

А. В. Аржанников, И. А. Котельников

*Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия*

Arzhannikov@phys.nsu.ru, kia999@mail.ru

МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ О ВОЗБУЖДЕНИИ КОРАБЕЛЬНЫХ ВОЛН ПОДВОДНЫМ ОБЪЕКТОМ

Предложен метод решения задачи о возбуждении корабельных волн невязкой жидкости погруженным объектом, который движется с переменной скоростью. Для сравнения с имеющимися в литературе результатами в качестве теста предложенного метода проведено детальное рассмотрение случая, когда заглубленный шар движется с постоянной скоростью параллельно поверхности жидкости. Для этого примера получены асимптотические выражения, описывающие вертикальное смещение поверхности жидкости в пределе малых и больших значений числа Фруда. Проведено их сравнение с полученным нами точным решением, которое представлено в виде двух слагаемых, каждое из которых приведено к одномерному интегралу. Одно слагаемое описывает «горб Бернулли», а другое – «клин Кельвина».

Ключевые слова: гравитационные волны, корабельные волны, клин Кельвина, горб Бернулли, погруженный объект.

Введение

Задача о возбуждении корабельных волн движущимся судном имеет давнюю историю, начинающуюся с работы Уильяма Томсона (лорда Кельвина) 1891 г. [1], за которой последовали детальные исследования волн на глубокой воде [2; 3]. Применяв открытый им метод стационарной фазы [4], Кельвин показал, что гравитационные волны на поверхности воды, возбуждаемые небольшим судном, движущимся прямолинейно с постоянной скоростью, распространяются позади судна в пределах клина с углом раствора $\theta_K = \arcsin(1/3) \approx 19,47^\circ$. Элементарное объяснение этому факту можно найти в § 3.10 монографии Джеймса Лайтхилла [5]. Ключевой вклад в развитие теории корабельных волн внесли Томас Хавелок [6–9], Гораций Лэмб [10; 11], Эйнар Хогнер [12; 13], А. С. Петерс [14], Ф. Урселл [15]. На той ранней стадии развития теории воздействие судна на поверхность воды моделировалось источником

внешнего давления, в простейшем случае симметричного относительно своего центра, движущегося с постоянной скоростью. Основной задачей теории в то время было вычисление силы волнового сопротивления при движении судна. Это сопротивление возникает за счет возбуждения волн на поверхности жидкости, которые уносят часть механической энергии поступательного движения судна.

Позднее, вероятно в связи с развитием подводного военного флота, возник интерес к задаче возбуждения корабельных волн объектом, движущимся ниже поверхности жидкости, что вызвало интенсивное развитие численных методов расчета. Мы сознательно не будем обсуждать такие методы расчета; о них можно составить некоторое представление по публикациям в открытой печати [16–24] и немногим раскритикованным докладам [25–28].

В последние годы наблюдается рост числа публикаций по теме корабельных волн. Большую активность проявляют китайские

исследователи [22; 29–37]. В числе прочего они рассматривают влияние ветра и конечной глубины моря на корабельные волны [31]. Анализируя космические снимки из Google Earths [38], Марк Рабауд и Фредерик Мойси недавно обнаружили [39], что угол раствора клина Кельвина θ_K уменьшается приблизительно обратно пропорционально скорости судна V , если число Фруда F становится больше 0,5. Число Фруда $F = V / \sqrt{gL}$ они определяли как отношение скорости V к квадратному корню из произведения ускорения свободного падения g на длину судна L . Эти же авторы объяснили эффект уменьшения θ_K , приняв во внимание тот факт, что в спектре волн, возбуждаемых судном, должны доминировать волны с длиной волны порядка длины судна [40]. Несколько ранее похожий эффект был замечен в численных расчетах [31]. Открытие Рабауда и Мойси породило волну новых публикаций [41–49; 37].

Аналитическая теория генерации корабельных волн скоростными подводными объектами развита существенно менее детально, нежели надводными. Лэмб [10] и Хавелок [7] более 100 лет назад построили решение для цилиндра, который движется параллельно поверхности невязкой жидкости перпендикулярно своей оси. Хавелок своим методом решил трехмерную задачу для заглубленного шара [7; 8] и вычислил силу волнового сопротивления. В окончательном виде [8] полученное им выражение для возвышения ζ свободной поверхности жидкости (т. е. ее смещения по вертикали, вызванного движением шара) содержит два слагаемых, одно из которых включает однократный, а второе двукратный интегралы, причем первый член удается вычислить в аналитическом виде. Эти слагаемые не имеют ясного физического смысла. В частности, они не обращаются в ноль, если скорость шара V стремится нулю, тогда как возвышение поверхности жидкости в этом случае должно быть всюду равно нулю. Иными словами, ζ вычисляется как результат почти полного взаимного сокращения двух больших слагаемых. По этой причине формулы Хавелока малопригодны для получения оценок и практических вычислений.

Других точных (в линейном приближении) решений за прошедшее столетие не было найдено. Более того, даже решение Хавелока детально не исследовано. Нам не известны даже попытки численно оценить интеграл в его формуле для ζ . Различные обобщения теории Хавелока [9; 50–53] преимущественно нацелены на вычисление силы волнового сопротивления.

В настоящей работе предложено новое решение задачи о возбуждении корабельных волн при поступательном движении заглубленного шара. В отличие от большинства цитированных выше работ, которые сосредоточены на вычислении волнового сопротивления движущемуся объекту, нашей целью является вычисление возвышения ζ свободной поверхности жидкости, а не волнового сопротивления. Мы получили новое выражение для ζ . Как и в решении Хавелока, оно содержит два члена. Но в нашем решении каждый член содержит однократный интеграл и обращается в ноль при $V \rightarrow 0$. В пределе малых и больших чисел Фруда

$$F = V / \sqrt{gh}, \quad (1)$$

где h – глубина погружения шара, эти интегралы удастся вычислить и получить сравнительно простые асимптотические выражения для ζ . Исследование этих асимптотик показывает, что первое слагаемое можно интерпретировать как описывающее «горб Бернулли» (Bernoulli Hump), а второе слагаемое – «клин Кельвина» (Kelvin wedge).

В отличие от Хавелока, мы не вводим искусственную вязкость, чтобы обеспечить сходимость интегралов. Мы начинаем с того, что записываем решение нестационарной задачи, предполагая, что когда-то в прошлом шар был неподвижен. Переходя в нашем решении к пределу движения с постоянной скоростью, мы автоматически получаем правило обхода особенности в подынтегральном выражении, которое совершенно аналогично правилу обхода Ландау в физике плазмы [54–56]. Сама же особенность в подынтегральном выражении соответствует черенковскому резонансу

$$V \cos \theta = \omega / k, \quad (2)$$

который порождает гравитационные волны с частотой

$$\omega = \sqrt{gk} \quad (3)$$

и волновым вектором \mathbf{k} , составляющим угол θ с направлением скорости. В отличие от черенковского излучения электромагнитных волн в оптике [57–59], где фазовая скорость ω/k имеет строго определенное значение (равное скорости света в среде), вследствие дисперсии скорости гравитационные волны излучаются во всем диапазоне углов θ от 0 (вперед по направлению движения тела) до π (против направления движения). Каждому значению угла θ отвечает определенное значение волнового числа

$$k(\theta) = \frac{g}{V^2 \cos^2 \theta}. \quad (4)$$

Как следствие, наименьшее волновое число (т. е. наибольшая длина волны), совместимое с условием черенковского резонанса, есть

$$k_g = g / V^2. \quad (5)$$

Следует пояснить, что понятие черенковского резонанса в теории корабельных волн не употребляется. Вместо него говорят об условии стационарности (the stationary condition).

Далее мы будем придерживаться следующего плана изложения. В разделе «Гравитационная волна на поверхности жидкости» для удобства воспроизведем в сокращенном виде вывод уравнения таких волн, следуя работе [60], чтобы напомнить основные предположения, положенные в основу теории. В следующем разделе мы построим общее решение задачи о возбуждении корабельных волн нестационарным (переменным) источником давления на поверхности жидкости. Затем, в разделе «Возбуждение корабельной волны заглубленным шаром», покажем, как перенести это решение на случай заглубленного объекта. В разделе «Преобразование Петерса» мы завершим вывод формул для возвышения поверхности жидкости, выполнив преобразование контура интегрирования, которое мы назвали преобразованием Петерса в честь его работы [14]. В последующих двух разделах получим приближенные формулы для предельных случаев $F \ll 1$ и $F \gg 1$ соответственно. В разделе «Профиль корабельной

волны» обсудим качественные различия в форме поверхности жидкости при разных значениях числа Фруда. В Заключении представим выводы. В Приложении А покажем, как из наших формул получаются формулы Хавелока.

