{2}K\tilde{u}_2 - i\alpha\left(\frac{1+v}{2}K\frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial\vartheta^2} + v\frac{\partial K}{\partial\vartheta}\tilde{u}_1\right) -$$

$$-\left(K\frac{\partial^2\tilde{u}_2}{\partial\vartheta^2} + K\frac{\partial\tilde{u}_3}{\partial\vartheta} + \frac{\partial K}{\partial\vartheta}\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\vartheta} + \frac{\partial K}{\partial\vartheta}\tilde{u}_3\right) = 0,$$

$$D\tilde{\nabla}^4\tilde{u}_3 + \tilde{L}\tilde{u}_3 + K\left(\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\vartheta} + \tilde{u}_3 + i\alpha v\tilde{u}_1\right) -$$

$$-\tilde{\nabla}_0^2\tilde{u}_3 + k_3\tilde{u}_3 + d_3\tilde{u}_3^R + \tilde{p}^R = i\omega M\tilde{v}_3^R,$$

$$\tilde{v}_3^R = -i\omega\tilde{u}_3,$$

где введено число Рейнольдса

$$\text{Re} = \bar{L}\bar{W}\rho_F/\mu_F,$$

и сделана замена

$$k_3/(\rho_F\bar{W}^2) \rightarrow k_3,$$

$$D/(\bar{L}^3\rho_F\bar{W}^2) \rightarrow D,$$

$$K/(\bar{L}\rho_F\bar{W}^2) \rightarrow K,$$

$$M = (\rho h + 1/3\rho_B h_B)/(\rho_F R),$$

а операторы принимают вид

$$\tilde{L} =$$

$$= D_9\left[-\alpha^2(1+v)\frac{\partial}{\partial\vartheta} - i\alpha^3(1-v) + 2\frac{\partial^3}{\partial\vartheta^3}\right] +$$

$$+ D_{99}\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} - \alpha^2 v\right),$$

$$\tilde{\nabla}^4 = \alpha^4 - 2\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\vartheta^4},$$

$$\tilde{\nabla}_0^2 = -\alpha^2 N_{11}^0 + 2i\alpha N_{12}^0\frac{\partial}{\partial\vartheta} + N_{22}^0\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}.$$

Выбор тестовых параметров

Для численного тестирования построенной модели будет рассмотрена устойчивость течения в канале с круглым сечением и постоянной $h = h_0$ толщиной. В качестве основного будет выступать течение Пуазейля $W = W_0(1 - r^2/R^2)$, где W_0 – скорость в центре канала. Пусть также $N_{11}^0 = N_{12}^0 = N_{21}^0 = N_{22}^0 = 0$, т. е. считается, что стенки канала не находятся в предварительно нагруженном состоянии и $\rho_B = 0$. В качестве нормировочной длины берется $\bar{L} = R$ и нормировочной скорости $\bar{W} = W_0$. Пусть для определенности динамическая вязкость крови $\mu_F = 3,5 \cdot 10^{-3}$ Па·с, плотность крови $\rho_F = 1,06 \cdot 10^3$ кг/м³, а плотность стенки артерии $\rho = 1,2 \cdot 10^3$ кг/м³. При характерных радиусах сосудов $R \lesssim 20$ мм и скорости потока от $W_0 \lesssim 0,5$ м/с получается диапазон чисел Рейнольдса $Re \approx 0 \div 3 \cdot 10^3$. В дальнейшем принимается, что $R = 8$ мм и $h_0 = 0,8$ мм, что соответствует параметрам сонной артерии [52].

Разброс механических параметров стенок сосудов в литературе весьма велик, см., например, [53–56]. Это связано с тем, что стенки сосудов состоят из мышц, эластина, коллагена, фибробластов и других веществ, свойства которых сильно отличаются, а их относительные количества меняются в зависимости от возраста и состояния организма или образца. Например, при истончении среднего слоя стенки сосуда ее модуль упругости должен падать.

