

УДК 532.526

С. А. Гапонов, Б. В. Смородский

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН
ул. Институтская, 4/1, Новосибирск, 630090, Россия*

gaponov@itam.nsc.ru, smorodsk@itam.nsc.ru

ЛАМИНАРНЫЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ БИНАРНОЙ СМЕСИ ГАЗОВ *

Проведено теоретическое исследование свойств сжимаемых пограничных слоев бинарной смеси газов в рамках локально-автомодельных уравнений пограничного слоя. Рассматривалась задача, когда в пограничный слой на плоской пластине производилась инжекция с проницаемой поверхности модели газов с различным молекулярным весом – как легче, так и тяжелее воздуха. Проведены расчеты профилей скорости, плотности, температуры и концентрации примеси таких пограничных слоев при различных числах Маха. Обнаружено, что с увеличением интенсивности инжекции примеси происходит монотонное уменьшение коэффициентов поверхностного трения и теплопередачи. Установлено, что при числах Маха порядка $M = 2$ действие инжекции тяжелого газа с поверхности модели в пограничный слой аналогично действию охлаждения стенки модели, и приводит к увеличению плотности смеси вблизи стенки. В результате этого профили сверхзвукового пограничного слоя модифицируются таким образом, что линейная устойчивость слоя должна повышаться при инжекции примеси с большим молекулярным весом. Это, в свою очередь, должно приводить к смещению положения ламинарно-турбулентного перехода вниз по течению.

Ключевые слова: сверхзвуковой пограничный слой, гидродинамическая устойчивость, ламинарно-турбулентный переход, бинарная газовая смесь.

Введение

Интерес исследователей к пограничному слою бинарной смеси вызван, в частности, необходимостью управлять поверхностным трением и тепловыми потоками в стационарных условиях. Вдув инородного газа в двумерный пограничный слой на плоской пластине рассматривался в работах [1–3], где показано, что для снижения поверхностного трения инжекция легкого газа эффективнее, чем инжекция воздуха. Представленные в этих исследованиях решения строились приближенно. В [1] не рассчитывалось явно сопротивление трения, но его можно было оценить по приведенным профилям скорости. Уравнения пограничного

слоя решались при граничных условиях как на непроницаемой поверхности. При этом концентрация примеси на стенке принимается достаточно большой, хотя скорость вдува принималась равной нулю, что не логично. В работах [2; 3] решения построены в предположении нулевой теплопередачи. Кроме того, в [3] предполагалось, что вязкость бинарной смеси не зависит от концентрации примеси и изменяется линейно с температурой. Число Шмидта принималось равным единице.

Случай теплопередачи отличной от нуля рассматривался в [4], где исследовалось влияние свойств введенного газа на уменьшение поверхностного трения и тепловых потоков. Используя простую модель твер-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-00866-а).

дых сфер для описания процессов столкновения, были решены уравнения движения численно для случая, когда скорость инъекции варьируется обратно пропорционально корню квадратному от продольной координаты. Анализ продемонстрировал, что вдув легкого газа приводит к уменьшению поверхностного трения и теплового потока. Кроме того, вдув газа большой теплоемкости существенно снижал тепловые потоки, но слабо влиял на поверхностное трение. Комбинация большого диаметра молекул и большой теплоемкости многоатомных газов, может быть более значительной в сокращении трения и теплопередачи, чем низкая молекулярная масса одноатомного газа, например гелия. Дополнительные исследования ламинарного пограничного слоя бинарной смеси можно найти в работах [5–7]. Среди работ по исследованию пограничного слоя бинарных смесей следует отметить [8; 9]. В них представлены результаты численного исследования ламинарного пограничного слоя на плоской пластине при вдуве однородного или инородного газа под острым углом к поверхности. Приведены корреляционные формулы для расчета напряжения трения и теплового потока. Установлено, что при подаче однородного газа под острым углом к поверхности пластины (конус) уже при малых скоростях скольжения на стенке может быть достигнуто заметное уменьшение теплового потока. Достаточно подробный обзор работ по исследованию вдува в пограничный слой инородного газа приведен в работе [10]. Из современных работ по этой проблеме можно отметить [11; 12].

подавляющее большинство работ связано с исследованиями турбулентного пограничного слоя бинарных смесей. Прежде всего, они проводились в интересах тепловой защиты обтекаемых высокоскоростным потоком твердых поверхностей [13]. Результаты большого цикла работ по снижению коэффициента восстановления представлены в [14–17].

Данная работа нацелена на изучение свойств сверхзвукового пограничного слоя бинарной смеси для управления ламинарно-турбулентным переходом. Для этого необходима подробная информация о распределении плотности и скорости потока по ламинарному пограничному слою, которая в основном отсутствует в упомянутых работах. В частности, большую роль в потере

устойчивости пограничного слоя играет невязкий критерий: произведение плотности на градиент скорости. Наличие максимума такого произведения в пограничном слое способствует потере устойчивости [18]. Полученные в результате расчетов профили скорости, плотности и температуры будут в дальнейшем использованы для исследования развития возмущений в пограничном слое бинарных смесей при сверхзвуковом обтекании проницаемой плоской пластины и других поверхностей на основе теории гидродинамической устойчивости.

Постановка проблемы: основные уравнения и соотношения

В работе будет рассмотрен пограничный слой двухкомпонентной газовой смеси без химических реакций. С обтекаемой поверхности вдувается примесь с молекулярным весом \tilde{m}_1 в основной поток газа с молекулярным весом \tilde{m}_2 . Основные уравнения, описывающие динамику многокомпонентной смеси, можно найти в [18; 20]. В [18] для бинарной смеси газов получены, кроме того, уравнения трехмерного пограничного слоя. В двумерном случае уравнения пограничного слоя в системе координат (s, y) , где координата s направлена вдоль обтекаемой поверхности, y – нормально к поверхности имеют вид

$$\frac{\partial(U\rho)}{\partial s} + \frac{\partial(V\rho)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(U \frac{\partial U}{\partial s} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P_e}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad (2)$$

$$\rho \left(U \frac{\partial h}{\partial s} + V \frac{\partial h}{\partial y} \right) = U \frac{\partial P_e}{\partial s} - \frac{\partial q}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2, \quad (3)$$

$$\rho \left(U \frac{\partial c_1}{\partial s} + V \frac{\partial c_1}{\partial y} \right) = -\frac{\partial j_1}{\partial y}, \quad (4)$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + (m_2 - m_1) c_1}, \quad P = \frac{\rho R T}{m} = \rho \tilde{R} T, \quad (5)$$

где

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + (h_1 - h_2) j + \frac{RT\alpha_T}{m_2} \frac{1}{m_1/m_2 + (1 - m_1/m_2)c_1} j, \quad (6)$$

$$j_1 = -\rho D_{12} \left[\frac{\partial c_1}{\partial y} + \frac{\alpha_T c_1 (1 - c_1)}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right]. \quad (7)$$

Здесь U, V – скорости смеси в s - и y -направлении; ρ – плотность; h – удельная энтальпия на единицу массы; P – давление; T – температура; q, j_1 – тепловой и массовый поток примеси в y -направлении; c_1 – массовая концентрация примеси; R – универсальная газовая постоянная; μ, λ, D_{12} – коэффициенты динамической вязкости, теплопроводности и диффузии смеси; α_T – коэффициент термомодиффузии.