Гравитационная волна на поверхности жидкости

Допустим, что движение жидкости можно считать потенциальным, так что ее скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ в любой точке в любой момент времени может быть выражена через градиент потенциала $\phi(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{v} = \nabla \phi. \quad (6)$$

Условия такого приближения подробно изложены в 6-м томе «Курса теоретической физики» [60]. Кроме того, будем полагать, что скорость течения существенно меньше скорости звука в жидкости, поэтому жидкость можно рассматривать как несжимаемую среду. Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

и потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \phi = 0.$$

В потенциальном течении несжимаемой жидкости скорость связана с давлением p и плотностью ρ уравнением

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = f(t),$$

где $f(t)$ – произвольная функция времени, а слагаемое ρgz добавлено, чтобы учесть гравитационное поле. Здесь и далее мы выбираем декартову систему координат, в которой плоскость xy лежит на равновесной поверхности жидкости, а ось z направлена вертикально вверх. В рамках линейного приближения слагаемое $1/2 v^2$ в последнем уравнении можно отбросить, поскольку оно содержит квадрат скорости. Функцию $f(t)$ можно исключить, переопределив потенциал ϕ (добавление к ϕ функции одного только времени не меняет \mathbf{v}). Однако мы заменим $f(t)$ константой p_0 / ρ , которую чуть позже выберем так, чтобы упростить последующие преобразования. Тогда

$$p = p_0 - \rho gz - \rho \partial \phi / \partial t. \quad (7)$$

Обозначим через ζ координату z точки на поверхности жидкости; ζ является функцией

трех переменных: x , y и t . В равновесии $\zeta = 0$. При колебаниях поверхности ζ задает вертикальное смещение поверхности.

Пусть на поверхность жидкости действует постоянное давление p_0 . Тогда, в соответствии с уравнением (7), на этой поверхности имеет место соотношение

$$g\zeta(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, y, \zeta, t) = 0. \quad (8)$$

Если величина вертикального смещения ζ мала по сравнению с длиной волны колебаний, вертикальная компонента скорости точки на поверхности приблизительно равна производной по времени от ζ :

$$v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (9)$$

С другой стороны, $v_z = \partial \phi / \partial z$, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \phi(x, y, \zeta, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \zeta(x, y, t) = \\ &= -\frac{1}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(x, y, \zeta, t). \end{aligned}$$

Для колебаний с малой амплитудой мы можем заменить в последнем уравнении значения производных потенциала при $z = \zeta$ на их значения при $z = 0$. Так мы приходим к системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных для описания движения жидкости в гравитационном поле:

$$\nabla^2 \phi(x, y, z, t) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi(x, y, 0, t) + \frac{1}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(x, y, 0, t) = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим волны на поверхности жидкости, площадь которой неограничена, а глубина велика по сравнению с любой длиной волны, представляющей интерес. Этот случай называется приближением глубокой жидкости. В глубокой жидкости вместо постановки граничного условия на дне водоема накладывают требование, что $\phi \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$.

Отдельную волну на поверхности жидкости удобно характеризовать двумерным волновым вектором

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0).$$

Частное решение, соответствующее волне с круговой частотой ω , можно искать в виде

$$\phi = \Phi(z) \cos(k_x x + k_y y - \omega t).$$

Подставляя это выражение в уравнение (10), получаем уравнение

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - (k_x^2 + k_y^2) \Phi = 0$$

на функцию $\Phi(z)$. Его решение, убывающее вглубь жидкости, пропорционально $\exp(kz)$ с показателем экспоненты

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \quad (12)$$

имеющим смысл волнового числа. Следовательно,

$$\phi = \phi_k e^{kz} \cos(k_y y + k_x x - \omega t), \quad (13)$$

где ϕ_k – амплитуда потенциала, не зависящая от x , y , z и t . Полученное решение должно также удовлетворять граничному условию (11). Подставляя туда (13), получаем дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = kg \quad (14)$$

между волновым числом и частотой гравитационной волны.

Наконец, возвышение ζ поверхности можно найти, подставляя (13) в уравнение (8), где второй член вновь можно взять при $z = 0$. Это дает

$$\zeta = -\phi_k \frac{k}{\omega} \sin(k_x x + k_y y - \omega t). \quad (15)$$

Произвольное решение системы линейных уравнений (10) и (11) можно составить из суперпозиции частных решений (13), (15). Мы воспользуемся этим обстоятельством.

Возбуждение корабельной волны источником давления

Найдем решение уравнение Лапласа (10) для потенциала скорости с граничными условиями

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi(x, y, 0, t) = \frac{\partial}{\partial t} \zeta(x, y, t), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, y, 0, t) + g\zeta(x, y, t) &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \delta p(x, y, t), \end{aligned} \quad (17)$$

в плоскости $z = 0$, где задано внешнее поле давления $\delta p(x, y, t)$. Общее решение уравнения Лапласа, убывающее при $z \rightarrow -\infty$, записываем в виде

$$\phi(x, y, z, t) = \iint \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \phi_k(t) e^{kz + ik_x x + ik_y y}. \quad (18)$$

где $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Аналогично записываем возвышение поверхности

$$\zeta(x, y, t) = \iint \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \zeta_k(t) e^{ik_x x + ik_y y} \quad (19)$$

и внешнее давление

$$\delta p(x, y, t) = \iint \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \delta p_k(t) e^{ik_x x + ik_y y}. \quad (20)$$

Для ζ_k и ϕ_k из граничных условий получаем уравнения

$$k\phi_k(t) = \frac{\partial}{\partial t} \zeta_k(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_k(t) + g\zeta_k(t) = -\frac{1}{\rho} \delta p_k(t).$$

Исключая из них $\phi_k(t)$, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка на функцию $\zeta_k(t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \zeta_k(t) + kg\zeta_k(t) = -\frac{k}{\rho} \delta p_k(t). \quad (21)$$

Предположим, что в далеком прошлом внешнее давление отсутствовало и, следовательно, поверхность жидкости была совершенно плоской. При такой постановке задачи нужно считать, что $\zeta_k(t) \rightarrow 0$ и $\partial \zeta_k(t) / \partial t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$. Соответствующее решение уравнения (21) имеет вид

$$\zeta_k(t) = \frac{\sqrt{kg}}{\rho g} \int_{-\infty}^t \sin[\sqrt{kg}(\tau - t)] \delta p_k(\tau) d\tau. \quad (22)$$

Далее учтем, что

$$\delta p_k(t) = \iint dx dy \delta p(x, y, t) e^{-ik_x x - ik_y y}. \quad (23)$$

Сходимость интеграла в (22) для более-менее реалистичных функций $\delta p(x, y, t)$ гарантируется тем фактом, что $\delta p(x, y, t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow -\infty$. Чтобы перейти к случаю движения с постоянной скоростью, сохранив при этом сходимость интеграла (22) на нижнем пределе, выберем функцию $\delta p(x, y, t)$ в подходящем виде, добавив множитель $\exp(\mu t)$ с параметром $\mu > 0$:

$$\delta p(x, y, t) = e^{\mu t} \hat{\delta p}(x - Vt, y); \quad (24)$$

позднее мы устремим μ к нулю. Подставляя функцию (24) в интеграл (23), сделаем замену $x \rightarrow x + Vt$, которая соответствует переходу в движущуюся систему отсчета, сопутствующую источнику давления. В результате находим, что

$$\delta p_k(t) = e^{\mu - ik_x Vt} \hat{\delta p}_k, \quad (25)$$

где

$$\hat{\delta p}_k = \iint dx dy \delta \hat{p}(x, y) e^{-ik_x x - ik_y y}. \quad (26)$$

После подстановки (25) в (22) интеграл по времени легко вычисляется и мы получаем

$$\zeta_k(t) = -\frac{k \hat{\delta p}_k}{(kg - (k_x V + i\mu)^2)} e^{\mu - ik_x Vt}. \quad (27)$$

Подставляя этот результат в (19), находим, что в неподвижной системе отсчета

$$\zeta(x, y, t) = -\frac{1}{\rho} \iint \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \frac{k \hat{\delta p}_k e^{\mu + ik_x(x - Vt) + ik_y y}}{kg - (k_x V + i\mu)^2}.$$

В системе отсчета, движущейся вместе с источником давления, в пределе $\mu \rightarrow 0$ получаем стационарную волну:

$$\zeta(x, y, t) = -\frac{1}{\rho} \iint \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \frac{k \hat{\delta p}_k e^{ik_x x + ik_y y}}{kg - (k_x V + i0)^2}. \quad (28)$$

Этот результат совпадает с формулой (2.17b) из статьи [50], если учесть, что там рассматривалось движение в отрицательном направлении оси x , и поэтому нужно сделать замену $V \rightarrow -V$. В других статьях [42; 43] аналогичные формулы приведены без вывода, но там другой знак перед $ik_x x + ik_y y$ в показателе экспоненты. По-видимому, указанное отличие не существенно для профилей давления, обладающих определенной симметрией.

Добавка $i0$ в знаменателе подынтегрального выражения в (28) символизирует, что особенность подынтегрального выражения в действительности смещена с контура интегрирования в комплексную плоскость. Таким образом, $i0$ в знаменателе дает правило обхода особенности, аналогичное правилу обхода Ландау в теории колебаний плазмы. Мы получили это правило совершенно тем же методом, что и Ландау [54; 55], а именно: мы исследовали процесс возбуждения гравитационных волн, решая начальную задачу с того момента, когда шар еще был неподвижен. Параметр $\mu > 0$ был введен лишь для того, чтобы совершить предельный переход к случаю движения с постоянной скоростью.

Интересно, что Лэмб, столкнувшись с проблемой расходимости интеграла из-за особенности на контуре интегрирования [10; 11], без каких-либо пояснений интерпретировал интеграл в смысле главного зна-

чения, но добавил к результату слагаемое, которое в сумме с интегралом обратило в ноль возвышение поверхности жидкости далеко впереди источника внешнего давления. Таким способом он получил правильный результат, но упустил возможность открыть правило обхода Ландау, которое нашло применение в самых разных областях физики (см., например, [61]).

