

С. Н. Яковенко*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН
ул. Институтская, 4/1, Новосибирск, 630090, Россия**yakovenk@itam.nsc.ru***БЮДЖЕТ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДИСПЕРСИИ ПУЛЬСАЦИЙ СКАЛЯРА
В ОБЛАСТИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ
ПРИ ОБРУШЕНИИ ПОДВЕТРЕННЫХ ВОЛН ***

На основе осреднения данных прямого численного моделирования получены статистические моменты в турбулентной области, формирующейся после опрокидывания подветренных волн в потоке с устойчивой стратификацией и препятствием. Исследована эволюция во времени и пространственное поведение бюджета уравнения переноса для дисперсии пульсаций скаляра. Выполнены априорные оценки алгебраических аппроксимаций для скалярной диссипации, скалярной дисперсии и процессов турбулентной диффузии в уравнении скалярной дисперсии. Такой анализ полезен для изучения области турбулентности в терминах статистических моментов и для проверки гипотез замыкания в моделях турбулентности. Показано, что в глобальном балансе уравнения для скалярной дисперсии диссипация и адвекция уравновешивают порождение, как и в уравнении турбулентной кинетической энергии. Отношение турбулентных масштабов времени полей скорости и скаляра изменяется от 0,2 до 2,2 в области обрушения волн, а глобальное значение этого параметра близко к единице во время квазистационарного периода. Алгебраическое выражение для скалярной дисперсии, полученное в предположении баланса порождения и диссипации, оказывается некорректным, приводя к нефизическим отрицательным значениям, поэтому оправдано привлечение полного уравнения для дисперсии пульсаций скаляра в модель турбулентного переноса.

Ключевые слова: устойчивая стратификация, обрушение внутренних волн, течение над препятствием, прямое численное моделирование, скалярная диссипация, дисперсия пульсаций скаляра, модели турбулентности.

Введение

Обрушение подветренных волн при некоторых условиях может приводить к образованию зон развитой турбулентности, наблюдавшихся в экспериментах в канале с буксируемым телом [1] и в геофизических течениях. Эта проблема также изучена при помощи прямого численного моделирования (DNS) уравнений Навье – Стокса [2; 3], где изменения плотности учитывались в приближении Буссинеска, а для предотвращения отражения волн от границ расчетной

области вводились поглощающие слои. Внутренние волны генерировались двумерным препятствием косинусоидальной формы высотой h в потоке с постоянными значениями градиента плотности и скорости U на входе. В DNS-расчетах при числах Рейнольдса $Re = Uh/\nu = 4000$ и Прандтля $Pr = \nu/\lambda = 1$ обрушение волн имеет место, если число Фруда F_h (основанное на h) относительно мало, как и в [1]. Результаты при $F_h = 0,6$ представлены в [2–4] мгновенными и осредненными траекториями частиц сре-

* Автор выражает благодарность проф. И. П. Кастро и д-ру Т. Г. Томасу за помощь в получении данных прямого численного моделирования и их обсуждение, а также проф. А. Ф. Курбацкому за внимание к вопросам моделирования статистических моментов второго порядка.

ды, изолиниями плотности, спектрами, членами баланса в уравнениях для напряжений Рейнольдса, полученными при осреднении по размаху препятствия в области перемешивания и по значительному интервалу времени ($35 \leq t \leq 55$), на котором возникающая область турбулентности полностью развита и квазистационарна.

В настоящей работе на основе данных DNS [2] получены различные характеристики поля скаляра в области обрушения подветренных волн (распределения среднего скаляра, его градиентов, турбулентных потоков скаляра, дисперсии пульсаций скаляра, членов баланса в уравнении для скалярной дисперсии) и выполнены априорные оценки аппроксимаций членов турбулентной диффузии и скалярной диссипации. Такой анализ полезен как для изучения поведения области турбулентности, так и для верификации моделей турбулентности.

Уравнение переноса для дисперсии пульсаций скаляра

Из уравнения для скаляра (отклонения плотности) в безразмерном виде [2],

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad (1)$$

требуемого для замыкания уравнений Навье – Стокса в приближении Буссинеска, осреднением по Рейнольдсу можно получить уравнение переноса для дисперсии пульсаций скаляра $\langle f'f' \rangle$:

$$\partial \langle f'f' \rangle / \partial t = -A_f + M_f + T_f + P_f - \varepsilon_f, \quad (2)$$

$$A_f = \langle u_i \rangle \frac{\partial \langle f'f' \rangle}{\partial x_i}, \quad M_f = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{\partial^2 \langle f'f' \rangle}{\partial x_i^2},$$

$$T_f = -\frac{\partial \langle u_i' f' f' \rangle}{\partial x_i}, \quad P_f = -2 \langle u_i' f' \rangle \frac{\partial \langle f' \rangle}{\partial x_i},$$

$$\varepsilon_f = \frac{2}{\text{RePr}} \left\langle \frac{\partial f'}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f'}{\partial x_i} \right\rangle,$$

где скорость изменения (левая часть) балансируется адвекцией (A_f), молекулярной диффузией (M_f), турбулентной диффузией за счет тройных корреляций (T_f), порождением сдвигом среднего скаляра (P_f), диссипацией (ε_f). Скаляр f представляет собой [2] нормализованное отклонение от гидростатической величины плотности, u_i – вектор мгновенной скорости, а $u_i' = (u', v', w')$ и f' – пульсации скорости и скаляра соответственно.

Бюджет дифференциальных уравнений переноса для турбулентной кинетической энергии $k = \langle u_i' u_i' \rangle / 2$ и напряжений Рейнольдса $\langle u_i' u_j' \rangle$ рассмотрен в [2; 4]. Ниже приводится анализ бюджета уравнения (2).