При вдувании примеси под углом θ к обтекаемой поверхности уравнения пограничного слоя решаются при следующих граничных условиях.

На стенке:

$$\begin{aligned} V &= U_e G \sin \lambda, \\ U &= U_e G \cos \lambda, \quad \left(a_1 T + a_2 \frac{dT}{dy} \right) = 0, \\ V(1-c) &= D_{12} \left[-\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\alpha_T c_1 (1-c_1)}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Последнее равенство получено из условия, что суммарный поток основного газа

$$j_2 + (\rho v)(1-c_1)$$

к пористой стенке равен нулю (см. [8]).

На внешней границе пограничного слоя:

$$U=U_e, T=T_e, c=0.$$

Уравнения двумерного пограничного слоя в автомодельных координатах

В силу того что $P = P_e$, уравнение (1) с учетом (5) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{U P_e}{\tilde{R} T} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V P_e}{\tilde{R} T} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{U}{\tilde{R} T} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V}{\tilde{R} T} \right) &= -\frac{1}{P_e} \frac{dP_e}{ds} \frac{U}{\tilde{R} T} \end{aligned} \quad (9)$$

Следуя [21], введем функцию тока, удовлетворяющую условиям

$$\psi = \int_0^y \frac{U}{\tilde{R} T} dy_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial s} = -\frac{V}{\tilde{R} T} - \frac{\psi}{P_e} \frac{dP_e}{ds} \quad (10)$$

Учитываем (10) и то, что в пограничном слое $\partial P / \partial y = 0$ уравнение (9) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{V}{\tilde{R} T} + \frac{1}{P_e} \frac{dP_e}{ds} \psi \right) = 0. \quad (11)$$

Предполагая существование автомодельной координаты \bar{y} , примем

$$\psi(s, \bar{y}) = N(s) f(\bar{y}), \quad U(s, \bar{y}) = U_e(s) \bar{U}(\bar{y}),$$

$$\rho(s, \bar{y}) = \rho_e(s) \bar{\rho}(\bar{y}), \quad (12)$$

где $\bar{y} = y / \delta(s)$. Кроме того, из уравнений пограничного слоя следует, что на границе пограничного слоя

$$\begin{aligned} \frac{dP_e}{ds} &= -\rho_e U_e \frac{dU_e}{ds}, \\ \frac{dh_e}{ds} &= \frac{1}{\rho_e} \frac{dP_e}{ds} = -U_e \frac{dU_e}{ds}. \end{aligned}$$

Из (10) получим

$$\bar{U} = \frac{\tilde{R} T}{U_e} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\tilde{R} T N}{U_e} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \frac{df}{d\bar{y}} = N \frac{P_e}{\rho_e U_e \bar{\rho}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \frac{df}{d\bar{y}}.$$

По аналогии с [21] принимаем

$$N(s) P_e = \left(2 \int_0^s \rho_e U_e \mu_e ds \right)^{1/2} = \sqrt{2 \bar{s}^{1/2}}, \quad (13)$$

где $\bar{s} = \int_0^s \rho_e U_e \mu_e ds$, $\delta = \bar{s}^{1/2} / \rho_e U_e$. Тогда

$$\bar{U} = \frac{\sqrt{2}}{\bar{\rho}} \frac{df}{d\bar{y}} = \frac{2}{\bar{\rho}} \frac{dF}{d\bar{y}},$$

где $F = f / \sqrt{2}$. (14)

Используя (10)–(14) и следуя [21], можно показать, что для зависимости $a = a_e(s) \bar{a}(\bar{y})$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \rho \left(U \frac{\partial a}{\partial s} + V \frac{\partial a}{\partial y} \right) &= \\ &= \rho_e^2 U_e^2 \mu_e \left(\bar{\rho} \bar{U} \bar{a} \frac{d\bar{a}_e}{d\bar{s}} - \frac{f}{\sqrt{2}} \frac{a_e}{\bar{s}} \frac{d\bar{a}}{d\bar{y}} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

При этом (2) приводится к виду

$$\frac{d}{d\bar{y}} \left(\bar{\mu} \frac{d\bar{U}}{d\bar{y}} \right) + F \frac{d\bar{U}}{d\bar{y}} = (\bar{\rho} \bar{U}^2 - 1) \frac{\bar{s}}{U_e} \frac{dU_e}{d\bar{s}}. \quad (16)$$

Обозначим безразмерное значение теплового потока в соответствии с соотношением $\bar{q}(\bar{y}) = \frac{(\bar{s})^{1/2}}{\rho_e U_e \mu_e h_e} q$. Тогда после пре-

образований (3) с учетом (15) получим

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{q}}{d\bar{y}} &= (\gamma - 1) M_e^2 \bar{U} (\bar{\rho} \bar{h} - 1) \frac{\bar{s} dU_e}{U_e d\bar{s}} + F \frac{d\bar{h}}{d\bar{y}} + \\ &+ (\gamma - 1) M_e^2 \bar{\mu} \left(\frac{d\bar{U}}{d\bar{y}} \right)^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Ввиду того, что $c_{1e} = 0$, $h_e = c_{p2} T_e$,

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{h}{c_{p2} T_e} = \\ &= \frac{c_{p1} T c_1 + c_{p2} T (1-c_1)}{c_{p2} T_e} = (\Delta \bar{c}_{p12} c_1 + 1) \bar{T}, \end{aligned}$$

$$\Delta \bar{c}_{p12} = \frac{c_{p1} - c_{p2}}{c_{p2}} = \frac{c_{p1}}{c_{p2}} - 1. \quad (18)$$

Перепишем уравнение (4) и соотношения (6) и (7) в безразмерном виде:

$$\frac{d\bar{j}_1}{d\bar{y}} = F \frac{dc_1}{d\bar{y}}, \quad j_1 \frac{(\bar{s})^{1/2}}{\rho_e u_e \mu_e} = \bar{j}_1, \quad (19)$$

$$\bar{q} = -\bar{\lambda} \frac{d\bar{T}}{d\bar{y}} + (\bar{h}_1 - \bar{h}_2) \bar{j} + \quad (20)$$

$$+ \frac{R}{c_{p2}} \frac{\bar{T} \alpha_T}{m_2} \frac{1}{m_1/m_2 + (1 - m_1/m_2) c_1} \bar{j},$$

$$\bar{j} = -\bar{\rho} \bar{D}_{12} \left[\frac{dc}{d\bar{y}} + \frac{\alpha_T c_1 (1 - c_1)}{\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{d\bar{y}} \right], \quad (21)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu_e c_{p2}}, \quad \bar{D}_{12} = \frac{\rho_e D_{12}}{\mu_e}.$$