Возбуждение корабельной волны заглубленным шаром

Пусть шар с радиусом a движется со скоростью V на глубине h ниже равновесной поверхности жидкости. Вновь используем декартову систему координат x, y, z , введенную в предыдущем разделе. Будем считать, что шар движется параллельно оси x прямолинейно, но, вообще говоря, с переменной скоростью $V(t) = dX(t)/dt$.

Предполагая, что $h \gg a$, будем искать решение уравнения Лапласа (10) в виде суммы

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 \quad (29)$$

потенциала ϕ_0 , который является решением задачи о движении тела в неограниченной жидкости [60], и добавки ϕ_1 , которая необходима для выполнения граничных условий на поверхности жидкости. Суммарный потенциал ϕ и возвышение (вертикальное смещение) поверхности ζ удовлетворяют граничным условиям (16) и (17), в которых нужно приравнять нулю внешнее давление δp :

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi(x, y, 0, t) = \frac{\partial}{\partial t} \zeta(x, y, t), \quad (30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(x, y, 0, t) + g\zeta(x, y, t) = 0. \quad (31)$$

Обозначая текущую координату x центра шара через $X(t)$, заметим, что первую часть потенциала

$$\begin{aligned} \phi_0(x, y, z, t) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{a^3 V(t) / 2}{\sqrt{(x - X(t))^2 + y^2 + (z + h)^2}} \end{aligned} \quad (32)$$

при $z > -h$ можно представить в виде интеграла

$$\begin{aligned} \phi_0(x, y, z, t) &= \\ &= \iint \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} e^{-kz + ik_x x + ik_y y} \phi_k^{(0)}(t), \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\phi_k^{(0)}(t) = \frac{a^3 V(t)}{2} \frac{ik_x}{k} (2\pi) e^{-kh - ik_x X(t)}. \quad (34)$$

Далее используем дополнительное предположение, что в далеком прошлом тело покоилось до начала движения, т. е. $V(-\infty) = 0$ и, следовательно, $\phi_k^{(0)}(-\infty) = 0$. Существенно, что из-за множителя e^{-kz} подынтегральное выражение в (33) нарастает вглубь жидкости. Напротив, для ϕ_1 нужно взять решение, убывающее при $z \rightarrow -\infty$, как это сделано в предыдущем разделе. Поэтому по аналогии с формулой (18) имеем

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y, z, t) &= \\ &= \iint \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} e^{kz + ik_x x + ik_y y} \phi_k^{(1)}(t). \end{aligned} \quad (35)$$

Подставив теперь формулы (19), (33) и (35) в граничные условия (16) и (17) при $\delta p(x, y, t) = 0$ и исключив $\phi_k^{(1)}$, получим уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \zeta_k(t) + kg\zeta_k(t) = -2k \frac{\partial}{\partial t} \phi_k^{(0)}(t) \quad (36)$$

на функцию $\zeta_k(t)$. Поскольку оно отличается от уравнения (21) заменой $-k\delta p_k / \rho$ в правой части на $-2k\partial\phi_k / \partial t$, все результаты, полученные в предыдущем разделе 3, переносятся на рассматриваемый случай при помощи замены $\delta p_k / \rho \rightarrow 2\partial\phi_k / \partial t$. Делая эту замену в формуле (22) и интегрируя затем по частям с учетом условия $\phi_k^{(0)}(-\infty) = 0$, находим, что

$$\begin{aligned} \zeta_k(t) &= \\ &= -2k \int_{-\infty}^t \cos[\sqrt{kg}(\tau - t)] \phi_k^{(0)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (37)$$

Подставляя выражение (34) в формулу (37), сделаем замену $X(t) = Vt$, $V(t) = Ve^{\mu t}$ с $\mu > 0$, чтобы перейти к пределу равномерного движения из начального состояния $V(-\infty) = 0$. Тогда интеграл по времени удаётся вычислить в общем виде:

$$\zeta_k = 2\pi a^3 e^{-kh - ik_x Vt + \mu t} \frac{k_x V (k_x V + i\mu)}{(k_x V + i\mu)^2 - kg}.$$

В пределе $\mu \rightarrow 0$ в этом выражении нужно сохранить след от μ только в знаменателе, поскольку он обращается в ноль, если

$$kg = k_x^2 V^2.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \zeta(x, y, t) = & \\ = 2\pi a^3 \iint \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \frac{k_x^2 V^2 e^{-kh+ik_x(x-Vt)+ik_y y}}{(k_x V + i0)^2 - kg}, \end{aligned}$$

где слагаемое $i0$ в знаменателе дает правило обхода особенности, аналогичное правилу обхода Ландау в теории колебаний плазмы.

Мы получили это правило совершенно тем же методом, как оно было получено Ландау, а именно: мы рассматривали процесс возбуждения корабельных волн, решая начальную задачу с того момента, когда шар еще был неподвижен. Параметр $\mu > 0$ был введен лишь для того, чтобы совершить предельный переход к случаю движения с постоянной скоростью.

В последнем полученном выражении сделаем замену $x \rightarrow x + Vt$, чтобы перейти в систему отсчета движущегося шара:

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) = & \\ = \iint \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} (2\pi) a^3 \frac{k_x^2 V^2 e^{-kh+ik_x x+ik_y y}}{(k_x V + i0)^2 - kg}. \end{aligned} \quad (38)$$

Экспоненциальный множитель e^{-kh} в подынтегральном выражении в (38) вносит естественный масштаб волнового числа $k_h \sim 1/h$. Другой масштаб $k_g \sim g/V^2$ определяет координата особенности в подынтегральном выражении. Поэтому следует ожидать, что в функции $\zeta(x, y)$ будут доминировать длины волн $\lambda_h \sim h$ и $\lambda_g \sim V^2/g$.

Укажем, что формулы Хавелока для возвышения поверхности [7; 8] можно получить, если в (37) выполнить еще одно интегрирование по частям.

Преобразование Петерса

Переходя к вычислению интеграла (38), вначале выполним интегрирование по переменной k_x :

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) = & \\ = \frac{a^3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{ik_y y} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \frac{k_x^2 V^2 e^{-kh+ik_x x}}{(k_x V + i0)^2 - kg}. \end{aligned} \quad (39)$$

Подынтегральное выражение в

$$\int_{C_0} dk_x \frac{k_x^2 V^2 e^{-kh+ik_x x}}{(k_x V + i0)^2 - kg} \quad (40)$$

имеет полюса первого порядка в точках

$$\begin{aligned} k_x = \pm k_0, \\ k_0 = \frac{g}{\sqrt{2}V^2} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4k_y^2 V^4 / g^2}}, \end{aligned} \quad (41)$$

где обращается в ноль знаменатель подынтегрального выражения. Если учесть мнимую добавку $i0$ в знаменателе, то полюса будут смещены с вещественной оси $\text{Re} k_x$. Смещение происходит в нижнюю половину комплексной плоскости $k_x = \text{Re} k_x + i \text{Im} k_x$, если $V > 0$, и в ее верхнюю половину, если $V < 0$. Это означает, что контур интегрирования в (40) обходит эти точки сверху при $V > 0$ и снизу при $V < 0$. Остановимся подробнее на случае $V > 0$, для которого контур интегрирования C_0 показан на рис. 1.

Чтобы преобразовать интеграл к виду, более пригодному для вычислений, деформируем исходный контур C_0 , смещая его в верхнюю или нижнюю полуплоскости комплексной переменной k_x . При таком смещении контур интегрирования «зацепляется» за особенности подынтегрального выражения. Кроме полюсов первого порядка $k_x = \pm k_0$, подынтегральное выражение в (40) в комплексной плоскости k_x имеет две точки ветвления $k_x = \pm i \sqrt{k_y^2}$, в которых $k = 0$.

Выбирая ту ветвь квадратного корня $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, которая положительна при вещественных k_x, k_y , проведем разрезы вдоль мнимой оси из точки ветвления $k_x = +i \sqrt{k_y^2}$ в верхней полуплоскости $\text{Im} k_x > 0$ вверх до $k_x = +i\infty$, а в нижней полуплоскости $\text{Im} k_x < 0$ – из точки $k_x = -i \sqrt{k_y^2}$ вниз.

Согласно лемме Жордана [62. С. 232], интеграл по полуокружности бесконечного радиуса в верхней полуплоскости обращается в ноль, если $x > 0$, тогда как интеграл по бесконечной полуокружности в нижней полуплоскости обращается в ноль, если $x < 0$.