Из предшествующих работ известно, что увеличение коэффициента потерь способствует устойчивости течения, а коэффициент Пуассона, напротив, влияет относительно слабо. Поэтому для получения верхней оценки влияния модуля Юнга стенки на устойчивость потока коэффициент Пуассона можно принять $\nu = 0,3$, а $d_3 = k_3 = 0$. Модуль Юнга E будет считаться относительно малым, а именно $E \approx 2 \cdot 10^5$ Па. Соответственно

$$K = \frac{E}{(1 - \nu^2)\rho_F W_0^2 R} \approx 80,$$

$$D = \frac{E}{12(1 - \nu^2)\rho_F W_0^2 R^3} \frac{h_0^3}{R^3} = \frac{K}{12} \frac{h_0^2}{R^2} \approx 0,07.$$

В случае когда стенки постоянной толщины, уравнения допускают дополнительное упрощение, если возмущения представлять в виде суперпозиции волн, имеющих фиксированное азимутальное волновое число $\beta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \\ \tilde{p} \end{bmatrix}(\vartheta, r) = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{p} \end{bmatrix}(r) \exp(i\beta\vartheta),$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \end{bmatrix}(\vartheta) = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{bmatrix} \exp(i\beta\vartheta),$$

откуда получается

$$\begin{aligned} \alpha W \hat{v}_1 - W_r \hat{v}_3 + \alpha \hat{p} + \frac{i}{Re} \hat{\nabla}^2 \hat{v}_1 &= \omega \hat{v}_1, \\ \alpha W \hat{v}_2 + \frac{\beta}{r} \hat{p} + \frac{i}{Re} \left(\hat{\nabla}^2 \hat{v}_2 - \frac{\hat{v}_2}{r^2} + \frac{2\beta}{r^2} \hat{v}_3 \right) &= \omega \hat{v}_2, \\ \alpha W \hat{v}_3 + \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \frac{i}{Re} \left(\hat{\nabla}^2 \hat{v}_3 - \frac{\hat{v}_3}{r^2} + \frac{2\beta}{r^2} \hat{v}_2 \right) &= \omega \hat{v}_3, \\ \alpha \hat{v}_1 + \frac{\beta}{r} \hat{v}_2 - \frac{1}{r} \frac{\partial(r \hat{v}_3)}{\partial r} &= 0, \\ \alpha \nu \hat{u}_3 &= -\omega \left[\left(\alpha^2 + \frac{1-\nu}{2} \beta^2 \right) \hat{v}_1^R + \alpha \beta \frac{1+\nu}{2} \hat{v}_2^R \right], \\ \beta \hat{u}_3 &= -\omega \left[i \alpha \beta^2 \frac{1+\nu}{2} \hat{v}_1^R + \left(\frac{1-\nu}{2} \alpha^2 + \beta^2 \right) \hat{v}_2^R \right], \\ \frac{D(\alpha^2 + \beta^2)^2 + KC}{M} \hat{u}_3 + \frac{1}{M} \hat{p}^R &= \omega \hat{v}_3^R, \\ \hat{v}_3^R &= \omega \hat{u}_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C &= \left(\alpha^2 (\nu^2 - 1) \left[2\alpha^2 (\nu - 1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \beta^2 (i\beta - 1) \right] \right) / \left(\left[\alpha^2 (\nu - 1) - 2\beta^2 \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\beta^2 (\nu - 1) - 2\alpha^2 \right] - 2i\alpha^2 \beta^3 (\nu + 1)^2 \right) \end{aligned}$$

и сделана замена $\hat{v}_3 \rightarrow -i\hat{v}_3$ и

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}^2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2}, \\ \hat{\nabla}^4 &= (\alpha^2 + \beta^2)^2. \end{aligned}$$

Граничные условия в центре канала принимают вид

$$\beta \hat{v}_2^R - \hat{v}_3^R = 0,$$

$$\beta \hat{v}_3^R - \hat{v}_2^R = 0,$$

$$\beta \hat{v}_1^R = 0.$$

Рассмотрим случай $\beta \neq 0$ и $\beta \neq \pm 1$. Условия можно представить в виде

$$(1 - \beta^2) \hat{v}_2^R = 0,$$

$$(1 - \beta^2) \hat{v}_3^R = 0,$$

$$\hat{v}_1^R = 0,$$

откуда

$$\hat{v}_2^R = 0,$$

$$\hat{v}_3^R = 0.$$

При $\beta = 0$ имеем $\hat{v}_3^R = 0$ и $\hat{v}_2(r) = 0$. Иначе, при $\beta = \pm 1$, $\hat{v}_1^R = \hat{v}_2^R = \hat{v}_3^R = 0$.