Система уравнений (14)–(17), (19)–(21) дополняется соотношением (18) и уравнением состояния (5), которое в безразмерном виде записывается как

$$\bar{\rho} \bar{T} / \bar{m} = 1, \quad \bar{m} = m/m_2. \quad (22)$$

Введем обозначения

$$z_1 = F, \quad z_2 = \bar{\mu} (d\bar{U} / d\bar{y}), \quad z_3 = \bar{U}, \quad z_4 = \bar{q},$$

$$z_5 = \bar{T}, \quad z_6 = \bar{j}, \quad z_7 = c_1, \quad \Delta_u = \frac{\bar{s}}{U_e} \frac{dU_e}{d\bar{s}},$$

тогда система уравнений (14)–(17), (19)–(21) принимает вид

$$\frac{dz_1}{d\bar{y}} = \frac{\bar{\rho} z_3}{2}, \quad \frac{dz_2}{d\bar{y}} = -\frac{z_1 z_2}{\bar{\mu}} + (\bar{\rho} z_3^2 - 1) \Delta_u,$$

$$\frac{dz_3}{d\bar{y}} = \frac{z_2}{\bar{\mu}},$$

$$\frac{dz_4}{d\bar{y}} = (\gamma - 1) M_e^2 z_3 (\bar{\rho} \bar{h} - 1) \Delta_u + z_1 \frac{d\bar{h}}{d\bar{y}} +$$

$$+ (\gamma - 1) M_e^2 \bar{\mu} z_3^2$$

$$\frac{dz_5}{d\bar{y}} = \frac{1}{\bar{\lambda}} \left\{ -z_4 + \left[(\bar{c}_{p1} - 1) z_5 + z_5 \frac{R}{c_{p2}} \frac{\alpha_T}{m_2} \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{1}{m_1/m_2 + (1 - m_1/m_2) c_1} \right] z_6 \right\},$$

$$\frac{dz_6}{d\bar{y}} = -z_1 \frac{1}{\bar{\rho} \bar{D}_{12}} \left\{ z_6 + \bar{\rho} \bar{D}_{12} \frac{\alpha_T c (1 - c)}{z_5} \frac{dz_5}{d\bar{y}} \right\},$$

$$\frac{dz_7}{d\bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\rho} \bar{D}_{12}} \left\{ z_6 + \bar{\rho} \bar{D}_{12} \frac{\alpha_T z_7 (1 - z_7)}{z_5} \frac{dz_5}{d\bar{y}} \right\}.$$

Безразмерные равенства (18), (22) и $d\bar{h}/d\bar{y}$ записываются в виде

$$\bar{h} = (\Delta \bar{c}_{p12} z_7 + 1) z_5,$$

$$\bar{\rho} = \frac{m_1/m_2}{(m_1/m_2 + (1 - m_1/m_2) z_7) z_5},$$

$$\frac{d\bar{h}}{d\bar{y}} = (\bar{c}_{p1} - 1) z_5 \frac{dz_7}{d\bar{y}} + ((\bar{c}_{p1} - 1) z_7 + 1) \frac{dz_5}{d\bar{y}} =$$

$$= -(\bar{c}_{p1} - 1) z_5 \frac{1}{\bar{\rho} \bar{D}_{12}} \left\{ z_6 + \bar{\rho} \bar{D}_{12} \frac{\alpha_T z_7 (1 - z_7)}{z_5} \frac{dz_5}{d\bar{y}} \right\} +$$

$$+ ((\bar{c}_{p1} - 1) z_7 + 1) \frac{1}{\bar{\lambda}} \left\{ -z_4 + \left[(\bar{c}_{p1} - 1) z_5 + z_5 \frac{R}{c_{p2}} \frac{\alpha_T}{m_2} \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{1}{m_1/m_2 + (1 - m_1/m_2) z_7} \right] z_6 \right\}.$$

Прежде чем записать граничные условия на проницаемой поверхности (8), установим связь между $F = z_1$ и V/U_e . Из (11) имеем

$$\frac{V}{\bar{R}T} = -\frac{\partial \psi}{\partial s} - \frac{\psi}{P_e} \frac{dp_e}{ds} =$$

$$= -f \frac{\partial N}{\partial s} - N \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial s} - f \frac{N}{P_e} \frac{dP_e}{ds}.$$

На стенке $\bar{y} = 0$, $\partial \bar{y} / \partial s = 0$, поэтому

$$\frac{U_w}{u_e} = -\frac{(\bar{R}T)_w}{u_e} f_w N \frac{d(\ln N p_e)}{ds} =$$

$$= -\frac{(\bar{R}T)_w}{(\bar{R}T)_e} \frac{f_w}{\sqrt{2}} \frac{\mu_e}{\bar{s}^{1/2}} = -\frac{(\bar{R}T)_w}{(\bar{R}T)_e} \frac{F_w}{\text{Re}},$$

где $\text{Re} = \bar{s}^{1/2} / \mu_e$. В отсутствие продольного градиента давления (плоская пластина)

$$\text{Re} = (U_e x p_e / \mu_e)^{1/2}.$$

Таким образом, $F_w = -\text{Re} v \bar{V}_w / (\bar{R}_w \bar{T}_w)$. Поэтому условия на стенке (11) в новых переменных записываются в виде

$$z_1 = -G \sin \theta \frac{\text{Re}}{\bar{R}T}, \quad z_3 = G \cos \theta,$$

$$\left(\bar{a}_1 z_5 + \bar{a}_2 \frac{dz_5}{d\bar{y}} \right) = 0,$$

$$\bar{D}_{12} \left(\frac{dz_7}{d\bar{y}} - \frac{\alpha_T z_7 (1 - z_7)}{z_5} \frac{dz_5}{d\bar{y}} \right) -$$