Дополняя исходный контур интегрирования C_0 такими окружностями, с помощью основной теоремы вычетов [62. С. 232] нетрудно доказать, что интеграл по контуру C_0 при $x > 0$ равен интегралу по контуру C_1 , который проходит по берегам разреза

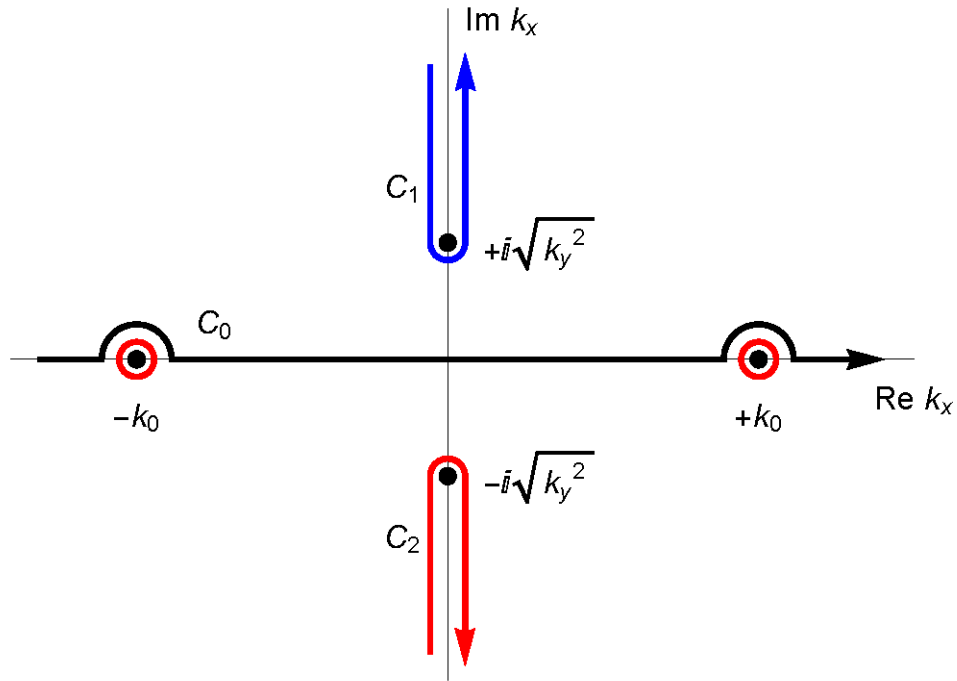


Рис. 1. Контур интегрирования в комплексной плоскости k_x при $V > 0$: исходный контур интегрирования C_0 (черная линия) обходит сверху полюса подынтегрального выражения в точках $k_x = \pm k_0$; при $x > 0$ деформированный контур C_1 (синяя линия) в верхней полуплоскости приходит из бесконечности $+i\infty$ по левому берегу разреза $[i\sqrt{k_y^2}, i\infty)$, обходит снизу точку ветвления $k_x = +i\sqrt{k_y^2}$ и уходит на бесконечность по правому берегу разреза; при $x < 0$ деформированный контур C_2 (красная линия) обходит вокруг полюсов в точках $k_x = \pm k_0$ в направлении часовой стрелки и проходит по берегам разреза $[-i\sqrt{k_y^2}, -i\infty)$, обходя сверху точку ветвления $k_x = -i\sqrt{k_y^2}$ в нижней полуплоскости

в верхней полуплоскости, как показано на рис. 1. Действительно, соединив контуры C_0 и C_1 дугами бесконечной полуокружности, получим замкнутый контур. Интеграл по такому контуру равен нулю, поскольку не содержит полюсов внутри. С другой стороны, он равен разности интегралов по контурам C_0 и C_1 , поскольку интеграл по бесконечной полуокружности равен нулю. Следовательно,

$$\int_{C_0} dk_x(\dots) - \int_{C_1} dk_x(\dots) = 0, \quad (42)$$

если $x > 0$. Таким же способом можно доказать, что при $x < 0$ разность интегралов по контурам C_0 и C_2 равна сумме вычетов в полюсах $k_x = \pm k_0$, умноженной на $-2\pi i$, поскольку эти полюсы попадают внутрь замкнутого контура, который обходит их в

отрицательном направлении (в направлении часовой стрелки):

$$\begin{aligned} \int_{C_0} dk_x(\dots) - \int_{C_2} dk_x(\dots) &= \\ &= -2\pi i \sum_{k_x = \pm k_0} \text{Res}(\dots). \end{aligned} \quad (43)$$

Интеграл по контуру C_1 при $x > 0$ запишем в виде суммы интегралов по левому и правому берегам разреза в верхней полуплоскости:

$$\int_{C_1} dk_x(\dots) = \int_{i\infty-0}^{i\sqrt{k_y^2}-0} dk_x(\dots) + \int_{i\sqrt{k_y^2}+0}^{i\infty+0} dk_x(\dots).$$

В интеграле по левому берегу (первое слагаемое) сделаем замену $k_x = i\sqrt{k^2 + k_y^2} - 0$, при этом $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = -i\sqrt{k^2} = ik$, если условиться, что на этом берегу $x < 0$. В интеграле по правому берегу (второе слага-

гаемое) сделаем замену $k_x = i\sqrt{\kappa^2 + k_y^2} + 0$, при этом $k = +i\sqrt{\kappa^2} = i\kappa$, если здесь $\kappa > 0$. Таким образом, первое слагаемое преобразуется к интегралу по κ от $-\infty$ до 0 , а второе – от 0 до $+\infty$. Учитывая также, что $k_x dk_x = -\kappa d\kappa$, имеем

$$\int_{C_1} dk_x(\dots) = \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{i\kappa\sqrt{\kappa^2 + k_y^2} e^{-i\kappa h - \sqrt{\kappa^2 + k_y^2} x}}{\kappa^2 + k_y^2 + i\kappa g / V^2}. \quad (44)$$

Аналогичным образом, интеграл по контуру C_2 при $x < 0$ запишем в виде суммы интегралов по левому и правому берегам разреза в нижней полуплоскости:

$$\int_{C_2} dk_x(\dots) = \int_{-i\infty-0}^{-i\sqrt{k_y^2}-0} dk_x(\dots) + \int_{-i\sqrt{k_y^2}+0}^{-i\infty+0} dk_x(\dots).$$

В интеграле по левому берегу (первое слагаемое) сделаем замену $k_x = -i\sqrt{\kappa^2 + k_y^2} - 0$, при этом $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = +i\sqrt{\kappa^2} = i\kappa$, если считать, что $\kappa > 0$. В интеграле по правому берегу (второе слагаемое) сделаем замену $k_x = -i\sqrt{\kappa^2 + k_y^2} + 0$, при этом $k = -i\sqrt{\kappa^2} = -i\kappa$, если $\kappa < 0$. Таким образом, первое слагаемое преобразуется к интегралу по κ от $+\infty$ до 0 , а второе – от 0 до $-\infty$. В результате получаем выражение, которое отличается от (44) заменой x на $-x$. Объединяя оба интеграла по контурам C_1 и C_2 и восстанавливая интегрирование по k_y ,

введем функцию $\zeta_0(x, y) =$

$$= \frac{a^3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{ik_y y} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{i\kappa\sqrt{\kappa^2 + k_y^2} e^{-i\kappa h - \sqrt{\kappa^2 + k_y^2} |x|}}{\kappa^2 + k_y^2 + i\kappa g / V^2}. \quad (45)$$

Она четна по обеим координатам x, y .

Вклад вычетов в (43) порождает функцию

$$\zeta_1(x, y) = \frac{a^3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{ik_y y} \left(-2\pi i \sum_{k_x = \pm k_0} Res(\dots) \right),$$

так что полное решение при $x < 0$ (мы по-прежнему анализируем случай $V > 0$) есть

$$\zeta(x, y) = \zeta_0(x, y) + \zeta_1(x, y). \quad (46)$$

Вычет в точке $k_x = \pm k_0$ равен пределу $k_x \rightarrow \pm k_0$ подынтегрального выражения, умноженного на $k_x - (\pm k_0)$. В результате несложных вычислений находим, что

$$\zeta_1 = -\frac{2a^3 V^2}{g} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \frac{k_* k_0 e^{ik_y y - k_* h}}{(1 + 4V^4 k_y^2 / g^2)^{1/2}} \sin(k_0 |x|), \quad (47)$$

где

$$k_* = \sqrt{k_0^2 + k_y^2} = \frac{g}{2V^2} \left[1 + \sqrt{1 + 4V^4 k_y^2 / g^2} \right] \quad (48)$$

и мы учли, что $x = -|x|$.

Переход к случаю $V < 0$ довольно прост. При смене знака скорости достаточно просто изменить знак координаты x . Поскольку функции ζ_0 и ζ_1 определены так, что они не зависят от знака скорости, результат наших вычислений можно представить в следующей универсальной форме, пригодной для любого знака V :

$$\zeta(x, y) = \zeta_0(|x|, y) + \zeta_1(|x|, y) H(-Vx), \quad (49)$$

где $H(z)$ – функция Хэвисайда, равна 1 при $x > 0$ и 0 при $x < 0$. Заметим также, что функции ζ_0 и ζ_1 вещественны, хотя подынтегральные выражения в их определении комплексны. Это следует из того факта, что комплексное сопряжение подынтегральных выражений в (45) и (47) эквивалентно смене знака переменной интегрирования k_y .

Формулу (45) полезно представить в виде

$$\zeta_0(x, y) = \frac{a^3}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi \int_0^{\infty} dq e^{iqy \cos \psi - iqh \sin \psi - q|x|} \frac{iq^2 \sin \psi}{q + i(g/V^2) \sin \psi}, \quad (50)$$

сделав замену переменных

$$k_y = q \cos \psi, \quad \kappa = q \sin \psi. \quad (51)$$

Она не имеет очевидного физического смысла, но позволяет выполнить интегрирование по переменной q :

$$\zeta_0(x, y) = \frac{ia^3 g^2}{2\pi V^4} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi \frac{\sin \psi}{R^2} \{ 1 - iR \sin \psi + e^{iR \sin \psi} R^2 \sin^2 \psi [Ci(R \sin \psi) - iSi(R \sin \psi) + \ln(R) - \ln(-i / \sin \psi) - \ln(R \sin \psi)] \}, \quad (52)$$

где

$$R = (g/V^2)(|x| - iy \cos \psi + ih \sin \psi),$$

$$\text{Ci}(z) = -\int_z^\infty \cos(t) / t dt,$$

$$\text{Si}(z) = \int_0^z \sin(t) / t dt.$$

Функции логарифма $\ln(z)$ с и интегрального косинуса $\text{Ci}(z)$ (в отличие от интегрального синуса $\text{Si}(z)$) в комплексной плоскости имеют разрывы на берегах разреза от 0 до $-\infty$, но подынтегральное выражение в (52) всюду непрерывно.