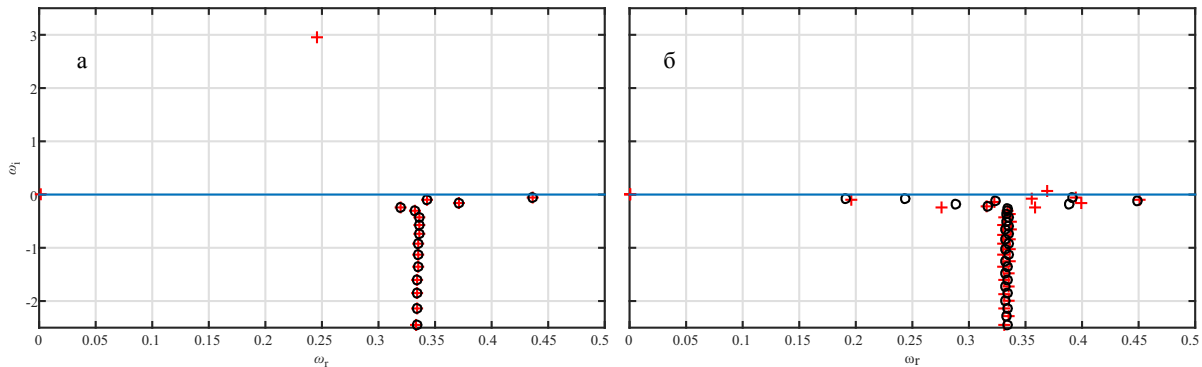
Численные результаты

Эти уравнения и граничные условия при заданных безразмерных параметрах $W(r, \vartheta)$, Re , D , K , M , α , β и ν формируют задачу на собственные значения ω , которую можно решать стандартными методами ли-

нейной алгебры. В данной работе использовался метод коллокаций, в котором в качестве узлов интерполяции выбраны корни полиномов Чебышева второго рода и точки ± 1 (точки Гаусса – Лобатто). Отображение области $\xi \in [-1; +1]$ на физическую область, занятую потоком $r \in [0; +1]$, осуществлялось с помощью преобразования координат

$$r = \frac{\xi + 1}{2}.$$

Полученная матричная задача на собственные значения решалась с помощью QZ-алгоритма [57] в среде MATLAB. В результате получается спектр собственных значений. Из них далее отбиралась «главная» часть спектра (с максимальными мнимыми частями ω_i). В области неустойчивости существует мода или несколько мод с $\omega_i > 0$. На рисунке показаны примеры главных частей спектра для каналов с твердыми и упругими стенками для случаев $\beta = 0$ и 1 при $N = 150$.



Главная часть спектра возмущений при $K = 80$, $D = 0,07$, $M = 0,0883$ (красные символы) и при наличии твердой стенки (черные символы): $\beta = 0$ (а) и $\beta = 1$ (б); $Re = 1\ 000$

Из рисунка видно, что для канала с податливыми стенками в обоих случаях имеет место неустойчивость потока, причем наибольшая неустойчивость наблюдается при $\beta = 0$. В канале с твердыми стенками неустойчивость отсутствует.

Выводы

Таким образом, на основе теории оболочек путем анализа возможных факторов, существенных для возникновения гидро-

намической неустойчивости течений в трубах с геометрическими и вязкоупругими параметрами стенок, характерными для течений в сосудах, получен ряд физических моделей описываемого явления. Выдвинуто предположение, что основным фактором, влияющим на устойчивость потока в рассматриваемом случае, являются механические свойства стенок, а пульсационность потока и его геометрия играют второстепенную роль. С целью подтверждения этого предположения проведены тестовые чис-

ленные расчеты. Получено, что при вязкоупругих параметрах, характерных для стенок артерий, в том числе при ряде патологий, может возникать неустойчивость в течении.