$$-\bar{R}_w \bar{T}_w (1 - z_7) z_1 = 0.$$

На границе пограничного слоя

$$z_7 = 0, \quad z_3 = z_5 = 1. \quad (23)$$

В работе [22] на примере гиперзвукового полета в атмосфере Марса показано, что вклад третьего члена правой части (20) составляет не более одного процента, и в большинстве аэродинамических задач этим членом (эффектом Дюфура) можно пренебречь. Если, кроме того, пренебречь термодиффузией, система обыкновенных дифференциальных уравнений пограничного слоя в отсутствие продольного градиента скорости на внешней границе пограничного слоя ($\Delta_u = 0$) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{d\bar{y}} &= \frac{\bar{\rho}z_3}{2}, \quad \frac{dz_2}{d\bar{y}} = -\frac{z_1z_2}{\bar{\mu}}, \quad \frac{dz_3}{d\bar{y}} = \frac{z_2}{\bar{\mu}}, \\ \frac{dz_4}{d\bar{y}} &= z_1 \frac{d\bar{h}}{d\bar{y}} + (\gamma - 1) M_e^2 \bar{\mu} z_3^2, \\ \frac{dz_5}{d\bar{y}} &= \frac{1}{\lambda} \left\{ -z_4 + (c_{p1}/c_{p2} - 1) z_5 z_6 \right\}, \\ \frac{dz_6}{d\bar{y}} &= -z_1 \frac{z_6}{\bar{\rho} \bar{D}_{12}}, \quad \frac{dz_7}{d\bar{y}} = -\frac{z_6}{\bar{\rho} \bar{D}_{12}}, \\ \frac{d\bar{h}}{d\bar{y}} &= -(c_{p1}/c_{p2} - 1) z_5 \frac{z_6}{\bar{\rho} \bar{D}_{12}} + \\ &+ \left((c_{p1}/c_{p2} - 1) z_7 + 1 \right) \times \\ &\times \frac{1}{\lambda} \left\{ -z_4 + (c_{p1}/c_{p2} - 1) z_5 z_6 \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Диффузионное соотношение на стенке упрощается:

$$\bar{D}_{12} (dz_7/d\bar{y}) - \bar{R}_w \bar{T}_w (1 - z_7) z_1 = 0. \quad (25)$$

Для расчета вязкости бинарной смеси воспользуемся соотношениями из [21], которые в безразмерной форме имеют вид

$$\bar{\mu} = \frac{X_1 \bar{\mu}_1}{X_1 + G_{12} X_2} + \frac{X_2 \bar{\mu}_2}{X_2 + G_{21} X_1},$$

где

$$\begin{aligned} X_1 &= cm / m_1, \quad X_2 = (1 - c) m / m_2, \\ \bar{\mu}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2 &= (\mu, \mu_1, \mu_2) / \mu_{2e}, \end{aligned}$$

$$G_{12} = \frac{\left[1 + (\mu_1/\mu_2)^{1/2} (m_1/m_2)^{1/4} \right]^2}{8^{1/2} \left[1 + (m_1/m_2) \right]^{1/2}},$$

$$G_{21} = \frac{\left[1 + (\mu_2/\mu_1)^{1/2} (m_2/m_1)^{1/4} \right]^2}{8^{1/2} \left[1 + (m_2/m_1) \right]^{1/2}}.$$

Там же приведена формула для расчета теплопроводности бинарной смеси, которую можно привести к безразмерному виду

$$\bar{\lambda} = \frac{X_1 \bar{\lambda}'_1}{X_1 + 1.065 \tilde{G}_{12} X_2} + \frac{X_2 \bar{\lambda}'_2}{X_2 + 1.065 \tilde{G}_{21} X_1},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}'_i &= \bar{\lambda}_i Eu, \quad Eu = 0.115 + 0.354 C_{pi} / R_i, \\ \bar{\lambda}, \bar{\lambda}'_1, \bar{\lambda}'_2 &= (\bar{\lambda}, \bar{\lambda}'_1, \bar{\lambda}'_2) / \mu_e c_{pe}, \quad \lambda_i = 15 R \mu_i / m_i, \end{aligned}$$

$$\tilde{G}_{12} = \frac{\left[1 + (\lambda_1/\lambda_2)^{1/2} (m_1/m_2)^{1/4} \right]^2}{8^{1/2} \left[1 + (m_1/m_2) \right]^{1/2}},$$

$$\tilde{G}_{21} = \frac{\left[1 + (\lambda_2/\lambda_1)^{1/2} (m_2/m_1)^{1/4} \right]^2}{8^{1/2} \left[1 + (m_2/m_1) \right]^{1/2}}.$$

При этом коэффициенты вязкости и теплопроводности одноатомных газов согласно кинетической теории

$$\mu_i^* = 2.6693 \cdot 10^{-6} \frac{\sqrt{m_i T^*}}{d_i^2 \Omega^{(2,2)*}}, \quad \lambda_i^* = \frac{15 R}{4 m_i} \mu_i^*.$$

Безразмерный коэффициент диффузии

$$\begin{aligned} \bar{D}_{12} &= \frac{\rho_e}{\mu_e} D_{12} = 2.628 \cdot 10^{-7} \times \\ &\times \frac{\left[T^3 (m_1 + m_2) / 2 m_1 m_2 \right]^{1/2} \rho_e}{P \sigma_{12}^2 \Omega^{(1,1)*} (T^*)} \frac{\rho_e}{\mu_e}, \end{aligned}$$

где D_{12} приведено в квадратных сантиметрах в секунду, $\sigma_{12} = (\sigma_1 + \sigma_2) / 2$ – в ангстремах, P – в атмосферах, T – в градусах Кельвина.

Интегралы столкновений $\Omega^{(1,1)*}$ и $\Omega^{(2,2)*}$ могут быть вычислены на основе потенциала Леннарда-Джонса. Необходимые параметры для расчета коэффициентов вязкости, теплопроводности и диффузии для ряда газов приведены в таблице.

В настоящей работе уравнения (24) интегрировались численно методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности. Применялись методы стрельбы и ньютоновские итерации для удовлетворения граничным условиям (23), (25).

Результаты

Исследования проводились для пограничного слоя на плоской пластине при обтекании воздухом при числах Маха $M = 0,7$ и $2,0$. Через проницаемую пластину вдувался инородный газ. Расчеты выполнены прежде всего для следующих примесей: тетрахлорметан (CCl_4), ксенон (Xe), гелий (He). Отдельно исследовалось влияние отношения молекулярных весов примеси и основ-

	m_1	d_1, A	$\varepsilon/K1, ^\circ K$	C_p
H ₂	2	2,915	38	14320
He	4	2,576	10	5190
Ne	20	2,789	36	1030
Air	29	3,617	97	1004
Kr	84	3,498	225	248
Xe	131	4,055	229	160
SF ₆	146	4,268	233	860
CCl ₄	154	5,881	327	866

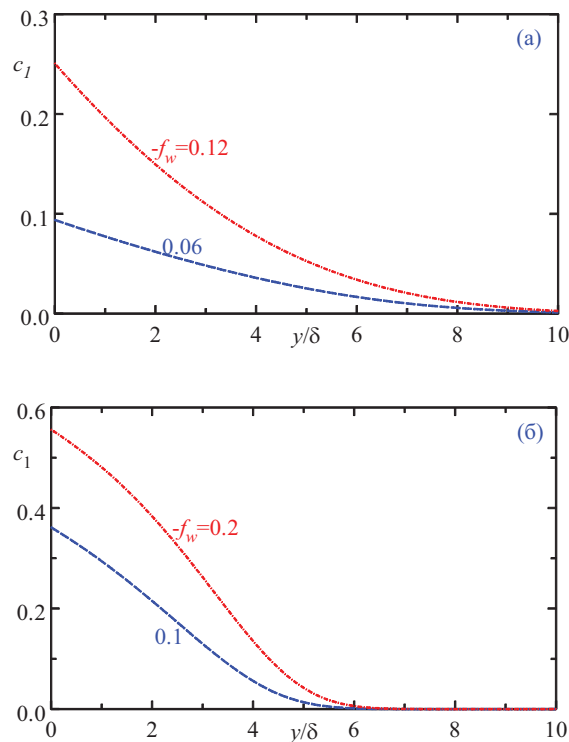


Рис. 1. Распределение концентрации примеси поперек пограничного слоя $c_1 = c_1(y)$ при двух значениях параметра $-f_w$; инжекция He (а) и CCl₄ (б) с поверхности теплоизолированной плоской пластины, $M = 2$