Подынтегральное выражение в (52) в пределе $x \rightarrow 0$ получает особенность в двух точках на интервале $\psi \in [-\pi, \pi]$, где $\psi = y/h$. Эта особенность является следствием расходимости интеграла по q в (50) при $x = 0$.

Наконец укажем, что метод преобразования двукратного интеграла (39), описанный в этом разделе, инспирирован работой Петерса [14]. Мы усовершенствовали его метод, значительно сократив количество замен переменных интегрирования.

Предел $F \ll 1$

Функции $\zeta_0(x, y)$ и $\zeta_1(x, y)$ в формуле (49) удастся вычислить в пределе, когда число Фруда $F = V / \sqrt{gh}$ мало, $F \ll 1$. Этот случай можно также назвать пределом малых скоростей. При $V \rightarrow 0$ в формуле (50) для $\zeta_0(x, y)$ достаточно оставить только последнее слагаемое $i(g/V^2) \sin \psi$ в знаменателе подынтегрального выражения:

$$\zeta_0 = \frac{a^3 V^2}{2\pi g} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi \int_0^\infty dq q^2 e^{iqy \cos \psi - iqh \sin \psi - q|x|}. \quad (53)$$

Получившийся интеграл удастся вычислить:

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= \frac{a^3 V^2}{2\pi g} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi \int_0^\infty dq e^{iq\sqrt{h^2+y^2} \cos \psi - q|x|} = \\ &= -\frac{a^3 V^2}{g} \frac{h^2 - 2x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + h^2)^{5/2}}, \end{aligned} \quad (54)$$

причем результат оказывается ровно в 2 раза больше, чем возвышение уровня, вычисленное по формуле (31), если в нее подставить только потенциал шара в сопутствующей системе отсчета

$$\phi_0(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{a^3 V / 2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}}$$

и учесть, что при переходе в эту систему производную по времени $\partial/\partial t$ нужно заменить на $V\partial/\partial x$. Данный факт имеет простое объяснение. Действительно, если выбрать

$$\phi_1(x, y, z) = \phi_0(x, y, -z), \quad (55)$$

сумма $\phi = \phi_0 + \phi_1$ автоматически удовлетворит граничному условию

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad (56)$$

которое является предельной формой граничного условия (30) при $V \rightarrow 0$, поскольку правая часть (30) пропорциональна V . Подстановка же $\phi_0(x, y, z) + \phi_0(x, y, -z)$ в (31) приводит к полученному выше результату (53).

Формула (53) описывает углубление, расположенное над центром шара. Его глубину

$$\zeta_0 \sim \frac{a^3 V^2}{h^2 gh} = \frac{a^3}{h^2} F^2 \quad (57)$$

можно использовать как оценку амплитуды смещения поверхности жидкости в случае $F \ll 1$.

Чтобы вычислить второе слагаемое $\zeta_1(x, y)$ в формуле (49) в пределе малых скоростей, подставим

$$k_* \approx g/V^2 + k_y^2 V^2 / g,$$

$$k_0 \approx g/V^2 + k_y^2 V^2 / 2g$$

в интеграл (47) там, где k_* и k_0 входят в аргументы показательной и тригонометрической функции, и пренебрежем поправками, квадратичными по V , в других случаях. Полученный таким образом интеграл

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= -\frac{2a^3 g}{V^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{ik_y y - hk_y^2 V^2 / g - gh/V^2} \times \\ &\times \sin(k_y^2 V^2 |x| / 2g + g|x|/V^2) \end{aligned} \quad (58)$$

мы вычислили с помощью программы Wolfram Mathematica [63]:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{2\sqrt{2\pi} a^3 g^{3/2}}{|V|^3} \exp\left(-\frac{gh}{V^2} \frac{4h^2 + x^2 + y^2}{4h^2 + x^2}\right) \times \\ &\times \text{Im} \left[\frac{1}{\sqrt{2h + i|x|}} \exp\left(-i \frac{g|x|}{2V^2} \frac{8h^2 + 2x^2 - y^2}{4h^2 + x^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

Используя этот результат, нетрудно оценить амплитуду первой (самой глубокой) впадины на профиле $\zeta_1(x, y)$:

$$\min \zeta_1 = -2\sqrt{\pi} \frac{a^3 g^{3/2}}{|V|^3 \sqrt{h}} \exp\left(-\frac{gh}{V^2}\right). \quad (60)$$

Сравнивая ее величину с выражением (53), заключаем, что в пределе малых чисел Фруда $|\zeta_1| \ll |\zeta_0|$.

Формула (59) обеспечивает неплохую точность даже при $F \sim 1$. Этот факт иллюстрирует рис. 2, где проведено сравнение расчета функции $\zeta(x, y)$ по точной (47) и приближенной (59) формулам при $F = 0,5$. Расчет выполнен с помощью программы

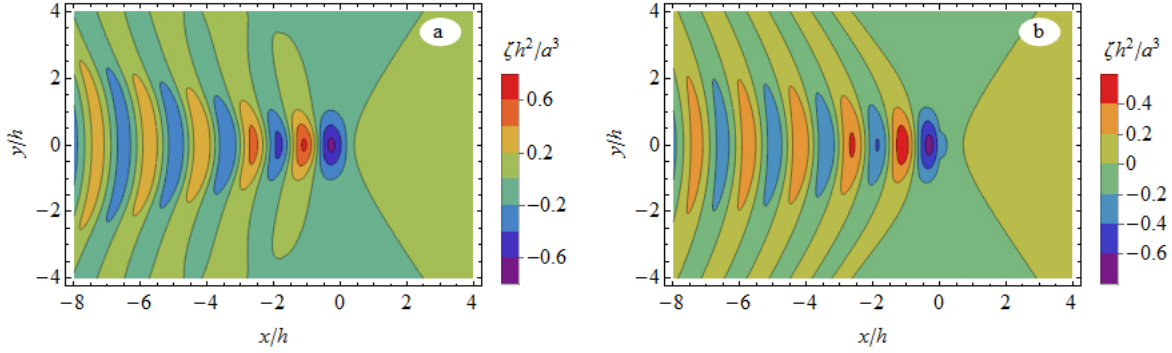


Рис. 2. Изолинии функции $(a^3 / h^2)^{-1} \zeta$ при $F = 0,5$: слева – точный расчет по формуле (47), справа – приближенный расчет по формуле (59)

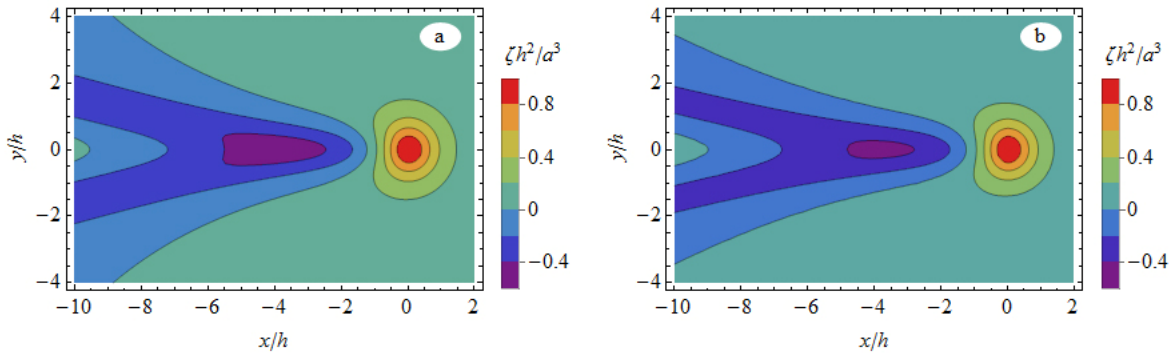


Рис. 3. Изолинии функции $(a^3 / h^2)^{-1} \zeta$ при $F = 3$: а – точный расчет по формуле (47); б – приближенный расчет по формуле (63)

Wolfram Mathematica 9 [63], причем приближенные вычисления заняли в 1 500 раз меньше времени.

Предел $F \gg 1$

В пределе больших чисел Фруда, $F \gg 1$, главный член разложения ζ_0 не зависит от скорости:

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= \\ &= \frac{a^3}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi \int_0^{\infty} dq i q \sin \psi e^{i q y \cos \psi - i q h \sin \psi - q|x|} = \\ &= \frac{a^3 h}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (61)$$

В этом случае функция $\zeta_0(x, y)$ описывает выпуклость на поверхности жидкости, которую в зарубежной литературе называют «горбом Бернулли» (Bernoulli hump). Его высоту

$$\zeta_0 = \frac{a^3}{h^2} \quad (62)$$

можно использовать как оценку амплитуды смещения поверхности жидкости в случае $F \gg 1$.