Результаты вычислений и априорных оценок

Картина течения представлена мгновенными траекториями частиц среды в центральной вертикальной плоскости (вид сбоку на рис. 1, а), которые получены из данных DNS [2] во время квазистационарного периода первичной области турбулентности (показанной оранжевым прямоугольником), возникающей при опрокидывании волн. На рис. 1, б–е показаны изолинии осредненных значений скаляра, его градиентов и турбулентных потоков скаляра в зоне перемешивания. Распределение плотности (рис. 1, б–г) отражает слабонеустойчивое состояние в передней и нижней частях турбулентной области, поддерживающее генерацию пульсаций скаляра и скорости. В частности, вертикальный градиент плотности имеет обширную зону слабоположительных и слабоотрицательных значений (выделено красным, оранжевым, желтым на рис. 1, г), где степень устойчивости стратификации существенно ослабевает по сравнению с исходным состоянием однородного сдвига скаляра $\partial \langle f \rangle / \partial z = -1$ в начальный момент и во входном сечении. В слоях смешения, окружающих турбулентную область сверху и снизу, степень устойчивости, наоборот, усиливается, т. е. $\partial \langle f \rangle / \partial z < -1$ (выделено зеленым и синим на рис. 1, г). Видно, что локальные экстремумы горизонтальной и вертикальной компонент вектора турбулентного потока скаляра (рис. 1, д, е) расположены как раз в области неустойчивого вертикального градиента плотности, а также в зоне максимума горизонтального градиента плотности на передней кромке области обрушения (рис. 1, в). Кроме того, турбулентный поток скаляра имеет экстремальные значения в слое смешения над областью турбулентности, где имеются заметные вертикальные градиенты средних величин скорости и скаляра.

Бюджет уравнения (2) дисперсии пульсаций скаляра (рис. 2) демонстрирует незна-

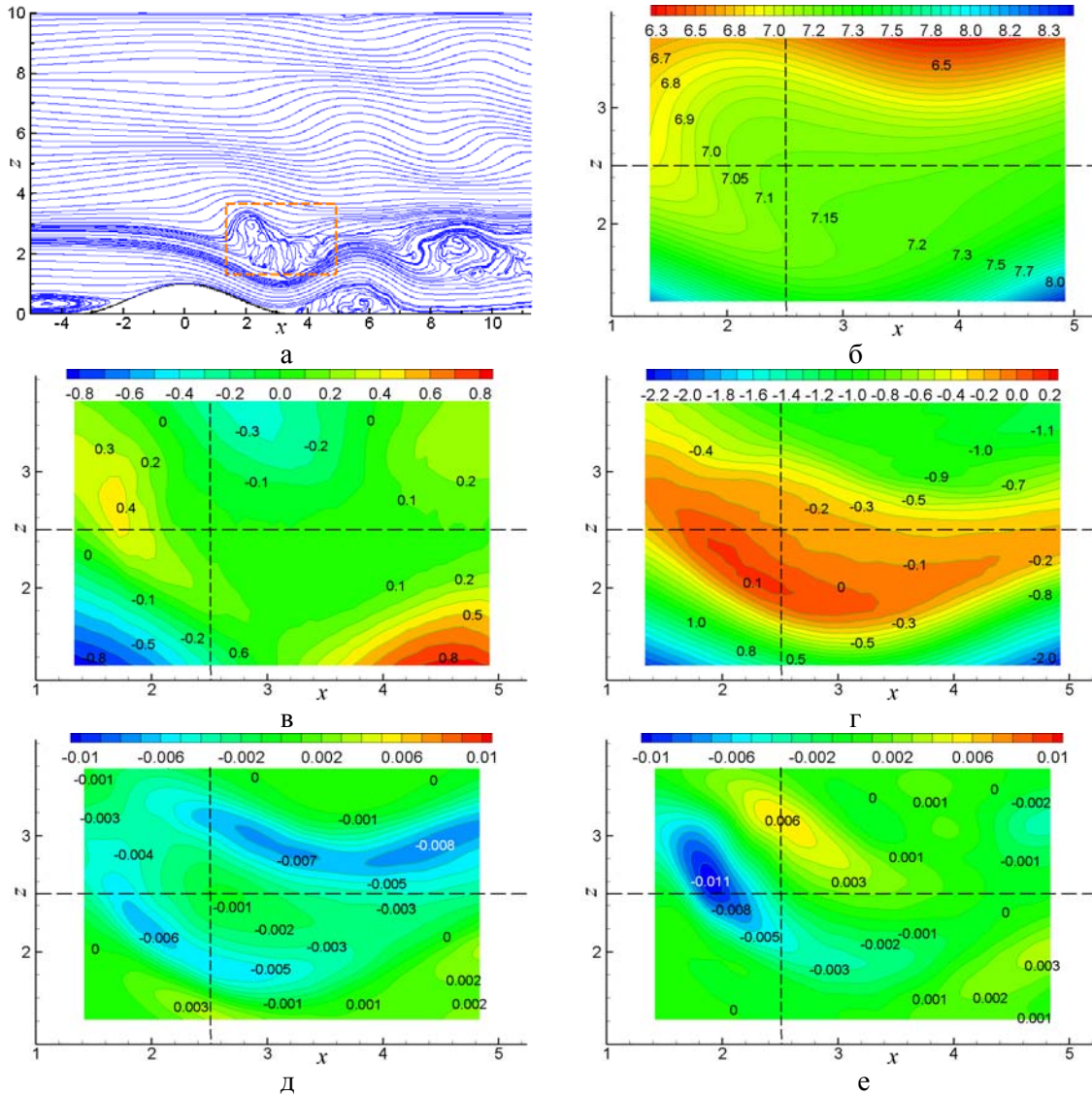


Рис. 1. Траектории частиц среды при $y = 0$ и $t = 37,5$ (а); изолинии среднего скаляра ($\langle f \rangle + 10$) (б), его градиентов $\partial \langle f \rangle / \partial x$ (в), $\partial \langle f \rangle / \partial z$ (г), турбулентных потоков скаляра $\langle u'f' \rangle$ (д), $\langle w'f' \rangle$ (е). Осреднение (б–е) выполнено по всем узлам вдоль размаха препятствия (по координате y) и локально по (9×9) -узлам в (x, z) -плоскости, а затем по квазистационарному периоду ($35 \leq t \leq 55$)

чительные изменения этой величины на интервале $35 \leq t \leq 55$, подтверждая квазистационарное поведение области турбулентности, возникающей при обрушении волн. Молекулярная диффузия везде пренебрежимо мала (в частности, максимум $|M_f|$ составляет не более 2 % от максимума $|T_f|$, как видно из рис. 3), поэтому показана на рис. 2 не отдельно, а в сумме с турбулентной диффузией. Все слагаемые уравнения переноса для скалярной дисперсии находились непосредственно из данных DNS, за

исключением производных по времени, определявшихся как численная невязка баланса остальных членов. Остаточная величина изменения по времени, обозначаемая как $\langle f'f' \rangle_t$, неявно включает погрешности вычислений баланса остальных членов, которые на самом деле очень малы для используемой мелкой сетки [2].