Список литературы

1. *Baskurt O. K., Hardeman M. R., Rampling M. W., Meiselman H. J.* Handbook of hemorheology and hemodynamics. Amsterdam: IOS Press, 2007. 465 p.
2. *Jordan P., Kerdok A. E., Howe R. D., Socrate S.* Identifying a minimal rheological configuration: A tool for effective and efficient constitutive modeling of soft tissues // *J. Biomech. Eng.* 2011. Vol. 133. No. 4. P. 041006.1–041006.11.
3. *Kim Y. H.* The numerical investigations of the rheological behaviors of nanofluids and blood flow. Detroit: Wayne State University, 2008. 165 p.
4. *Громека И. С.* О скорости распространения волнообразного движения жидкостей в упругих трубках // *Собрание сочинений.* М.: Изд-во АН СССР, 1952. С. 172–183.
5. *Hale J. F., McDonald D. A., Womersley J. R.* Velocity profiles of oscillating arterial flow, with some calculations of viscous drag and the Reynolds number // *J. Physiol.* 1955. Vol. 128. No. 3. P. 629–640.
6. *Haslam M., Zamir M.* Pulsatile flow in tubes of elliptic cross sections // *Ann. Biomed. Eng.* 1998. Vol. 26. No. 5. P. 780–787.
7. *Haddad K., Ertunç Ö., Mishra M., Delgado A.* Pulsating laminar fully developed channel and pipe flows // *Phys. Rev. E.* 2010. Vol. 81. No. 016303. P. 1–13.
8. *Womersley J. R.* Oscillatory flow in arteries: The constrained elastic tube as a model of arterial flow and pulse transmission // *Phys. Med. Biol.* 1957. Vol. 2. No. 2. P. 178–187.
9. *Womersley J. R.* Oscillatory flow in arteries. II. The reflection of the pulse wave at junctions and rigid inserts in the arterial system // *Phys. Med. Biol.* 1958. Vol. 2, No. 4. P. 313–323.
10. *Milner J. S., Moore J. A., Rutt B. K., Steinman D. A.* Hemodynamics of human carotid artery bifurcations: Computational studies with models reconstructed from magnetic resonance imaging of normal subjects // *J. Vasc. Surg.* 1998. Vol. 28. No. 1. P. 143–156.
11. *Holdsworth D. W., Norley C. J. D., Frayne R., Steinman D. A., Rutt B. K.* Characterization of common carotid artery blood flow waveforms in normal human subjects // *Physiol. Meas.* 1999. Vol. 20. No. 3. P. 219–240.
12. *Meseguer Á., Trefethen L. N.* Linearized pipe flow to Reynolds number 10^7 // *J. Comput. Phys.* 2003. Vol. 186. No. 1. P. 178–197.
13. *Garg V. K., Rouleau W. T.* Linear spatial stability of pipe Poiseuille flow // *J. Fluid Mech.* 1972. Vol. 54. No. 1. P. 113–127.
14. *Boiko A. V., Klyushnev N. V., Nechepurenko Y. M.* On stability of Poiseuille flow in grooved channels // *Europhys. Lett.* 2015. Vol. 111. No. 1. P. 14001-p1 – 14001-p6.
15. *Davey A., Drazin P. G.* The stability of Poiseuille flow in a pipe // *J. Fluid Mech.* 1969. Vol. 36. No. 2. P. 209–218.
16. *Davey A.* On the stability of flow in an elliptic pipe which is nearly circular // *J. Fluid Mech.* 1978. Vol. 87. No. 2. P. 233–241.
17. *Davey A., Salwen H.* On the stability of flow in an elliptic pipe which is nearly circular // *J. Fluid Mech.* 1994. Vol. 281. P. 357–369.
18. *Kerswell R. R., Davey A.* On the linear instability of elliptic pipe flow // *J. Fluid Mech.* 1996. Vol. 316. P. 307–324.
19. *Kumaran V.* Stability of the viscous flow of a fluid through a flexible tube // *J. Fluid Mech.* 1995. Vol. 294. P. 259–281.
20. *Tozzi J. T., Von Kerczek C. H.* The stability of oscillatory Hagen – Poiseuille flow // *J. Appl. Mech.* 1986. Vol. 53. No. 1. P. 187–192.
21. *Yang W. H., Yih C.-S.* Stability of time-periodic flows in a circular pipe // *J. Fluid Mech.* 1977. Vol. 82. No. 3. P. 497–505.
22. *Hamadiche M., Gad-el-Hak M.* Temporal stability of flow through viscoelastic tubes // *J. Fluids Struct.* 2002. Vol. 16. No. 3. P. 331–359.
23. *Thomas C., Bassom A. P., Blennerhassett P. J., Davies C.* The linear stability of oscillatory Poiseuille flow in channels and pipes // *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.* 2011. Vol. 467. No. 2133. P. 2643–2662.
24. *Thomas C., Bassom A. P., Blennerhassett P. J.* The linear stability of oscillating pipe flow // *Phys. Fluids.* 2012. Vol. 24. No. 1. P. 014106.1–014106.11.
25. *Smith D. M., Blackburn H. M.* Transient growth analysis for axisymmetric pulsatile pipe flows in a rigid straight circular pipe // *Proc. 17th Australas. Fluid Mech. Conf. Auckland,*

