

УДК 532.526:533.6.011.55

С. А. Гапонов, Н. М. Терехова

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН
ул. Институтская, 4/1, Новосибирск, 630090, Россия*

gaponov@itam.nsc.ru, terekh@itam.nsc.ru

АВТОКОЛЕБАНИЯ, ОТВЕТВЛЯЮЩИЕСЯ ОТ НЕЙТРАЛЬНОЙ КРИВОЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ $M = 2$

В рамках слабонелинейной теории устойчивости исследуется мягкое и жесткое порождение периодических колебаний в сверхзвуковом пограничном слое при числе Маха $M = 2$. Модель включает эффекты самовоздействия (порождение стационарных вторичных гармоник и генерацию возмущений двойных частот). Показано, что в рамках этой модели на нижней ветви нейтральной кривой появляются области докритического роста. Этот эффект напрямую связан с влиянием сжимаемости.

Ключевые слова: пограничные слои сжимаемого газа, гидродинамическая устойчивость, слабонелинейная теория

Введение

Представление о начале естественного перехода в пограничных слоях связано с возбуждением и селективным усилением квазигармонического возмущения, развитие которого на исходном участке носит автономный характер и существенно определяет весь процесс [1–5].

В настоящее время делаются попытки исследовать эволюцию возмущений, используя прямые методы интегрирования уравнений Навье – Стокса [6–8]. К сожалению, численному моделированию присущи трудности, связанные с обработкой большого массива данных, достоверность которых не всегда очевидна, и с физической интерпретацией полученных результатов. Поэтому, например, в [9] при обзоре работ по численному моделированию ламинарно-турбулентного перехода сверхзвуковых пограничных слоев не сделано обобщающих выводов по нелинейному взаимодействию возмущений. Гораздо более эффективными для моделирования нелинейных процессов оказались методы теории возмущений. Бла-

годаря им удается построить модель начальной стадии развития неустойчивости течения (приближение слабой нелинейности), существенно упрощающую анализ и позволяющую дифференцировать управляющие процессом механизмы.

Существует несколько сценариев перехода к турбулентности. При малых уровнях внешних возмущений после линейного усиления наступает стадия нелинейного взаимодействия волн. Одним из наиболее типичных и часто реализуемых начальных стадий нелинейности является субгармонический трехволновый резонанс. В основе резонансной модели лежит процесс взаимодействия трех волн в условиях синхронизации их фаз [10–15]: $\theta_1 = \theta_2 + \theta_3$.

Наряду с трехволновым резонансным взаимодействиям, даже при квадратичной нелинейности, важная роль принадлежит резонансу, имеющему место при взаимодействии колебаний основной частоты со стационарным вторичным течением и возмущением удвоенной частоты, описываемому кубическими по амплитуде членами модельных уравнений [16–21]. В отсутствие

Гапонов С. А., Терехова Н. М. Автоколебания, ответвляющиеся от нейтральной кривой в сверхзвуковом пограничном слое при $M = 2$ // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Физика. 2016. Т. 11, № 3. С. 5–15.

трехволнового фазового синхронизма такой механизм становится доминирующим.

Обзор работ по изучению самовоздействия квазигармонического возмущения (волны Толлмина – Шлихтинга), и прежде всего по вопросам существования и характеру вторичных установившихся течений как в пограничных слоях, так и в слоях смешения, имеется в [4].

Большинство выполненных работ ограничено анализом развития уединенной двумерной синусоидальной волны. Данная ситуация соответствует случаю, когда селективно усиленное на линейном участке возмущение существенно превосходит все колебания других типов, взаимодействие с которыми оказывается пренебрежимо малым. В ходе эволюции такая волна искажает исходное течение и генерирует гармоники, что, в свою очередь, изменяет степень передачи энергии к возмущению и скорость роста по сравнению с линейным. В результате в одних случаях в устойчивой области линейных возмущений могут существовать усиливающиеся конечные флуктуации, в других – учет нелинейности может подавить линейное нарастание, стабилизировать амплитуду и привести к возникновению периодических вторичных течений в линейно неустойчивой области.

Периодические вторичные течения могут быть определены на основе теории ветвления решений уравнений Навье – Стокса [4; 16; 17]. Установлено два типа ветвления: жесткий, если периодические движения возможны при $Re_{nel} < Re_{lin}$ на нейтральной кривой, и мягкий, если $Re_{nel} > Re_{lin}$.