С ростом времени (рис. 2, а) в первую очередь появляется порождение средним сдвигом скаляра, что приводит к быстрому росту среднеквадратичных пульсаций скаляра при $22 \leq t \leq 25$.

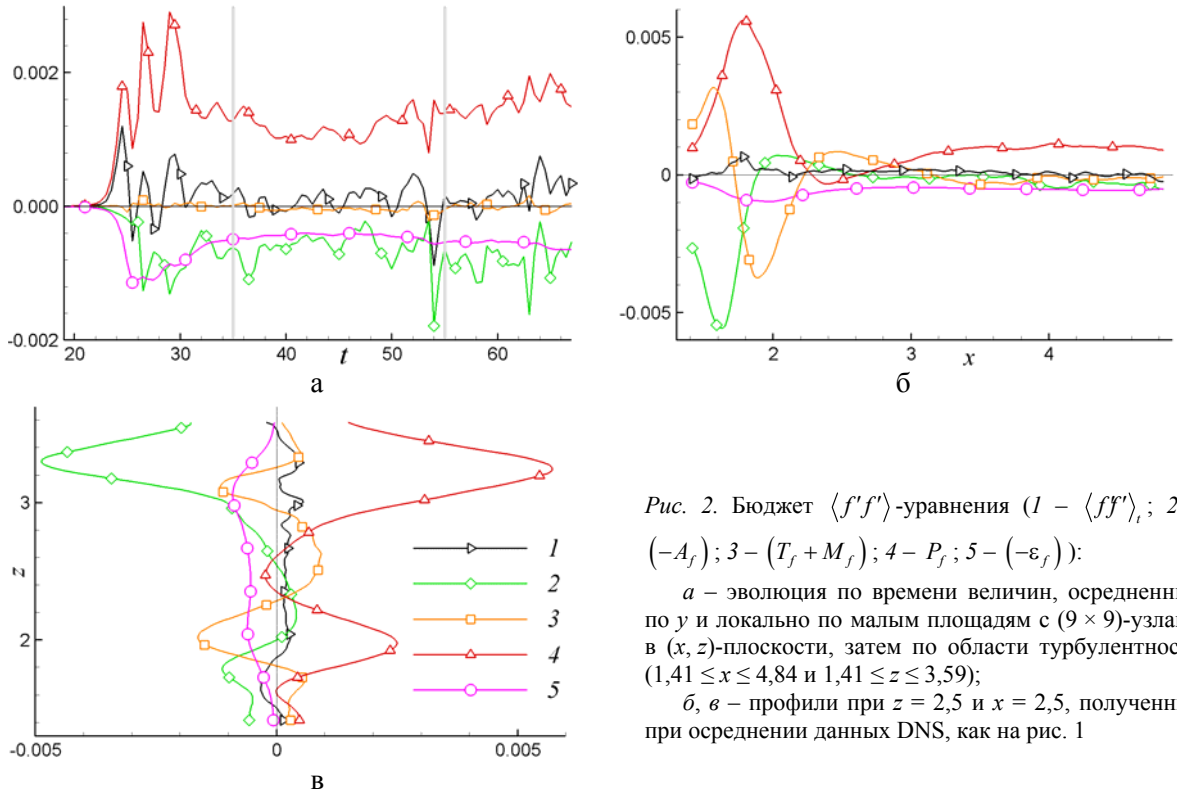


Рис. 2. Бюджет $\langle f'f' \rangle$ -уравнения (1 – $\langle ff' \rangle_t$; 2 – $(-A_f)$; 3 – $(T_f + M_f)$; 4 – P_f ; 5 – $(-\varepsilon_f)$):
 а – эволюция по времени величин, осредненных по y и локально по малым площадям с (9×9) -узлами в (x, z) -плоскости, затем по области турбулентности ($1,41 \leq x \leq 4,84$ и $1,41 \leq z \leq 3,59$);
 б, в – профили при $z = 2,5$ и $x = 2,5$, полученные при осреднении данных DNS, как на рис. 1

Затем, при $t > 25$, диссипация и адвекция уравновешивают порождение, а члены диффузии остаются пренебрежимо малыми (при глобальном осреднении по турбулентной области), как и в балансе турбулентной кинетической энергии, приведенном в [2]. С другой стороны, локальные распределения статей баланса, показанные при $z = 2,5$ и $x = 2,5$ (рис. 2, б, в), а также во всей (x, z) -плоскости (рис. 3), в некоторых местах, например при $x \approx z \approx 2$, имеют сравнимые по величине максимумы порождения средним сдвигом и турбулентной диффузии.

Порождение

$$P_f = P_{f_x} + P_{f_z} = -2\langle u'f' \rangle (\partial \langle f \rangle / \partial x) - 2\langle w'f' \rangle (\partial \langle f \rangle / \partial z)$$

демонстрирует немонотонное поведение с тремя максимумами (рис. 3, а): первый при $x \approx 1,8$ и $z \approx 2,4$ обусловлен членом P_{f_x} с пиком в этом месте из-за локальных максимумов $\partial \langle f \rangle / \partial x$ и $(-\langle u'f' \rangle)$ (рис. 3, в, д), а второй и третий максимумы P_f вверху области обрушения связаны с членом P_{f_z} , имеющим пики из-за локальных максимумов $\partial \langle f \rangle / \partial z$ и $(-\langle w'f' \rangle)$ (рис. 3, з, е). Отметим также небольшие минимумы в рас-

пределении P_f в трех местах вверху области, где $P_f < 0$, и роль порождения играет адвекция: из рис. 3, а, б видно, что зоны максимумов и минимумов $(-A_f)$ и P_f находятся «в противофазе», частично компенсируя друг друга. Турбулентная диффузия (рис. 3, в) заметна только в передней части области обрушения, а молекулярная диффузия (рис. 3, з), как упомянуто выше, пренебрежимо мала, по сравнению с P_f , A_f и T_f .