Чтобы вычислить интеграл (47) в пределе больших скоростей, подставим

$$k_* \approx \sqrt{k_y^2 + \frac{g}{2V^2}}, \quad k_0 \approx \sqrt[4]{\frac{k_y^2 g^2}{V^4}}.$$

Полученный интеграл

$$\begin{aligned} \zeta_1 = & \\ = & -a^3 \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \sqrt[4]{\frac{k_y^2 g^2}{V^4}} e^{ik_y y - \sqrt{k_y^2 h - gh/2V^2}} \times \\ & \times \sin \left(\sqrt[4]{\frac{k_y^2 g^2}{V^4}} |x| \right) \end{aligned}$$

вновь сумела вычислить программа Wolfram Mathematica [63]:

$$\begin{aligned} \zeta_1(x, y) = & \frac{a^3 \sqrt{g}}{4V^3} e^{-gh/2V^2} \left\{ \frac{4\sqrt{g}x|V|(h^2 - y^2)}{(h^2 + y^2)^2} + \right. \\ & + 2\sqrt{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{2hV^2 - gx^2 - 2iV^2 y}{(h - iy)^{5/2}} \times \right. \\ & \left. \left. \exp \left(-\frac{gx^2}{4V^2(h - iy)} \right) \operatorname{erfi} \left(\frac{\sqrt{g}x}{2|V|\sqrt{h - iy}} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (63)$$

где $\operatorname{erfi}(z) = \operatorname{erf}(iz) / i$ – комплексная функция ошибок. Минимум функции (63) достигается на расстоянии $x \approx -1,19Fh = -1,19V(h/g)^{1/2}$ на оси x позади шара, где формируется впадина на поверхности жидкости, следующая за горбом Бернулли (61). Ее глубина

$$\zeta_1 = -1,47 \frac{a^3}{Fh^2} \quad (64)$$

может использоваться для оценки величины ζ_1 по порядку величины. При этом оказы-

вается, что вновь $|\zeta_1| \ll |\zeta_0|$, как и в случае $F \ll 1$, если сравнивать амплитуды функций ζ_1 и ζ_0 . Однако, как видно на рис. 3, в случае $F \gg 1$ на краях клина Кельвина, наоборот, $|\zeta_1| \gg |\zeta_0|$. Кроме того, амплитуды ζ_1 и ζ_0 имеют один порядок величины при $F \sim 1$.

На рис. 3 проведено сравнение расчета функции $\zeta_1(x, y)$ по точной и приближенной формулам при $F = 3$. Расчет выполнен с помощью программы Wolfram Mathematica 9 [63], причем приближенные вычисления заняли в 500 раз меньше времени.

Профиль корабельной волны

Чтобы продемонстрировать принципиально большие изменения в геометрической форме возмущений поверхности жидкости, которые происходят по мере увеличения числа Фруда, на рис. 4 мы построили профиль возвышения поверхности $\zeta(x, 0)$ в плоскости xz , проходящей через центр шара. Результаты расчетов по точным формулам (47), (49) и (52) изображены на рис. 4 непрерывными линиями для шести значений параметра Фруда. На этом же рисунке пунктиром показан результат расчета по приближенным формулам (54) и (59), предназначенным для случая $F \ll 1$, а точками –

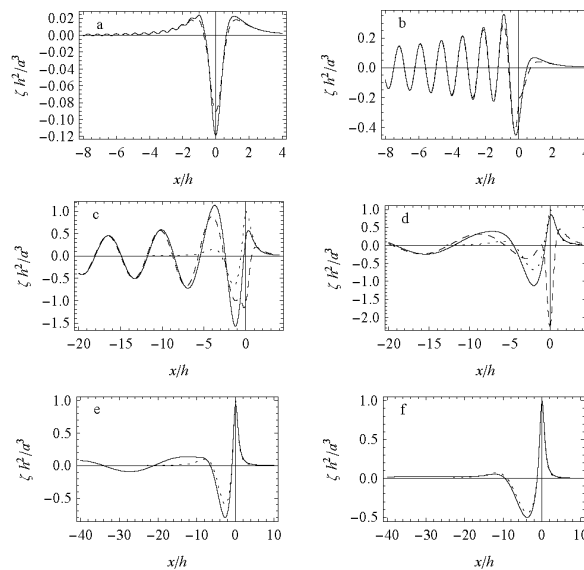


Рис. 4. Профиль корабельной волны в центральном сечении $y = 0$ при различных значениях числа Фруда: а – $F = 0,3$, $\lambda_g / h = 0,57$; б – $F = 0,45$, $\lambda_g / h = 1,27$; в – $F = 1,0$, $\lambda_g / h = 6,28$; д – $F = 1,5$, $\lambda_g / h = 14,13$; е – $F = 2,0$, $\lambda_g / h = 25,1$; ф – $F = 3,0$, $\lambda_g / h = 56,55$

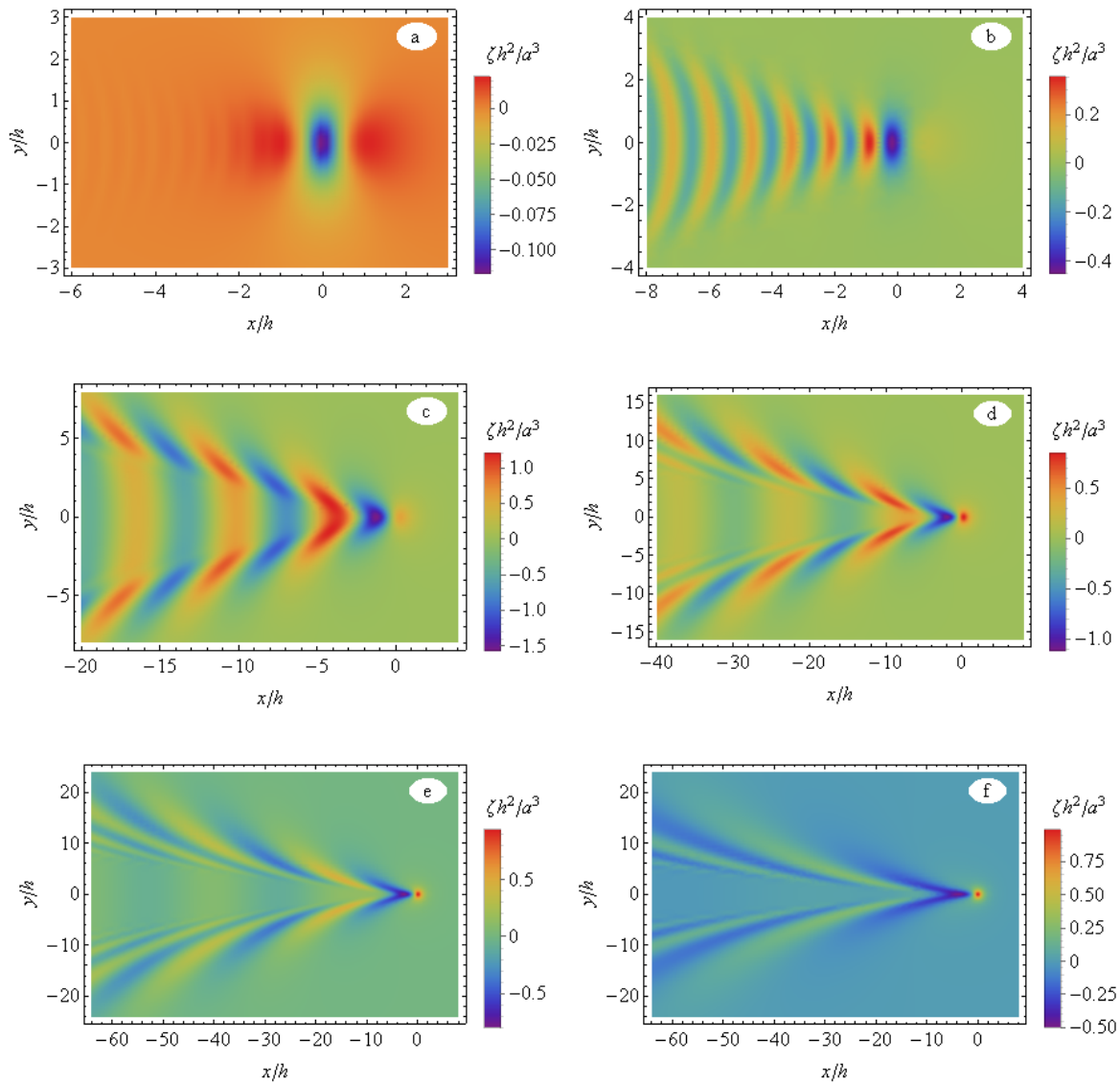


Рис. 5. Профиль корабельной волны при различных значениях числа Фруда:
 а – $F = 0,3$, $\lambda_g / h = 0,57$; б – $F = 0,45$, $\lambda_g / h = 1,27$; в – $F = 1,0$, $\lambda_g / h = 6,28$; д – $F = 1,5$, $\lambda_g / h = 14,13$;
 е – $F = 2,0$, $\lambda_g / h = 25,13$; ф – $F = 3,0$, $\lambda_g / h = 56,55$

по приближенным формулам (61) и (63), предназначенным для случая $F \gg 1$.

На рис. 5 для тех же значений числа Фруда показаны двумерные карты возвышения поверхности жидкости. Как видно из анализа рис. 4 и 5, при значениях числа Фруда $F = 0,3$ и меньше в форме возмущения поверхности жидкости преобладает масштаб глубины погружения шара h (см. рис. 4, а и 5, а). Однако уже при $F = 0,45$ (см. рис. 4, б и 5, б), когда длина волны $\lambda_g = 2\pi V^2 / g$, соответствующая черенковскому резонансу, превысит глу-

бину погружения h , резонансные (корабельные) волны начинают доминировать на профиле возвышения поверхности. При $F \sim 1$ отчетливо формируется клин Кельвина (см. рис. 5, в, д). Он состоит из двух типов волн. Боковые волны концентрируются на краях клина. Их фронты приблизительно параллельны краям клина. Внутри клина распространяются поперечные волны. Их фронты перпендикулярны траектории движения шара. При дальнейшем увеличении числа Фруда доминирующая длина волны постепенно увеличивается, возмущение поверхности все более

концентрируется вблизи краев клина (см. рис. 5, *e, f*), поперечные волны постепенно исчезают, а угол при вершине клина Кельвина уменьшается.