Кратко опишем характер поведения возмущений, основанный на решении амплитудных уравнений Ландау [1–3]. Уравнение Ландау описывает изменение амплитуды колебаний во времени. Для периодических во времени колебаний, амплитуда которых зависит от пространственной координаты X , вблизи нейтральной кривой амплитудное уравнение можно записать в виде

$$\frac{d|A|^2}{dX} = 2\alpha^i |A|^2 + 2b^r |A|^4.$$

В предположении параллельности линий тока основного течения величины α^i и b^r можно считать постоянными. В этом случае уравнение интегрируется в явном виде

$$|A|^2 = \frac{-2\alpha^i |A_0|^2 \exp(-2\alpha^i X)}{-2\alpha^i + 2b^r |A_0|^2 (1 - \exp(-2\alpha^i X))}.$$

Неустойчивая область (отрицательные значения α^i). При отрицательных значениях $b^r |A|^2 \rightarrow \alpha^i/b^r$ при $X \rightarrow \infty$ для любых начальных значений амплитуд. Таким образом, для заданных частоте и боковом волновом числе при отрицательном значении второго коэффициента Ландау внутри неустойчивой области возможно существование периодических по продольной координате решений. В случае положительных значений b^r и отрицательных α^i амплитуда возмущений неограниченно возрастает и становится бесконечной при

$$X^* = (-1/2\alpha^i) \ln\left(1 - \alpha^i / (|A_0|^2 b^r)\right)$$

независимо от величины начальной амплитуды.

Устойчивая область (положительные значения α^i). В случае отрицательных значений b^r возмущения затухают независимо от величины начальной амплитуды. В случае положительных значений b^r и $|A_0|^2 \leq \alpha^i/b^r$ амплитуда возмущений уменьшается с ростом X , а при $|A_0|^2 > \alpha^i/b^r$ она неограниченно возрастает и становится бесконечной при

$$X^* = (-1/2\alpha^i) \ln\left(1 - \alpha^i / (|A_0|^2 b^r)\right).$$

С формальной точки зрения в устойчивой области при $b^r > 0$ существует периодическое решение с амплитудой

$$|A|^2 = |A_0|^2 = \alpha^i/b^r.$$

Последний случай принято называть жестким возбуждением автоколебаний, что означает возбуждение периодических колебаний в устойчивой относительно малых возмущений области под влиянием возмущений конечной величины. Однако этот цикл неустойчив. Его неустойчивость очевидна. Возмущение амплитуды в сторону ее уменьшения ведет к ее уменьшению до нуля при $X \rightarrow \infty$, а изменение в сторону увеличения приводит к взрывному ее нарастанию.

Итак, при положительных значениях b^r как в устойчивой, так и в неустойчивой области возможен взрывной характер смены режима течения. При больших значениях

амплитуд необходим учет дополнительных членов в уравнении Ландау [3]:

$$\frac{d|A|^2}{dX} = -2\alpha^i |A|^2 + 2b^r |A|^4 + 2d^r |A|^6.$$

В этом случае при $d^r < 0$, при заданном числе Рейнольдса, возможны предельные колебательные течения с двумя разными амплитудами. Одно из них (с меньшей амплитудой) неустойчиво, второе устойчиво.

Все работы, относящиеся к данной теме, касаются исследования дозвуковых ограниченных (плоские каналы) и полуограниченных (пограничные слои на обтекаемых поверхностях) течений. В монографии [4] приводится полная сводка этих объектов. Но до сих пор нет сведений о том, как меняется характер автоколебаний в сверхзвуковых пограничных слоях сжимаемых газов, неустойчивость которых связана с трехмерными возмущениями. Этому есть несколько объяснений.

Во-первых, установившиеся вторичные периодические режимы дозвуковых течений являются режимами существенно двумерного типа, а, как известно, в сверхзвуковых пограничных слоях наиболее важны трехмерные колебания и, следовательно, трехмерные режимы. Во-вторых, в течениях сжимаемого газа наряду с квадратичной нелинейностью, присущей течениям несжимаемой жидкости, появляются кубические члены. Поэтому изучение характера порождения периодических течений вблизи нейтральной кривой в сжимаемых течениях полезно, так как оно может привести к новым результатам, необходимым для управления ламинарно-турбулентным переходом сверхзвуковых пограничных слоев.

В настоящей работе в рамках квадратичной нелинейности рассмотрено влияние возмущений большой интенсивности на коэффициенты Ландау. При этом рассчитаны области устойчивого или неустойчивого ответвления периодических решений (жесткого или мягкого возбуждения) плоских двумерных вихревых возмущений. Условием реализации этого типа взаимодействия является достаточно большое значение амплитуды волны. При этом рассмотрено только самовоздействие волны.

Для получения второго коэффициента Ландау полезны исследования [20; 21], в которых изучено комбинационное взаимодействие двух плоских волн. Они показали, что

механизм может быть применен для объяснения ряда особенностей эволюции возмущений большой амплитуды в пограничных слоях сжимаемого газа. Но авторы этих работ не ставили перед собой цель рассмотреть характер ветвления вблизи нейтральной кривой.