Скалярная диссипация (рис. 3, д) имеет два максимума в верхней части области, что отличается от распределения диссипации ε , имеющей, как и k , максимальные значения в слое смешения внизу области (рис. 4). «Невязка» $\langle f'f' \rangle_t$ показывает (рис. 3, е), как и на рис. 2, несущественные изменения скалярной дисперсии на квазистационарном периоде и малость погрешностей счета остальных членов. Отметим, что трансверсальные слагаемые в выражениях для P_f , A_f , T_f , M_f исчезают после осреднения по размаху препятствия из-за однородности в направлении по y ($\langle v \rangle \approx 0$, $(\partial / \partial y) \approx 0$) [2].

Как отмечено в [4], распределения ε и k идентичны (рис. 4, в, д). С другой стороны,

поведение скалярной диссипации немного отличается (см. рис. 3, *д*, 4, *а*) от поведения скалярной дисперсии, имеющей область повышенных значений с двумя максимумами в слое смешения вверху области обрушения и более слабый третий максимум – в передней части области. Можно вычислить турбулентные масштабы времени полей скаляра и скорости, а также отношение этих масштабов $R = \tau_f / \tau$ (рис. 4, *б*, *з*, *е*). Видно, что в центральной части турбулентной области параметр R примерно постоянен и равен около 0,6 (что согласуется с [5]), но в целом меняется на порядок от 0,2 на передней границе рассматриваемой области до 2,2 над областью.

Включение уравнения (2) дисперсии пульсаций скаляра, входящей в источник плавучести в уравнении для турбулентного потока скаляра, в модель турбулентности требует задания скалярной диссипации. Наиболее простое выражение релаксационного типа [6] имеет вид

$$\varepsilon_f = \langle f'f' \rangle / \tau_f = R^{-1} (\varepsilon/k) \langle f'f' \rangle, \quad (3)$$

где R задается в соответствии с данными экспериментов и физических соображений. В частности, $R \approx 0,5$ в сдвиговых течениях [7] и $0,5 \leq R \leq 0,7$ в термическом слое смешения за частично нагретой решеткой [8–10], где нет градиентов средней скорости. В однородной затухающей турбулентности

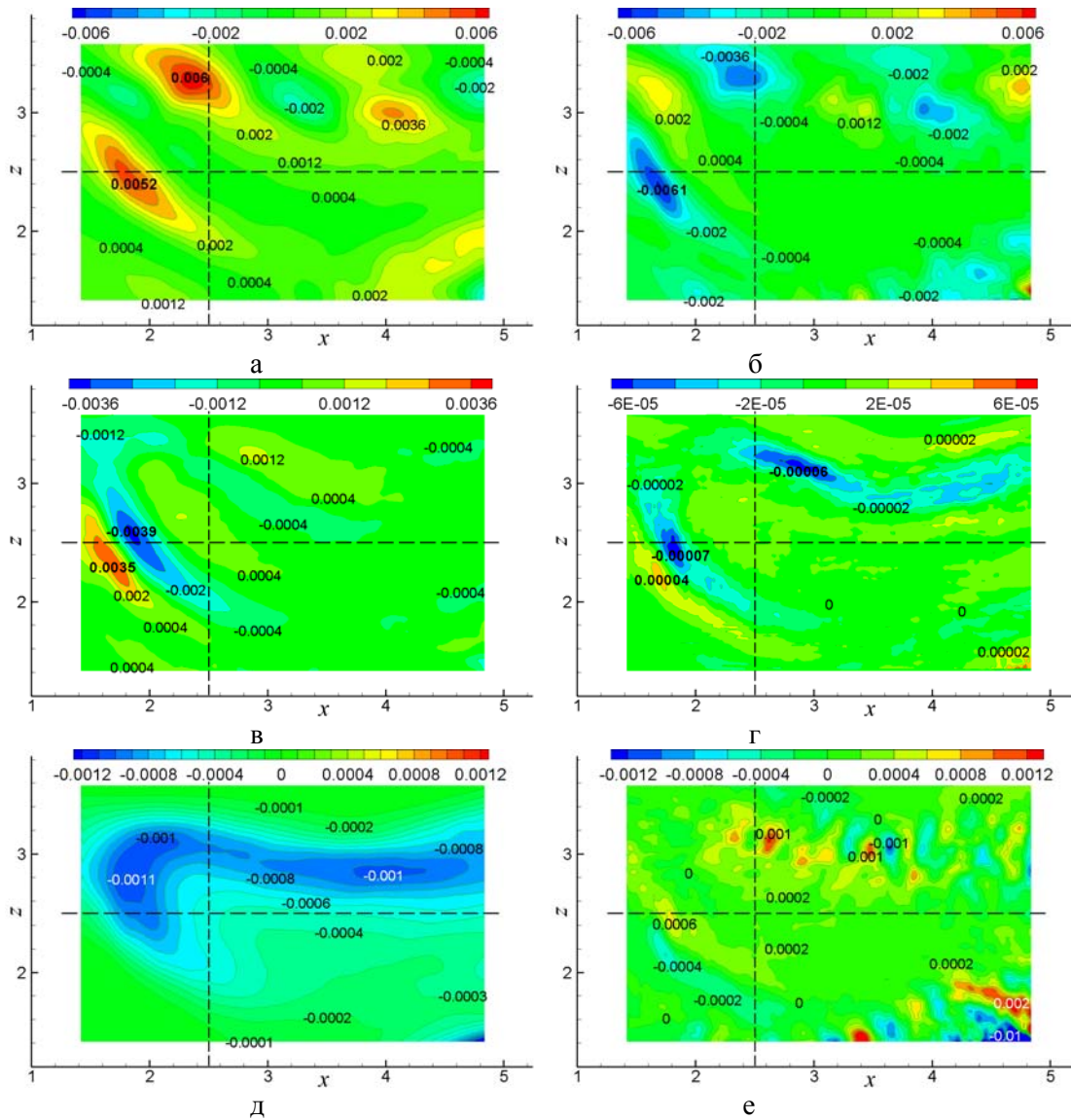


Рис. 3. Изолинии членов уравнения дисперсии пульсаций скаляра, полученные осреднением данных DNS (как на рис. 1, *б*–*е*): *а* – P_f ; *б* – $(-A_f)$; *в* – T_f ; *г* – M_f ; *д* – $(-\varepsilon_f)$; *е* – $\langle f'f' \rangle$,