ного газа при одинаковых теплоемкостях на распределение плотности по сечению пограничного слоя. Все результаты представлены в безразмерном виде: физические величины отнесены к своим значениям на границе пограничного слоя, а расстояние от стенки – к толщине δ .

На рис. 1 приведены рассчитанные профили концентрации примеси поперек пограничного слоя $c_1 = c_1(y/\delta)$ при увеличении инжекции $-f_w$ примеси с поверхности

теплоизолированной плоской пластины при числе Маха набегающего потока воздуха $M = 2$. Видно, что с ростом $-f_w$ происходит увеличение концентрации инжектируемого газа вблизи стенки. Однако величина c_1 достаточно быстро убывает при удалении от поверхности модели и вблизи внешней границы пограничного слоя ($y \approx 8$) становится равной нулю. Можно отметить, что диффузия инжектированного с поверхности легкого газа гелия (рис. 1, а) оказывается более эффективной по сравнению с диффузией тяжелого тетрахлорметана (рис. 1, б): толщина диффузионного слоя гелия оказывается несколько больше аналогичной величины для CCl₄.

На рис. 2 показаны рассчитанные профили продольной скорости $\bar{U} = \bar{U}(\bar{y})$ пограничного слоя бинарной смеси при увеличении параметра инжекции $-f_w$ от нуля. Видно, что инжекция и гелия (рис. 2, а) и тетрахлорметана (рис. 2, б) с поверхности теплоизолированной плоской пластины при $M = 2$ не приводит к существенной перестройке продольной компоненты скорости, а вызывает лишь незначительное увеличение толщины пограничного слоя.

На рис. 3 приведены профили плотности $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\bar{y})$ пограничного слоя бинарной смеси при инжекции He (рис. 3, а) и CCl₄ (рис. 3, б) с поверхности теплоизолированной плоской пластины, рассчитанные при числе Маха $M = 2$. Видно, что увеличение инжекции тетрахлорметана (в пять раз тяжелее воздуха, см. таблицу) от нуля до $-f_w = 0,2$ приводит к монотонному увеличению плотности смеси на стенке от $\bar{\rho}_w = 0,6$ до значения 1,05. Такого увеличения плотности можно достичь также при охлаждении поверхности модели. Повышение $\bar{\rho}_w$ приводит к уменьшению скоростей роста неустойчивых возмущений, т. е. к увеличению устойчивости пограничного слоя по крайней мере в линейном приближении, и, как следствие, к затягиванию перехода. В то же время из рис. 3, а видно, что увеличение инжекции гелия (молекулярный вес в семь раз меньше, чем у воздуха, см. таблицу) от нуля до $-f_w = 0,12$ приводит лишь к незначительному уменьшению $\bar{\rho}_w$ – от 0,6 до 0,5.

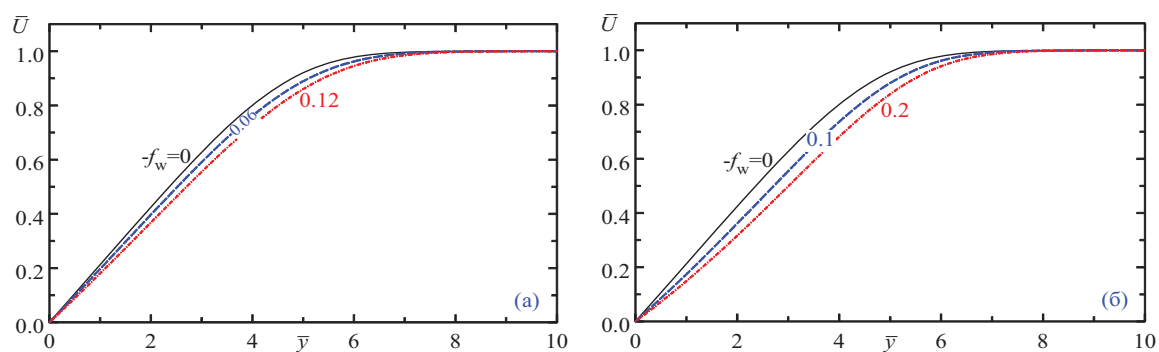


Рис. 2. Профили скорости $\bar{U} = \bar{U}(\bar{y})$ пограничного слоя бинарной смеси при ряде значений параметра $-f_w \geq 0$; инжекция He (а) и CCl_4 (б) с поверхности теплоизолированной плоской пластины, $M = 2$

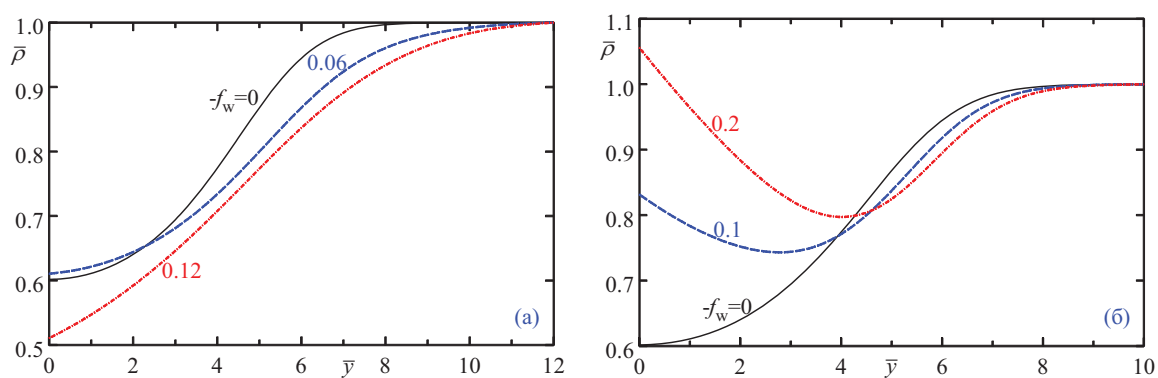


Рис. 3. Профили плотности $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\bar{y})$ пограничного слоя бинарной смеси при ряде значений параметра $-f_w \geq 0$; инжекция He (а) и CCl_4 (б) с поверхности теплоизолированной плоской пластины, $M = 2$