- New Zeal. 5–9 December 2010. Red Hook: Curran Associates, 2011. P. 321–324.
26. *Nebauer J. R. A., Blackburn H. M.* On the stability of time-periodic pipe flow // 17th Australas. FluidMechanics Conf. Auckland, New Zeal. 5–9 December 2010. Red Hook: Curran Associates, 2011. P. 325–328.
27. *Makinde O. D.* Chebyshev collocation approach to stability of blood flows in a large artery // African J. Biotechnol. 2012. Vol. 11. No. 41. P. 9881–9887.
28. *Sadrizadeh S.* Instabilities in pulsating pipe flow of shear-thinning and shear-thickening fluids. Linköping, Sweden, 2012. Report LIU-IEI-TEK-A–12/01360–SE. 38 p.
29. *Gad-El-Hak M.* Drag reduction using compliant walls // Flow Past Highly Compliant Boundaries Collapsible Tubes / ed. Carpenter P. W., Pedley T. J. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. P. 191–229.
30. *Lasheras J. C.* The biomechanics of arterial aneurysms // Annu. Rev. Fluid Mech. 2007. Vol. 39. P. 293–319.
31. *Parashar A., Singh R., Panigrahi P. K., Muralidhar K.* Chaotic flow in an aortic aneurysm // J. Appl. Phys. 2013. Vol. 113. No. 21. P. 214909.1–214909.14.
32. *Gopalakrishnan S. S., Pier B., Biesheuvel A.* Stability analyses of flow through an aneurysm: Steady and pulsatile flows // Book of Abstracts. 14th Eur. Turbul. Conf. 1–4 Sept. 2013, Lyon, France, 2013. P. 1–2.
33. *Quaini A.* Algorithms for fluid-structure interaction problems arising in hemodynamics / PhD Thesis, Lausanne: Swiss Federal Institute of Technology, 2009. 207 p.
34. *Yeo K. S.* The three-dimensional stability of boundary-layer flow over compliant walls // J. Fluid Mech. 1992. Vol. 238. P. 537–577.
35. *Бойко А. В., Кулик В. М., Филимонов В. А.* Устойчивость пограничного слоя плоской пластины над податливыми покрытиями повышенной прочности // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Физика. 2011. Т. 6, вып. 4. С. 25–41.
36. *Soedel W.* Vibrations of shells and plates. 3rd ed. New York: Marcel Dekker, 2004. 577 p.
37. *Lucey A. D., Carpenter P. W.* Boundary layer instability over compliant walls: Comparison between theory and experiment // Phys. Fluids. 1995. Vol. 7. No. 10. P. 2355–2363.
38. *Carpenter P. W., Lucey A. D., Dixon A. E.* The optimisation of compliant walls for drag reduction // Recent Developments in Turbulence Management / ed. Choi K.-S. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1991. P. 195–221.
39. *Carpenter P. W., Davies C., Lucey A. D.* Hydrodynamics and compliant walls: Does the dolphin have a secret? // Curr. Sci. 2000. Vol. 79. No. 6. P. 758–765.
40. *Zengl M., Rist U.* Linear-stability investigations for flow-control experiments related to flow over compliant walls // Nature-inspired fluid Mech. Results DFG Prior. Program. 1207 «Nature-inspired Fluid Mech. 2006–2012» / ed. Tropea C., Bleckmann H. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2012. P. 223–237.
41. *Costalat V., Sanchez M., Ambard D., Thines L., Lonjon N., Nicoud F., Brunel H., Lejeune J. P., Dufour H., Bouillot P., Lhalcky J. P., Kouri K., Segnarbieux F., Maurage C. A., Lobotesis K., Villa-Uriol M. C., Zhang C., Frangi A. F., Mercier G., Bonafé A., Sarry L., Jourdan F.* Biomechanical wall properties of human intracranial aneurysms resected following surgical clipping (IRRAs Project) // J. Biomech. 2011. Vol. 44. No. 15. P. 2685–2691.
42. *Hasegawa H., Kanai H.* Investigation on elasticity-based tissue characterization of arterial wall // Ann. nanoBME. 2008. Vol. 1. P. 25–34.
43. *Čanić S., Tambača J., Guidoboni G., Mikelić A., Hartley C. J., Rosenstrauch D.* Modeling viscoelastic behavior of arterial walls and their interaction with pulsatile blood flow // SIAM J. Appl. Math. 2006. Vol. 67. No. 1. P. 164–193.
44. *Kaplan R. E.* The stability of laminar incompressible boundary layers in the presence of compliant boundaries: PhD Thesis. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, 1964. 179 p.
45. *Ash R. L.* On the theory of compliant wall drag reduction in turbulent boundary layers // Contractor Report. 1974. No. 2387. 41 p.
46. *Kornecki A.* Static and dynamic instability of panels and cylindrical shells in subsonic potential flow // J. Sound Vib. 1974. Vol. 32. No. 2. P. 251–263.
47. *Miles J.* Stability of inviscid shear flow over a flexible boundary // J. Fluid Mech. 2001. Vol. 434. P. 371–378.
48. *Garrad A. D., Carpenter P. W.* A theoretical investigation of flow-induced instabili-