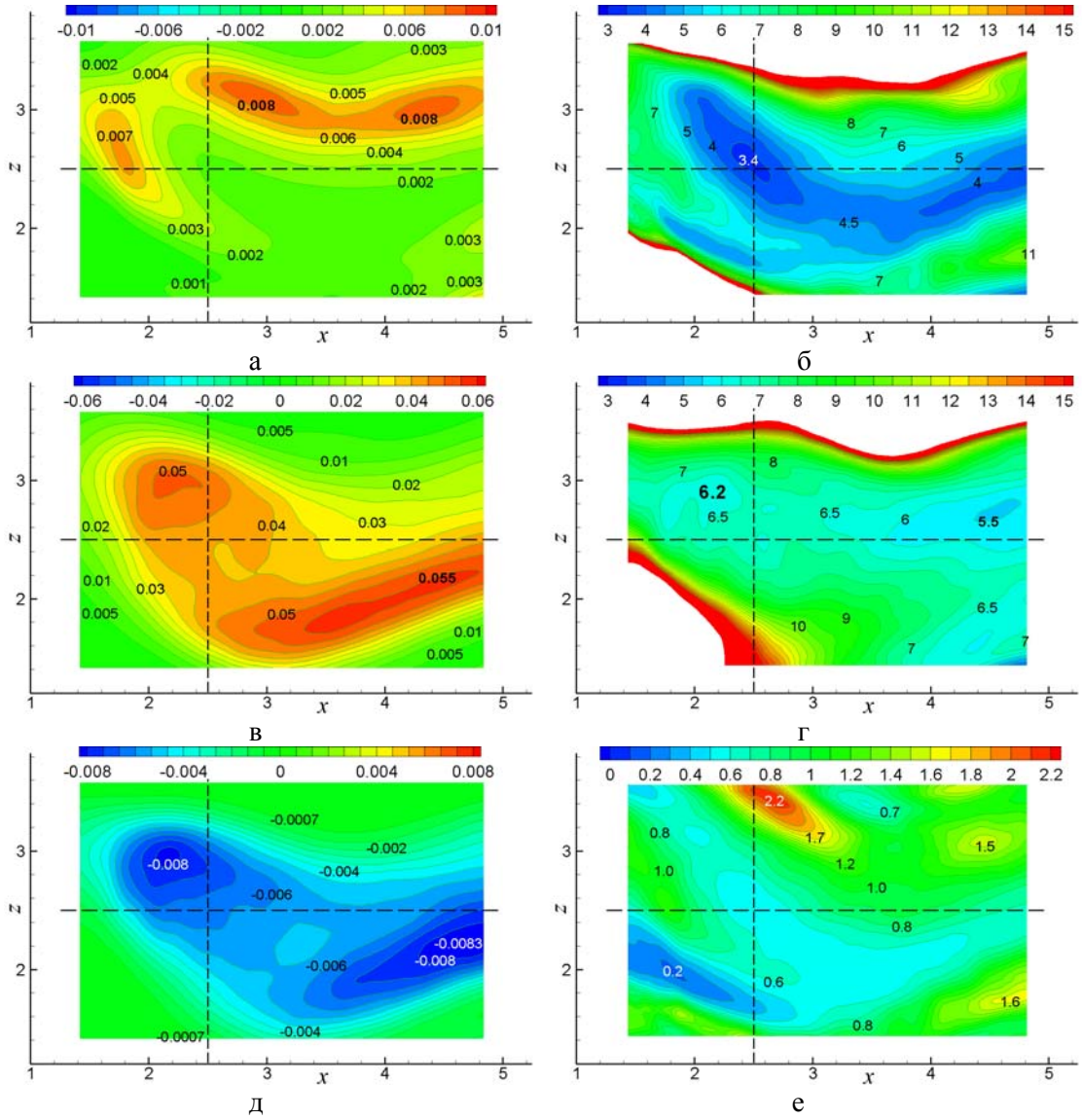


Рис. 4. Изолинии величин, полученных при осреднении данных DNS (как на рис. 1, б-з): а – дисперсии пульсаций скаляра $\langle f'f' \rangle$; б – скалярного масштаба времени $\tau_f = \langle f'f' \rangle / \epsilon_f$; в – энергии k ; г – масштаба $\tau = k/\epsilon$; д – диссипации $(-\epsilon)$; е – отношения масштабов $R = \tau_f/\tau$

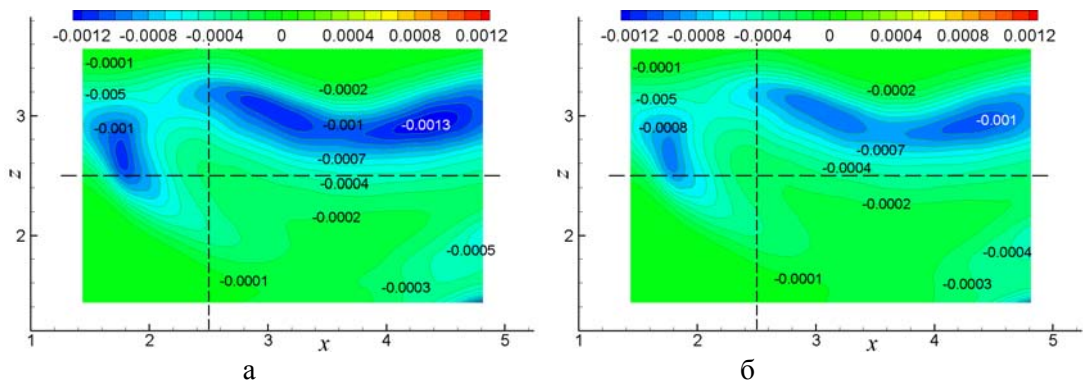


Рис. 5. Изолинии $(-\epsilon_f)$, полученной подстановкой данных DNS в (3) при $R = 1,0$ (а), $R = 1,2$ (б)

за решеткой (где нет градиентов среднего скаляра) получены большие значения $R = 0,78 \div 1,09$ [11–13], связанные с показателями степеней законов затухания k и $\langle f'f' \rangle$. Изменения R вызваны различным характером затухания $\langle f'f' \rangle$ в различных опытах при примерно одинаковом законе затухания k . В [14] получен еще больший разброс значений $R = 0,42 \div 1,67$, которые менялись в зависимости от способа нагревания решетки, создающей пульсации скорости и температуры. Отметим, что при фиксированных начальных условиях параметр R в [11–14] практически не менялся на всем протяжении развития течения. Еще одно свидетельство постоянства R обнаружено в DNS [15] в однородной турбулентности с пассивным скаляром, где значения R , первоначально различающиеся в 64 раза для разных исходных условий, асимптотически стремились со временем к $R \approx 0,4$.