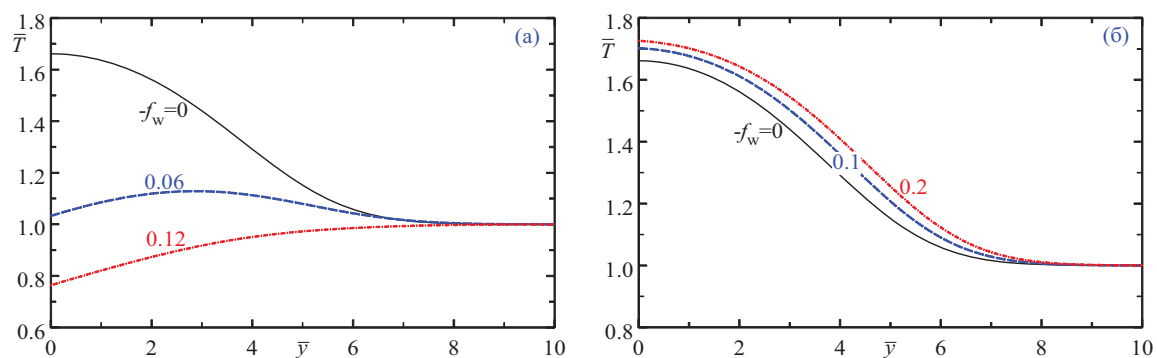


Рис. 4. Профили температуры $\bar{T} = \bar{T}(\bar{y})$ пограничного слоя бинарной смеси при ряде значений параметра $-f_w \geq 0$; инжекция He (а) и CCl_4 (б) с поверхности теплоизолированной плоской пластины, $M = 2$

Для того чтобы понять причины такого явления, обратим внимание на рис. 4, где приведены профили температуры $\bar{T} = \bar{T}(\bar{y})$

пограничного слоя бинарной смеси. Видно, что инжекция тетрахлорметана (рис. 4, б) вызывает лишь незначительное повышение

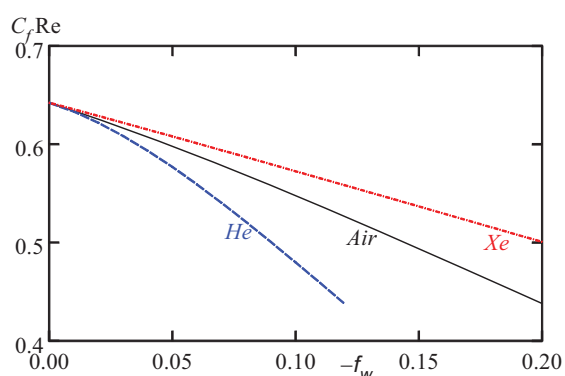


Рис. 5. Нормированный коэффициент поверхностного трения $C_f Re$ в зависимости от параметра $-f_w$; при инъекции гелия, воздуха и ксенона с поверхности теплоизолированной плоской пластины, $M = 2$

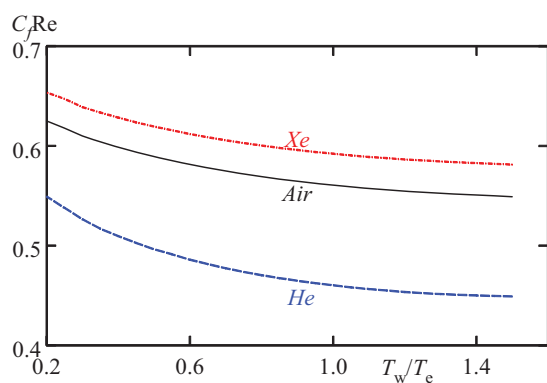


Рис. 6. Нормированный коэффициент поверхностного трения $C_f Re$ в зависимости от температуры поверхности T_w/T_e при инъекции гелия, воздуха и ксенона; параметр инъекции $-f_w = 0,1$, $M = 2$

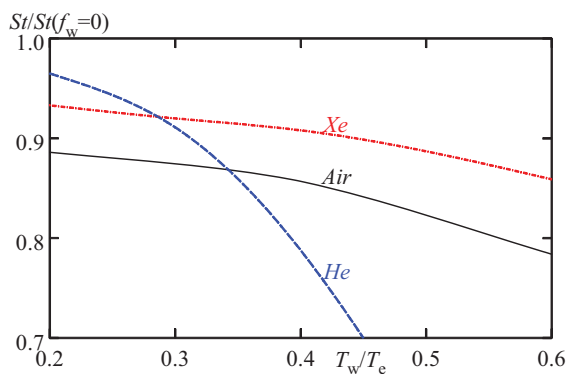


Рис. 7. Влияние температуры поверхности T_w/T_e на нормированное число Стэнтона St при инъекции гелия, воздуха и ксенона с поверхности теплоизолированной плоской пластины, $M = 0,7$

температуры. В то же время рост инъекции гелия (рис. 4, *a*) от нуля до $-f_w = 0,12$ приводит к существенному снижению температуры смеси около стенки, от $\bar{T}_w = 1,65$ до $\bar{T}_w = 0,77$, т. е. более чем в два раза. Такое резкое уменьшение температуры объясняется тем, что теплоемкость гелия более чем в пять раз превосходит теплоемкость воздуха. В результате вблизи поверхности модели, где концентрация инжектированного гелия относительно велика (см. рис. 1, *a*), происходит отмеченное выше снижение температуры смеси.

Влияние интенсивности инъекции и молекулярного веса примеси на коэффициент поверхностного трения $C_f Re$ показано на рис. 5. Видно, что увеличение параметра инъекции приводит к монотонному уменьшению трения для всех газов – гелия, воздуха и ксенона. Кроме того, легкий газ оказывается наиболее эффективным в смысле уменьшения C_f , тогда как вдув тяжелого ксенона приводит лишь к незначительному уменьшению поверхностного трения.

На рис. 6 показано влияние температуры стенки в случае ее охлаждения на величину $C_f Re$. Можно видеть, что с уменьшением T_w коэффициент трения монотонно увеличивается для всех рассмотренных газов. Как и ранее (см. рис. 5), сопротивление трения растет с увеличением молекулярного веса инжектируемой примеси.