Заключение

В настоящей работе предложен метод решения в линейном приближении нестационарной задачи о возбуждении корабельных волн подводным объектом, который движется с произвольной скоростью в невязкой жидкости. Вертикальное смещение поверхности жидкости, создаваемое подводным объектом, в общем случае вычисляется по формулам (19), (33) и (37).

Тестовая проверка предложенного метода проведена путем сравнения результатов, полученных с его применением, для сравнения с имеющимися в литературе результатами для случая шара, который движется на большой глубине с постоянной скоростью по прямой траектории, параллельной поверхности жидкости. Вертикальное смещение поверхности жидкости в этом случае дает формула (49). Она содержит два слагаемых ζ_0 и ζ_1 , которые выражаются однократными интегралами (47) и (50) соответственно. Эти слагаемые выделены при помощи преобразования контура интегрирования в комплексной плоскости, которое мы назвали преобразованием Петерса. Оно устраняет полюс в подынтегральном выражении промежуточных вычислениях, правило обращения с которым эквивалентно правилу обхода Ландау, известному в теории ленгмюровских колебаний в плазме. В пределе малых и больших значений числа Фруда $F = V / \sqrt{hg}$ получены асимптотические выражения для ζ_0 и ζ_1 . Установлено, что в обоих предельных случаях первое слагаемое ζ_0 в формуле (49), которое описывает «горб Бернулли», как правило, доминирует по отношению ко второму слагаемому ζ_1 , которое описывает «клин Кельвина». Однако это второе слагаемое ζ_1 сопоставимо с первым при $F \sim 1$. Более того, $|\zeta_1| \gg |\zeta_0|$ на краях клина Кельвина при $F \gg 1$.

Отмечено, что имеющееся в научной литературе решение Хавелока для задачи о стационарном движении погруженного шара также содержит

два слагаемых, одно из которых выражено рациональной дробью, а другое содержит двумерный интеграл. Этим слагаемым не удается придать ясного физического смысла. В частности, они не обращаются в ноль, если скорость шара стремится к нулю, тогда как вертикальное смещение поверхности жидкости в этом случае должно быть всюду равно нулю. Иными словами, в решении Хавелока пространственный рельеф смещений поверхности жидкости вычисляется как результат почти полного взаимного сокращения двух больших слагаемых. По этой причине формулы Хавелока малоприспособны для получения оценок и практических.

Сравнение результатов расчета вертикального смещения поверхности жидкости для разных значений числа Фруда показало принципиальное различие формы поверхности при больших и малых значениях F . В частности, установлено, что клин Кельвина не образуется при $F \lesssim 0,3$. Подтвержден вывод о том, что угол при вершине клина Кельвина уменьшается по мере увеличения F , если $F > 1$.

Приложение

Сравнение с решением Хавелока

Преобразуем (37) к формуле (24) из статьи Хавелока [8]:

$$\zeta(x, y, t) = \frac{a^3 h}{[x^2 + y^2 + h^2]^{3/2}} - a^3 \int_0^\infty du e^{-\mu u/2} \times \\ \times \int_0^\infty dk k \sqrt{kg} e^{-kh} J_0 \left(k \sqrt{(x + cu)^2 + y^2} \right) \sin \left[\sqrt{kg} u \right], \quad (65)$$

где $c = -V$ и $\mu \rightarrow 0+$. Для этого введем функцию

$$\Phi_k^{(0)}(t) = -\frac{a^3}{2k} (2\pi) e^{-kh - ik_x X(t)} e^{\mu t/2}, \quad (66)$$

с $\mu > 0$, такую что

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_k^{(0)}(t) = \phi_k^{(0)}(t)$$

в пределе $\mu \rightarrow 0$, см. (34). Через нее можно выразить $\zeta_k(t)$, если в (37) выполнить еще одно интегрирование по частям:

$$\zeta_k(t) = -2k \Phi_k^{(0)}(t) - \\ - 2k \sqrt{kg} \int_{-\infty}^t \sin \left[\sqrt{kg} (\tau - t) \right] \Phi_k^{(0)}(\tau) d\tau. \quad (67)$$

Множитель $e^{\mu/2}$ в (66) гарантирует, что функция $\Phi_k^{(0)}(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow -\infty$, и обеспечивает законность операции интегрирования по частям.

Вычислим $\zeta(x, y, t)$, выполнив обратное Фурье-преобразование по формуле (19). При этом первое слагаемое в (67) дает выражение

$$\iint \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} e^{ik_x x + ik_y y} (-2k\Phi_k^{(0)}(t)) = \frac{a^3 h e^{\mu/2}}{\left[(x - X(t))^2 + y^2 + h^2 \right]^{3/2}}, \quad (68)$$

которое при $\mu = 0$ совпадает с первым слагаемым в формуле (65), если перейти в систему отсчета, движущуюся вместе с шаром (в этой системе $X(t) = 0$). Выполняя Фурье-преобразование над вторым слагаемым, сделаем замену переменных интегрирования $k_x = k \cos(\theta)$, $k_y = k \sin(\theta)$. Тогда интеграл по углу θ удастся выразить через функцию Бесселя J_0 с помощью формулы

$$J_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\alpha \cos(\theta)} d\theta.$$

В итоге второе слагаемое дает результат

$$\iint \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} e^{ik_x x + ik_y y} \times \left(-2k\sqrt{kg} \int_{-\infty}^t \sin\left[\sqrt{kg}(\tau - t)\right] \Phi_k^{(0)}(\tau) d\tau \right) = a^3 \int_{-\infty}^t d\tau e^{\mu\tau} \int_0^{\infty} dk k \sqrt{kg} e^{-kh} \times \times J_0\left(k\sqrt{(x - X(\tau))^2 + y^2}\right) \sin\left[\sqrt{kg}(\tau - t)\right],$$

который совпадает со вторым слагаемым в формуле (65), если подставить $X(\tau) = V\tau$, $t = 0$, сделать замену $\tau \rightarrow -\tau$.

Список литературы

1. Thomson William (Lord Kelvin). Popular lectures and addresses. London: Macmillan, 1891. Vol. 3. P. 481–488.
2. Kelvin Lord. Deep water ship-waves // Philosophical Magazine Series 6. 1905. Vol. 9, no. 54. P. 733–757.
3. Kelvin Lord. I. Deep sea ship-waves // Philosophical Magazine Series 6. 1906. Vol. 11, no. 61. P. 1–25.
4. Thomson William (Lord Kelvin). On the waves produced by a single impulse in water of any depth, or in a dispersive medium // Proc. of

the Royal Society. 1887. Vol. 42A, no. 251–257. P. 80–83.

5. Лайтхилл Джеймс. Волны в жидкостях: Пер с англ. М.: Мир, 1981.

6. Havelock T. H. The Propagation of Groups of Waves in Dispersive Media, with Application to Waves on Water Produced by a Travelling Disturbance // Proc. of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1908. Vol. 81, no. 549. P. 398–430.

7. Havelock T. H. Some Cases of Wave Motion due to a Submerged Obstacle // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1917. Vol. 93, no. 654. P. 520–532.

8. Havelock T. H. Wave Resistance: Some Cases of Three-Dimensional Fluid Motion // Proc. of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1919. Vol. 95, no. 670. P. 354–365.

9. Havelock T. H. The Wave Resistance of a Spheroid // Proc. of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1931. Vol. 131, no. 817. P. 275–285.

10. Lamb H. On some cases of wave-motion on deep water // Annali di Matematica Pura ed Applicata (1898–1922). 1913. Vol. 21, no. 1. P. 237–250.

11. Lamb Horace. Hydrodynamics. 4th ed. Cambridge University Press, 1916.

12. Hogner E. A contribution to the theory of ship waves // Arkiv für Matematik, Astronomi, och Fysik. 1923. Vol. 17, no. 12. P. 1–50.

13. Hogner Einar. Schiffsfirm und Wellenwiderstand // Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebs / ed. G. Kempf, E. Foerster. Hamburg, 1932. S. 99–114.

14. Peters A. S. A new treatment of the ship wave problem // Communications on pure and applied mathematics. 1949. Vol. 2, no. 2-3. P. 123–148.

15. Ursell F. On Kelvin's ship-wave pattern // Journal of Fluid Mechanics. 1960. Vol. 8, no. 03. P. 418–431.

16. Guevel P., Delhommeau G., Cordonnier J. P. Numerical solution of the Neumann-Kelvin problem by the method of singularities // 2nd Int. Conf. Numerical Ship Hydrodynamics. Berkeley, CA, 1977. P. 107–123.

17. Doctors L. J., Beck R. F. Convergence properties of the Neumann-Kelvin problem for a submerged body // Journal of Ship Research. 1987. Vol. 31, no. 4. P. 227–234.