Предположение постоянства R может эффективно применяться, если источники пульсаций скорости и скаляра близки или совпадают. В противном случае, когда источник пульсаций скаляра расположен вдали от источника динамических турбулентных вихрей, затухание пульсаций поля скорости и скаляра происходит по-разному и допущение $R = \text{const}$ некорректно [10; 11]. Кроме того, в пограничном слое атмосферы, где турбулентные пульсации могут порождаться флуктуирующей силой плавучести, масштаб τ_f значительно отличается от τ , что должна учитывать модель [8; 16]. Несмотря на ряд ограничений, найдено, что для многих ситуаций, близких к равновесным, отношение $R = \tau_f/\tau$ можно принимать постоянным [17].

Альтернативный подход состоит в замене (3) уравнением для ε_f [18], получаемым из (1) и идентичным уравнению для ε , что приводит к согласию с данными опыта в ряде течений с пассивной примесью [8; 18]. Однако проблема замыкания при этом оказывается сложнее, чем для ε -уравнения, так как возможных факторов, влияющих на величину ε_f , в два раза больше. Приближенное ε_f -уравнение, как и ε -уравнение, носит эмпирический характер и содержит как минимум пять подгоночных констант. Поэто-

му обычно скалярная диссипация определяется алгебраически из (3) при $R = 0,8$ [17; 19], что правильно учитывает влияние сил плавучести в стратифицированных сдвиговых потоках. В некоторых случаях [5; 18; 20] выбирались меньшие параметры $0,5 \leq R \leq 0,71$, соответствующие опытам [7–10] в сдвиговых течениях, а в расчете устойчиво стратифицированного слоя смешения [21] – большее значение $R = 1,2$.

Результаты априорного теста (3) при $R = 1,0$ и $R = 1,2$ (рис. 5) показывают приблизительное согласие с величиной скалярной диссипации, полученной непосредственно из данных DNS согласно определению

$$\varepsilon_f = \frac{2}{\text{RePr}} \left\langle \left(\frac{\partial f'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f'}{\partial z} \right)^2 \right\rangle$$

(см. рис. 3, δ), хотя и заметны некоторые отличия, вызванные упомянутым выше различием поведения скалярной дисперсии и скалярной диссипации. Отметим, что осредненный по турбулентной области параметр R (рис. 6, a) близок к единице на квазистационарном периоде ($35 \leq t \leq 55$), а меньшие значения $0,5 \leq R \leq 0,8$ в (3), взятые в других работах, сильно завышают ε_f в слое смешения над областью обрушения.

Распространенным подходом также является упрощение дифференциального уравнения (2) для скалярной дисперсии до локального алгебраического соотношения в предположении приблизительного баланса порождения и диссипации ($P_f \approx \varepsilon_f$) [17]. Если ε_f при этом определяется из (3), то алгебраическое выражение для скалярной дисперсии сводится к виду

$$\langle f'f' \rangle = -2R \frac{k}{\varepsilon} \langle u'_i f' \rangle \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial x_i}. \quad (4)$$

Однако результаты априорной оценки модели (4) показывают (рис. 6, b) ее некорректность (в частности, нефизические отрицательные значения скалярной дисперсии) для рассматриваемого сложного течения при обрушении подветренных волн, где порождение может быть отрицательным в некоторых местах, а пренебрежение адвекцией и диффузией оказывается слишком грубым допущением (см. рис. 2, 3). Этот вывод согласуется с подходом [5], включающим

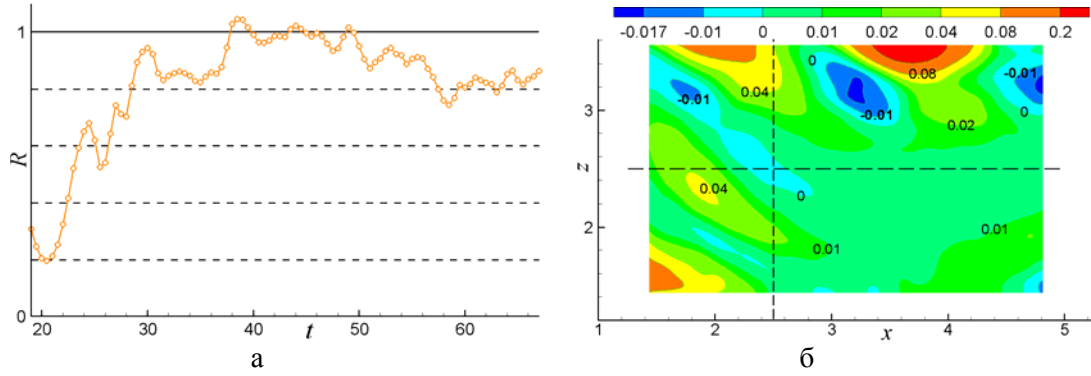


Рис. 6. Отношение масштабов времени полей скорости и скаляра $R = (\langle f'f' \rangle / \varepsilon_f) / (k/\varepsilon)$, где величины $\langle f'f' \rangle$, ε_f , k , ε взяты осредненными (как на рис. 2, а) по турбулентной области (а); дисперсия $\langle f'f' \rangle$, полученная при подстановке осредненных данных DNS в (4) при $R = 1,0$ (б)