ties in compliant coatings // *J. Sound Vib.* 1982. Vol. 85. No. 4. P. 483–500.

49. *Carpenter P. W., Garrad A. D.* The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Part 1. Tollmien – Schlichting instabilities // *J. Fluid Mech.* 1985. Vol. 155. P. 465–510.

50. *Guaus A., Bottaro A.* Instabilities of the flow in a curved channel with compliant walls // *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.* 2007. Vol. 463. No. 2085. P. 2201–2222.

51. *Boiko A. V., Grek G. R., Dovgal A. V., Kozlov V. V.* Physics of transitional shear flows. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 300 p.

52. *Black J., Hastings G.* Handbook of biomaterial properties Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. 614 p.

53. *Zhang D., Eggleton C. D., Arola D. D.* Evaluating the mechanical behavior of arterial tissue using digital image correlation // *Exp. Mech.* 2002. Vol. 42. No. 4. P. 409–416.

54. *Hučko B.* Experimental measurement of arterial mechanical properties // *Proc. 11th Pan-American Congr. Appl. Mech.* January 04-08, 2010, Foz do Iguacu, PR, Brazil. 2010. No. 1. P. 1–5.

55. *Kojima M., Tercero C., Ikeda S., Sakai Y., Fukuda T., Arai F., Negoro M.* Numerical simulation for blood flow in Internal Carotid Artery for integration with photoelastic stress analysis // *Proc. 2010 Int. Symp. Micro-NanoMechatronics Hum. Sci.* New York: IEEE, 2010. P. 384–389.

56. *Jogestrand T., Eiken O., Nowak J.* Relation between the elastic properties and intima-media thickness of the common carotid artery // *Clin. Physiol. Funct. Imaging.* 2003. Vol. 23. No. 3. P. 134–137.

57. *Moler C. B., Stewart G. W.* An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems // *SIAM J. Numer. Anal.* 1973. Vol. 10. No. 2. P. 241–256.

Материал поступил в редколлегию 13.10.2015

A. V. Boiko

*Institute of Theoretical and Applied Mechanics of SB RAS
4/1 Institutskaya Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation*

*Tyumen State Oil and Gas University
56 Volodarskiy Str., Tyumen, 625500, Russian Federation*

boiko@itam.nsc.ru

ON MODELLING THE STABILITY OF FLUID FLOWS IN COMPLIANT PIPES APPLIED TO HEMODYNAMIC PROBLEMS

The study is directed to formulate physical models adequate to describe mechanisms of interactions of compliant walls of pipes and hydrodynamic disturbances aiming to reveal the conditions responsible for hydrodynamic instability in hemodynamic problems.

Keywords: compliant coatings, pipe flow, hydrodynamic instability, hemodynamics.