18. *Stefanick Tom*. The nonacoustic detection of submarines // *Scientific American*. 1988. Vol. 258. P. 41–47.
19. *Linton C. M.* Radiation and diffraction of water waves by a submerged sphere in finite depth // *Ocean Engineering*. 1991. Vol. 18, no. 1. P. 61–74.
20. A novel BEM-isogeometric method with application to the wavemaking resistance problem of bodies at constant speed / K. A. Belibassakis, Th. P. Gerostathis, C. G. Politis et al. // 13th Cong. Intern. Maritime Association Mediterranean Conference, IMAM. Istanbul, Turkey, 2009.
21. *Swain Sanjaya Kumar, Trinath K., Tatavarti*. Non-Acoustic Detection of Moving Submerged Bodies in Ocean // *International Journal of Innovative Research and Development*. 2012. Vol. 1, no. 10.
22. *Noblesse Fancis, Huang Fuxin, Yang Chi*. The Neumann – Michell theory of ship waves // *Journal of Engineering Mathematics*. 2013. Vol. 79, no. 1. P. 51–71.
23. *Percival Scott, Hendrix Dane, Noblesse Fancis*. Hydrodynamic optimization of ship hull forms // *Applied Ocean Research*. 2001. Vol. 23, no. 6. P. 337–355.
24. The Bernoulli Hump Generated by a Submarine: Report LRDC 2015-03-001 / London Research and Development Corporation; Executor: J. K. E. Tunaley: 2015.
25. Waves Due to a Submerged Body: Rep.: AD 417516 / DTIC Document; Executor: Bohyun Yim: 1963.
26. Computing Programs for Surface Wave Trains of Point Sources: Rep. / DTIC Document; Executor: A. V. Hershey: 1965.
27. Investigation of a Laser System for Air-To-Sea Submarine Detection and Communication: Rep.: AD384193 / DTIC Document; Executor: LM Vallese: 1967.
28. A limited analysis of some nonacoustic antisubmarine warfare systems: Rep.: AD-A281 747 / DTIC Document; Executor: Daniel G Daly: 1994.
29. *Noblesse Fancis*. Generalized boundary-integral representation of 3D flow about a ship advancing in regular waves // *Journal of Ship Research*. 2004. Vol. 48. P. 31–44.
30. *Delhommeau Gerard, Noblesse Fancis, Guilbaud Michel*. Simple analytical approximation to a ship bow wave / Ed. by S. Malenica, I. Senjanovic; 22nd IWWWFB. Plitvice, Croatia, 2007.
31. *Fang M.-C., Yang R.-Y., Shugan I. V.* Kelvin Ship Wake in the Wind Waves Field and on the Finite Sea Depth // *Journal of Mechanics*. 2011. 3. Vol. 27. P. 71–77.
32. *Huang Fuxin, Yang Chi, Noblesse Fancis*. Numerical implementation and validation of the Neumann – Michell theory of ship waves // *European Journal of Mechanics – B/Fluids*. 2013. Vol. 42. P. 47–68.
33. Why can ship wakes appear narrower than Kelvin’s angle? / Fancis Noblesse, Jiayi He, Yi Zhu et al. // *European Journal of Mechanics – B/Fluids*. 2014. Vol. 46. P. 164–171.
34. Farfield waves created by a monohull ship in shallow water / Yi Zhu, Jiayi He, Chenliang Zhang et al. // *European Journal of Mechanics – B/Fluids*. 2015. Vol. 49, Part A. P. 226–234.
35. Interference effects on the Kelvin wake of a monohull ship represented via a continuous distribution of sources / Chenliang Zhang, Jiayi He, Yi Zhu et al. // *European Journal of Mechanics – B/Fluids*. 2015. Vol. 51. P. 27–36.
36. Stationary phase and numerical evaluation of far-field and near-field ship waves / Chenliang Zhang, Jiayi He, Yi Zhu et al. // *European Journal of Mechanics – B/Fluids*. 2015. Vol. 52. P. 28–37.
37. Comparison of three simple models of Kelvin’s ship wake / Jiayi He, Chenliang Zhang, Yi Zhu et al. // *European Journal of Mechanics – B/Fluids*. 2015. Vol. 49, Part A. P. 12–19.
38. Google.com. GoogleEarth. 2013. URL: <http://earth.google.com/>.
39. *Rabaud Marc, Moisy Frédéric*. Ship Wakes: Kelvin or Mach Angle? // *Phys. Rev. Lett*. 2013. May. Vol. 110. P. 214503.
40. *Rabaud M., Moisy F.* Narrow ship wakes and wave drag for planing hulls // *Ocean Engineering*. 2014. Vol. 90. P. 34–38.
41. *Verberck Bart*. Hydrodynamics: Wake up // *Nature Physics*. 2013. Vol. 9, no. 7. P. 390–390.
42. *Darmon Alexandre, Benzaquen Michael, Raphaël Elie*. Kelvin wake pattern at large Froude numbers // *Journal of Fluid Mechanics*. 2014. 1. Vol. 738. P. R3.
43. *Benzaquen Michael, Darmon Alexandre, Raphaël Elie*. Wake pattern and wave resistance for anisotropic moving disturbances // *Physics of Fluids*. 2014. Vol. 26, no. 9. P. 092106.
44. *Moisy F., Rabaud M.* Scaling of far-field wake angle of nonaxisymmetric pressure disturbance // *Phys. Rev. E*. 2014. Jun. Vol. 89. P. 063004.
45. *Moisy Frédéric, Rabaud Marc*. Mach-like capillary-gravity wakes // *Phys. Rev. E*. 2014. Aug. Vol. 90. P. 023009.

46. Jacobian-free Newton – Krylov methods with {GPU} acceleration for computing nonlinear ship wave patterns / Ravindra Pethiyagoda, Scott W. McCue, Timothy J. Moroney, Julian M. Back // *Journal of Computational Physics*. 2014. Vol. 269. P. 297–313.
47. Pethiyagoda Ravindra, McCue Scott W., Moroney Timothy J. What is the apparent angle of a Kelvin ship wave pattern? // *Journal of Fluid Mechanics*. 2014. 11. Vol. 758. P. 468–485.
48. Ellingsen Simen A. Ship waves in the presence of uniform vorticity // *Journal of Fluid Mechanics*. 2014. 3. Vol. 742.
49. Caustic graphene plasmons with Kelvin angle / Xihang Shi, Xiao Lin, Fei Gao et al. // *Phys. Rev. B*. 2015. Aug. Vol. 92. P. 081404.
50. Raphaël E., de Gennes P.-G. Capillary gravity waves caused by a moving disturbance: Wave resistance // *Phys. Rev. E*. 1996. Apr. Vol. 53. P. 3448–3455.
51. Shliomis Mark I., Steinberg Victor. Surface Gravity Waves due to a Moving Body: Onset of Wave Resistance as a Critical Phenomenon // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Nov. Vol. 79. P. 4178–4181.
52. Self-consistent theory of capillary-gravity-wave generation by small moving objects / A. D. Chepelianskii, M. Schindler, F. Chevy, E. Raphaël // *Phys. Rev. E*. 2010. Jan. Vol. 81. P. 016306.
53. Chatjigeorgiou Ioannis K., Miloh Touvia. Hydrodynamics of submerged prolate spheroids advancing under waves: Wave diffraction with forward speed // *Journal of Fluids and Structures*. 2014. Vol. 49. P. 202–222.
54. Ландау Л. Д. О колебаниях электронной плазмы // *ЖЭТФ*. 1946. Т. 16.
55. Ландау Л. Д. О колебаниях электронной плазмы // *Успехи физических наук*. 1967. Т. 93, № 11. С. 527–540.
56. Кадомцев Б. Б. Затухание Ландау и эхо в плазме // *Успехи физических наук*. 1968. Т. 95, № 5. С. 111–129.
57. Вавилов С. И. О возможных причинах синего γ -свечения жидкостей // *ДАН СССР*. 1934. Т. 2, № 8. С. 383–385.
58. Черенков П. А. Видимое свечение чистых жидкостей под действием γ -радиации // *ДАН СССР*. 1934. Т. 2, № 8. С. 385–389.
59. Тамм И. Е., Франк И. М. Когерентное излучение быстрого электрона в среде // *ДАН СССР*. 1937. Т. 14, № 4. С. 107.
60. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособие: В 10 т. 3-е изд., перераб. М.: Наука, 1986. Т. 6: Гидродинамика.
61. Рютов Д. Д. Аналог затухания Ландау в задаче о распространении звуковой волны в жидкости с пузырьками газа // *Письма в ЖЭТФ*. 1975. Т. 22, № 9. С. 446–449.
62. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. 3-е изд., испр. М.: Наука, 1989.
63. Wolfram Mathematica. 2015. URL: <http://Wolfram.com>

Материал поступил в редколлегию 13.10.2015

A. V. Arzhannikov, I. A. Kotelnikov

*Novosibirsk State University
2 Pirogov Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation*

Arzhannikov@phys.nsu.ru, kia999@mail.ru

A METHOD OF SOLVING A NON-STATIONARY PROBLEM OF SHIP WAVES EXCITATION BY A SUBMERGED OBJECT

We propose and develop a method of solving the problem of exciting ship waves by a submerged object that moves in a non-viscous fluid at a variable velocity. The case of the flush ball moving at constant velocity parallel to the surface of the liquid is considered to validate the proposed method by comparing the results with data reported earlier by other authors. Asymptotic expressions are derived describing the elevation of the liquid surface in the limit of small and large values of the Froude number. The exact solution is represented as two summands, each of them being reduced to one-dimensional integral. One summand describes the “Bernoulli hump”, and another - the “Kelvin wedge.”

Keywords: gravity waves, ship waves, Kelvin wedge, Bernoulli hump, submerged object.