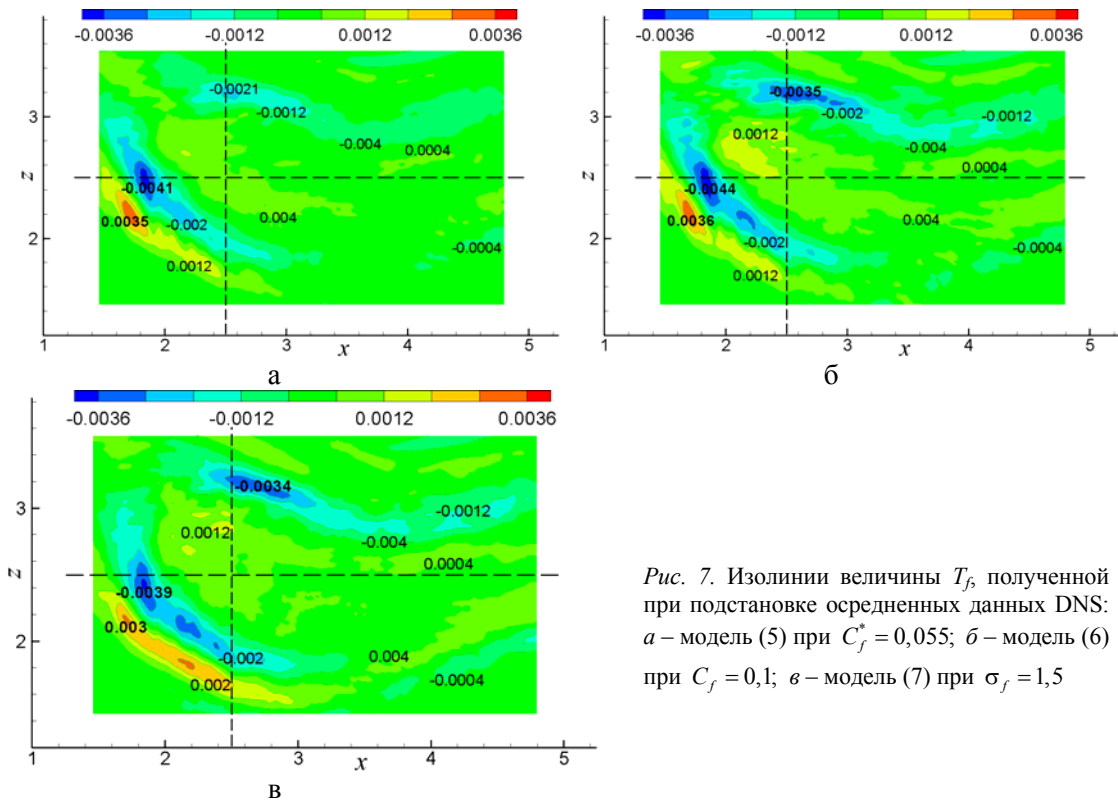


Рис. 7. Изолинии величины T_f , полученной при подстановке осредненных данных DNS: а – модель (5) при $C_f^* = 0,055$; б – модель (6) при $C_f = 0,1$; в – модель (7) при $\sigma_f = 1,5$

приблизенно замкнутое уравнение переноса (2) вместо алгебраического выражения (4).

Для замыкания (2), помимо параметризации скалярной диссипации, необходимо найти турбулентную диффузию T_f или тройные корреляции, входящие в T_f . Модели третьего порядка с уравнением для корреляций $\langle u'_i f' f' \rangle$ иногда применяются для описания тонких нелокальных свойств турбулентного переноса [16], однако в большинстве приложений используются градиентные ал-

гебраические модели для тройных корреляций. Приблизенно замкнутое уравнение переноса для $\langle u'_i f' f' \rangle$ с учетом локального равновесия дает [16]

$$\begin{aligned}
 -\langle u'_i f' f' \rangle &= \\
 &= C_f^* \frac{k}{\varepsilon} \left(\langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle f' f' \rangle}{\partial x_j} + 2 \langle u'_j f' \rangle \frac{\partial \langle u'_i f' \rangle}{\partial x_j} \right), \quad (5) \\
 C_f^* &= 0,15,
 \end{aligned}$$

где эмпирическая константа найдена численной оптимизацией. Чаще используется упрощенное выражение [8; 17; 20]

$$-\langle u'_i f' f' \rangle = C_f \frac{k}{\varepsilon} \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle f' f' \rangle}{\partial x_j}, \quad (6)$$

$$C_f = 0,3,$$

учитывающее первое слагаемое из (5) и оказывающее подобное (5) влияние за счет увеличения C_f по сравнению с C_f^* . Еще более простая аппроксимация, аналогичная диффузионным членам в k - ε -модели [17], имеет следующий вид (см., например, в [5]):

$$-\langle u'_i f' f' \rangle = \frac{v_t}{\sigma_f} \frac{\partial \langle f' f' \rangle}{\partial x_i}, \quad (6)$$

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad C_\mu = 0,09, \quad \sigma_f = 0,6.$$

На рис. 7 представлены результаты априорной оценки членов турбулентной диффузии согласно (5)–(7), где эмпирические константы взяты гораздо меньшими, чем в (5)–(7), чтобы уровень турбулентной диффузии в передней части области обрушения был сопоставим с наблюдаемым в DNS (см. рис. 3, в), тогда как при $C_f^* = C_\mu / \sigma_f = 0,15$ и $C_f = 0,3$ величина T_f получается сильно завышенной. Кроме того, модели (5)–(7) дают ложную зону отрицательных значений T_f в верхней части турбулентной области (с минимумом при $x \approx 2,6$ и $z \approx 3,2$), которая отсутствует на рис. 3, в. Ближе к истине здесь, по-видимому, более сложная аппроксимация (5), где эта ложная зона несильно выражена (рис. 7, а). Также в [22] показано, что алгебраическая модель для корреляций $\langle u'_i u'_j u'_k \rangle$ будет точнее при учете из уравнения переноса для тройных корреляций не только члена порождения моментов третьего порядка, основанного на градиентах моментов второго порядка, но и вкладов в порождение за счет плавучести и градиентов средних величин. Такое же уточнение, очевидно, возможно по отношению к выражению (5), с привлечением всех членов полного порождения $\langle u'_i f' f' \rangle$ из уравнения переноса для этой корреляции.