На рис. 7 приведены результаты расчетов, демонстрирующие влияние температуры поверхности на отношение числа Стэнтона при инъекции ($-f_w = 0,1$) примеси с поверхности к аналогичному числу в отсутствие инъекции ($f_w = 0$). Можно видеть, что, при не слишком холодной поверхности ($T_w/T_e > 0,36$) легкий газ является лучшим охладителем в том смысле, что инъекция его позволяет наиболее эффективно уменьшить приток тепла из пограничного слоя к стенке. В то же время на более холодной поверхности ($T_w/T_e < 0,3$) влияние становится прямо противоположным – инъекция легкого газа охлаждает стенку хуже, чем инъекция воздуха и ксенона. Причину такого неоднозначного поведения легко понять из вида выражения для потока тепла в бинарной смеси (20), который, если пренеб-

речь влиянием термодиффузии ($\alpha_T = 0$) легкого газа, охлаждает стенку хуже, чем инжекция воздуха и ксенона. Причину такого неоднозначного поведения легко понять из вида выражения для потока тепла в бинарной смеси (20), который, если пренебречь влиянием термодиффузии ($\alpha_T = 0$), содержит два слагаемых. Одно из них определяется градиентом температуры, другое – влиянием концентрации примеси. При низкой температуре первый член преобладает над вторым. При повышении T_w в случае инжекции гелия (низкий молекулярный вес, но теплоемкость гораздо выше, чем у воздуха) второе слагаемое становится важным, чем и объясняется поведение кривой для гелия на рис. 7.

Рис. 8 демонстрирует поведение функций $\bar{\rho}(d\bar{U}/d\bar{y})$, рассчитанных в случае инжекции воздуха (рис. 8, а), гелия (рис. 8, б) и тетрахлорметана (рис. 8, в). Появление экстремума этой функции

$$d/d\bar{y} [\bar{\rho}(d\bar{U}/d\bar{y})] = 0$$

(обобщенной точки перегиба) является необходимым условием невязкой неустойчивости [18], т. е. в этом случае можно ожидать высоких скоростей роста возмущений пограничного слоя. На рис. 8, а, б видно, что в случае инжекции воздуха и гелия в пограничный слой с ростом $-f_w$ формируется четко выделенный максимум функции $\bar{\rho}(d\bar{U}/d\bar{y})$, т. е. в профилях пограничного слоя формируется обобщенная точка перегиба, и пограничный слой получает дополнительную дестабилизацию. В то же время инжекция тетрахлорметана (рис. 8, в) не вызывает такой деформации течения. Явно выраженная обобщенная точка перегиба в профилях пограничного слоя не формируется, а это не приводит к развитию невязкой неустойчивости как в случаях рис. 8а, б. При этом плотность смеси вблизи стенки увеличивается (рис. 3б), что должно оказывать стабилизирующее воздействие на неустойчивость пограничного слоя.

Наконец, рис. 9 демонстрирует результаты расчетов пограничного слоя при вдуве примеси, все свойства которой идентичны аналогичным свойствам воздуха, за исключением молекулярного веса, т. е. $C_{p1} = C_{p2}$, $d_1 = d_2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. На рис. 9 показаны расчи-

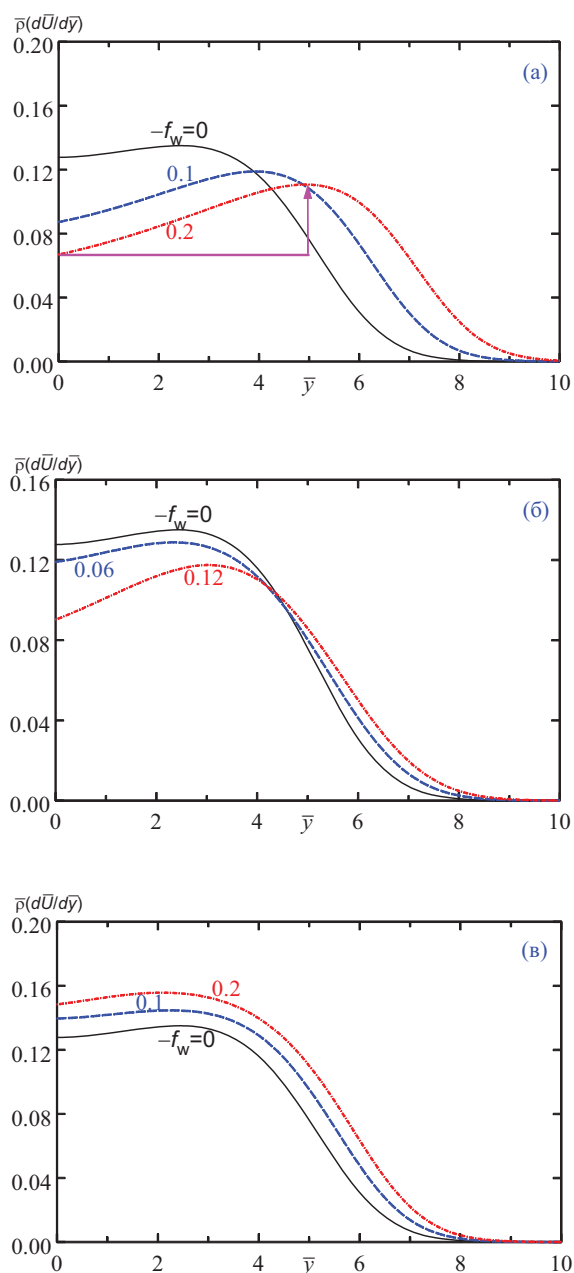


Рис. 8. Функции $\bar{\rho}(d\bar{U}/d\bar{y})$, характеризующие перегибность профилей пограничного слоя при инжекции воздуха (а), гелия (б) и CCl_4 (в), рассчитанные для нескольких значений параметра инжекции $0 \leq -f_w \leq 0,2$; $M = 2$, теплоизолированная плоская пластина

танные профили плотности пограничного слоя без инжекции (кривые $f_w = 0$) и с инжекцией $-f_w = 0,1$ газа с различным молекулярным весом: $0,25 \leq m_1/m_2 \leq 8$. При этом в расчетах, представленных на рис. 9, а, стенка предполагалась теплоизолированной,

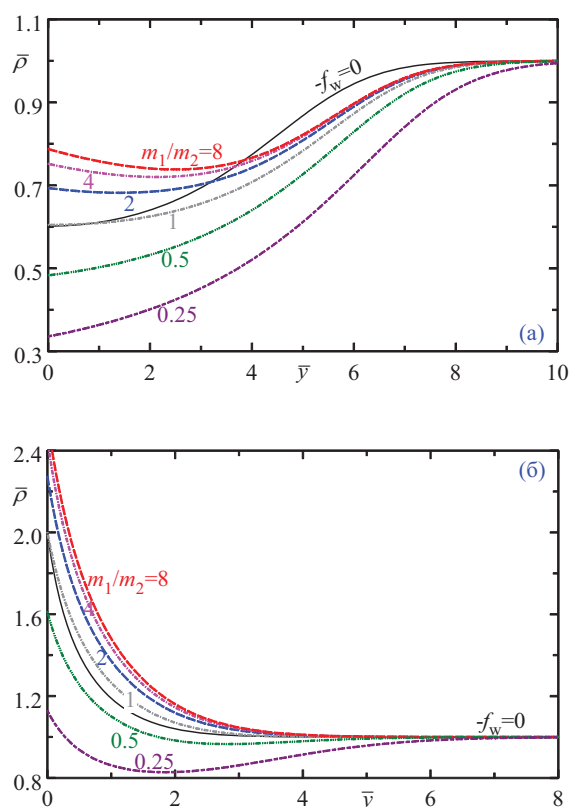


Рис. 9. Профили плотности $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\bar{y})$, пограничного слоя воздуха при инъекции с поверхности «газов» с различным молекулярным весом $0,25 \leq m_1/m_2 \leq 8$; параметр инъекции $-f_w = 0,1$, $M = 2$; теплоизолированная плоская пластина (а) и холодная стенка $T_w/T_e = 0,5$ (б)

тогда как на рис. 9, б показаны результаты расчетов для охлаждаемой поверхности модели $T_w/T_e = 0,5$. Видно, что в обоих случаях инъекция более легкого газа ($m_1/m_2 < 1$) приводит к уменьшению плотности смеси вблизи стенки, тогда как инъекция более тяжелого газа ($m_1/m_2 > 1$) увеличивает ρ_w , что теоретически должно благоприятно сказываться на устойчивости пограничного слоя.

Выводы

Получена система уравнений для описания сжимаемого пограничного слоя бинарной смеси газов при инъекции примеси с поверхности модели в приближении локальной автомодельности течения. Выполнены параметрические расчеты профилей

пограничного слоя на плоской пластине. Показано, что влияние инъекции тяжелого газа на профили плотности пограничного слоя аналогичны влиянию охлаждения поверхности. Оба эти воздействия приводят к повышению плотности смеси вблизи стенки, что должно благоприятно сказываться на устойчивости пограничного слоя, в результате чего следует ожидать задержки перехода слоя в турбулентное состояние.

Список литературы

1. Smith J. W., Eckert E. R. G., Schneider P. J., Faulders C. R. Effect of diffusion fields on the laminar boundary layer // J. Aero. Sci. 1954. Vol. 21. P. 154–162, 640–641.
2. Eckert E. R. G., Schneider P. J. Effect of diffusion in an isothermal boundary layer // J. Aero. Sci. 1956. Vol. 23. P. 384–387.
3. Faulders C. R. A note on laminar boundary layer skin friction under the influence of foreign gas injection // J. Aero. Space Sci. 1961. Vol. 28. P. 166–167.
4. Korobkin I. The effects of the molecular properties of an injected gas on compressible laminar boundary layer skin friction and heat transfer // U.S. Naval Ordnance Laboratory Report. 7410. 1961.
5. Craven A. H. The compressible laminar boundary layer with foreign gas injection // College of Aeronautics, Cranfield, Report No. 155. 1962.
6. Albacete L. M., Glowacki W. J. Skin friction and heat transfer characteristics of the compressible laminar boundary layer with injection of a light, medium, and heavy gas // NOLTR 66-215. 1967.
7. Adams E. W., Warmbrod J. D., Fox C. L., Huffaker R. M. Heat and mass transfer in binary inert gas flow for distributions of temperature and concentration rendering the properties nearly constant // MTP-AERO-64-2. 1964.
8. Степанов Э. А. Ламинарный пограничный слой на пластине и конусе при наличии вдува // Учен. зап. ЦАГИ. 1971. Т. 2, № 3.
9. Степанов Э. А. Ламинарный пограничный слой на пластине при вдуве газа под острым углом к поверхности // Учен. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3, № 3.
10. Ерошенко В. М., Зайчик Л. И. Гидродинамика и теплообмен на проницаемых поверхностях. М.: Наука, 1984. 276 с.

11. *Volchkov E. P.* Concerning the heat and mass transfer features on permeable surfaces // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2006. Vol. 49. P. 755–762.
12. *Волчков Э. П., Макаров М. С., Макарова С. Н.* Определение тепловых и диффузионных потоков на проницаемой стенке при инородном вдуве в пограничный слой // *Современная наука.* 2011. № 2. С. 102–107.
13. *Волчков Э. П.* Пристенные газовые завесы. Новосибирск: Наука, 1983. 240 с.
14. *Леонтьев А. И., Луцник В. Г., Якубенко А. Е.* Сжимаемый турбулентный пограничный слой на проницаемой пластине при вдуве инородного газа // *ТВТ.* 2007. Т. 45, № 4. С. 543–551.
15. *Леонтьев А. И., Луцник В. Г., Якубенко А. Е.* Температура теплоизолированной проницаемой стенки в потоке сжимаемого газа // *Изв. РАН. МЖГ.* 2008. № 5. С. 144–152.
16. *Луцник В. Г., Якубенко А. Е.* Трение и теплообмен в пограничном слое на проницаемой поверхности при вдуве инородного газа // *ТВТ.* 2005. Т. 43, № 6. С. 880–887.
17. *Макарова М. С.* Оптимизация температуры проницаемой стенки при вдуве инородного газа // *Тепловые процессы в технике.* 2012. № 7. С. 291–297.
18. *Гапонов С. А., Петров Г. В.* Устойчивость пограничного слоя неравновесно диссоциирующего газа. Новосибирск: Наука, 2013. 96 с.
19. *Гиришфелдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: ИЛ, 1961.
20. *Латин Ю. В.* Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М.: Наука, 1970. 343 с.
21. *Дорренс У. Х.* Гиперзвуковые течения вязкого газа. М.: Мир, 1966. 439 с.
22. *Сызранова Н. Г., Шевелев Ю. Д.* О моделировании диффузии в многокомпонентных газовых средах // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике.* 2011. Т. 12.

Материал поступил в редколлегию 11.02.2016

S. A. Gaponov, B. V. Smorodsky

*S. A. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, SB RAS
4/1 Institutskaya Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation*

gaponov@itam.nsc.ru, smorodsk@itam.nsc.ru

LAMINAR SUPERSONIC BOUNDARY LAYER OF THE BINARY GAS MIXTURE

Theoretical investigation of the properties of a compressible binary-mixture boundary-layer in the framework of local self-similar boundary-layer equations. We have considered the problem, when the foreign gas of various molecular weights – lighter and heavier than air – has been injected into the flat-plate boundary-layer through the permeable model surface. Computations of the binary-mixture velocity, density and temperature profiles as well as foreign gas concentration in such boundary layers at different Mach numbers have been performed. It has been found that increase of a foreign gas injection leads to a monotonous decrease of the skin friction and heat transfer coefficients. It has been established that at free stream Mach number $M \approx 2$ action of a heavy gas injection from the model surface into the boundary layer is similar to the action of the model cooling. This injection increases the density of the mixture near the wall. As a result, the profiles of the supersonic boundary layer are modified in such a way that the boundary-layer linear stability should be increased with injection of a foreign gas with high molecular weight. This in turn should lead to a shift in position of the laminar-turbulent transition downstream.

Keywords: supersonic boundary layer, hydrodynamic stability, laminar-turbulent transition, binary gas mixtures.