Заключение

Область турбулентности, возникающая при обрушении подветренных волн в тече-

нии со стратификацией и препятствием, исследована путем анализа дисперсии пульсаций скаляра и статей баланса уравнения для этой величины, полученных из данных прямого численного моделирования [2]. На основе этих данных выполнена априорная оценка возможностей общепринятых гипотез замыкания для скалярной дисперсии, скалярной диссипации и диффузионных членов в уравнении для скалярной дисперсии. Подобный анализ бюджета уравнений переноса и работоспособности гипотез замыканий можно также провести для турбулентных потоков скаляра (массы или тепла) и различных моментов третьего порядка.

Список литературы

1. Castro I. P., Snyder W. H. Experiments on wave breaking in stratified flow over obstacles // J. Fluid Mech. 1993. Vol. 255. P. 195–211.
2. Yakovenko S. N., Thomas T. G., Castro I. P. A turbulent patch arising from a breaking internal wave // J. Fluid Mech. 2011. Vol. 677. P. 103–133.
3. Yakovenko S. N., Thomas T. G., Castro I. P. Transition through Rayleigh–Taylor instabilities in a breaking internal lee wave // J. Fluid Mech. 2014. Vol. 760. P. 466–493.
4. Яковенко С. Н. Бюджет уравнений для напряжений Рейнольдса в области турбулентности, возникающей при обрушении внутренних волн // Вестн. Новосиб. гос. унта. Серия: Физика. 2012. Т. 7, вып. 4. С. 87–95.
5. Курбацкий А. Ф. Введение в моделирование турбулентного переноса импульса и скаляра. Новосибирск: Гео, 2007. 332 с.
6. Монин А. С. О свойствах симметрии турбулентности в приземном слое воздуха // Изв. АН СССР. ФАО. 1965. Т. 1, № 1. С. 45–54.
7. Beguier C., Dekeyser I., Launder B. E. Ratio of scalar and velocity dissipation time scales in shear flow turbulence // Phys. Fluids. 1978. Vol. 21. No. 3. P. 307–310.
8. Elghobashi S. E., Launder B. E. Turbulent time scales and dissipation rate of temperature variance in the thermal mixing layer // Phys. Fluids. 1983. Vol. 26. No. 9. P. 2415–2419.
9. LaRue J. C., Libby P. A. Thermal mixing layer downstream of half-heated turbulence

grid // *Phys. Fluids*. 1981. Vol. 24. No. 4. P. 597–603.

10. *Ma Bai-Kun, Warhaft Z.* Some aspects of the thermal mixing layer in grid turbulence // *Phys. Fluids*. 1986. Vol. 29. No. 10. P. 3114–3120.

11. *Sreenivasan K. R., Tavoularis S., Henry R., Corrsin S.* Temperature fluctuations and scales in grid-generated turbulence // *J. Fluid Mech.* 1980. Vol. 100. P. 597–621.

12. *Yeh T. T., Van Atta C. W.* Spectral transfer of scalar and velocity fields in heated-grid turbulence // *J. Fluid Mech.* 1973. Vol. 58. P. 233–261.

13. *Kistler A. L., O'Brien V., Corrsin S.* Double and triple correlations behind a heated grid // *J. Aero. Sci.* 1956. Vol. 23. P. 96.

14. *Warhaft Z., Lumley J. L.* An experimental study of the decay of temperature fluctuations in grid-generated turbulence // *J. Fluid Mech.* 1978. Vol. 88. P. 659–684.

15. *Eswaran V., Pope S. B.* Direct numerical simulations of the turbulent mixing of a passive scalar // *Phys. Fluids*. 1988. Vol. 3. No. 3. P. 506–520.

16. *Курбацкий А. Ф.* Моделирование не-локального турбулентного переноса импульса и тепла. Новосибирск: Наука, 1988.

17. Методы расчета турбулентных течений / Под ред. В. Кольмана. М.: Мир, 1984. 464 с.

18. *Launder B. E.* Heat and mass transport // *Turbulence*. Berlin: Springer-Verl., 1976. Chapter 6.

19. *Rodi W.* Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids // *J. Geoph. Res.* 1987. Vol. 92. P. 5305–5328.

20. *Wyngaard J. C.* Modelling the planetary boundary layer extension to the stable case // *Boundary Layer Meteorology*. 1975. Vol. 9. No. 4. P. 441–460.

21. *Курбацкий А. Ф., Яковенко С. Н.* К моделированию турбулентного слоя смешения в устойчиво стратифицированной жидкости // *Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук*. 1989. Вып. 4. С. 59–65.

22. *Yakovenko S. N.* Second- and third-order moment budgets in a turbulent patch resulting from internal gravity wave breaking // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2011. Vol. 318. Article 072022. P. 1–10.

Материал поступил в редколлегию 16.10.2015

S. N. Yakovenko

*Institute of Theoretical and Applied Mechanics of SB RAS
4/1 Institutskaya Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation*

yakovenk@itam.nsc.ru

BUDGET OF THE SCALAR VARIANCE EQUATION IN A TURBULENT PATCH ARISING FROM LEE WAVE BREAKING

Based on averaged data of the direct numerical simulations, statistical moments are obtained in a turbulent patch arising after lee wave overturning in a flow with stable stratification and obstacle. Temporal evolution and spatial behavior of the scalar-variance transport equation budget have been studied. A priori estimations of algebraic approximations for scalar dissipation, scalar variance and turbulent-diffusion processes in the scalar-variance equation have been carried out. Such an analysis is helpful to explore the turbulent patch in terms of statistical moments, and to verify closure hypotheses in turbulence models. In the global balance of the scalar-variance equation, the compensation of production by dissipation and advection is shown, as for the turbulent kinetic energy equation. The ratio of turbulent time scales of the scalar and velocity fields varies from 0.2 to 2.2 within the wave breaking region, and the global value of this parameter is close to unity during the quasi-steady period. The algebraic expression derived from the assumption of production and dissipation balance is incorrect leading to unphysical negative values, therefore the use of the full scalar-variance equation in the turbulent transport model is justified.

Keywords: stable stratification, internal wave breaking, flow above obstacle, direct numerical simulation, scalar dissipation, scalar variance, turbulence models.