Методы решения и основные соотношения

Обозначим через ε масштаб пульсационного поля. Тогда построение амплитудного уравнения можно описать по следующей схеме. Самовоздействие волны порядка ε^2 приводит к генерации вторичных компонент – нулевых гармоник, вызывающих искажение среднего поля потока, и обертонов с удвоенной фазой. В третьем порядке по ε взаимодействие вторичных волн с исходными возмущениями определяет нелинейную эволюцию амплитуд первичных колебаний.

Рассмотрим все составляющие такого взаимодействия.

Исходные положения нелинейной модели для сжимаемых пограничных слоев подробно изложены в [2; 4; 18]. Следуя им, рассмотрим возмущенное поле скоростей u , v , плотности ρ_0 , давления p_0 и температуры T_0 сжимаемого газа

$$u = U(Y) + \varepsilon u', \quad v = \varepsilon v',$$

$$\rho = \rho_0(Y) + \varepsilon \rho', \quad p_0 = P + \varepsilon p', \quad (1)$$

$$T_0 = T(Y) + \varepsilon \Theta', \quad p'/P = \rho'/\rho_0 + \Theta'/T$$

в безразмерной системе координат $X = x/\delta$,

$$Y = y/\delta, \quad \delta = \sqrt{\mu_e x / (U_e \rho_{0e})},$$

где δ – толщина пограничного слоя; μ – динамическая вязкость; индекс e соответствует параметрам на внешней границе $y \gg \delta$; величины со штрихами и без штрихов – пульсационные и средние компоненты соответствующих величин; масштабный параметр $\varepsilon \ll 1$. Обезразмеривание проведено параметрами потока на внешней границе. Введем число Рейнольдса, полученное по этим параметрам:

$Re = \sqrt{x \rho_{0e} U_e / \mu_e}$. Следует отметить, что безразмерные значения продольной координаты X совпадают со значением Re . Стационарные невозмущенные профили U , ρ_0 , T находятся по методике [22], причем $T = 1/\rho_0$.

Решение строится методом разложения решения по степеням амплитуды A .

Введем исходные переменные, относительно которых будем искать решения, в виде вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= [u', u'_Y, v', p', \Theta', \Theta'_Y], \\ u'_Y &= du'/dY, \\ \Theta'_Y &= d\Theta'/dY. \end{aligned}$$

Подставляя (1) в полную систему уравнений движения для сжимаемого газа [22], в рамках квадратичной нелинейности получим

$$L\mathbf{Z} = \mathbf{F}(z^i z^j), \quad i, j = 1, \dots, 6, \quad (2)$$

где L – линейный дифференциальный оператор, \mathbf{F} – вектор нелинейных членов, индексами i, j помечены компоненты вектора \mathbf{F} . Если воспользоваться для линейной части приближением Дана – Линя – Алексева [23], то система (2) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial z^1}{\partial Y} - z^2 &= 0, \\ \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial z^2}{\partial Y} - \rho_0 \left(\frac{\partial z^1}{\partial \tau} + U \frac{\partial z^1}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} z^3 \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial z^4}{\partial X} = F^2, \\ \rho_0 \left(\frac{\partial z^3}{\partial \tau} + U \frac{\partial z^3}{\partial X} \right) + \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial z^4}{\partial Y} &= F^3, \\ \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + U \frac{\partial \rho}{\partial X} + \frac{d\rho_0}{dY} z^3 + \rho_0 \left(\frac{\partial z^1}{\partial X} + \frac{\partial z^3}{\partial Y} \right) &= F^4, \\ \frac{\partial z^5}{\partial Y} - z^6 &= 0, \\ \rho_0 \left(\frac{\partial z^5}{\partial \tau} + U \frac{\partial z^5}{\partial X} + \frac{dT_0}{dY} z^3 \right) - \\ &\quad - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\frac{\partial z^4}{\partial \tau} + U \frac{\partial z^4}{\partial X} \right) - \frac{\mu}{\text{PrRe}} \frac{\partial z^6}{\partial Y} = F^6, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0(z^4 / P - z^5 / T), \\ \frac{\partial \rho}{\partial X} &= \rho_0 \frac{\partial z^4}{\partial X} - \rho_0^2 \frac{\partial z^5}{\partial X}. \end{aligned}$$

Компоненты нелинейного вектора, содержащие только невязкие члены, имеют вид

$$\begin{aligned} F^2 &= \rho_0(z^1 z^1_X + z^3 z^2) + \rho(z^1 + Uz^1_X + Uz^3_Y), \\ F^3 &= \rho_0(z^1 z^3_X + z^3 z^3_Y) + \rho(z^3 + Uz^3_X), \\ F^4 &= \rho(z^1_X + z^3_Y) + \rho_X z^1 + \rho_Y z^3, \\ F^6 &= \rho(z^5 + Uz^5_X + T_Y z^3) + \rho_0(z^1 z^5_X + z^3 z^6) + \\ &\quad + 2\gamma(\gamma - 1)M^2 z^4(z^1_X + z^3_Y). \end{aligned}$$

Краевые условия для возмущений стандартные

$$z^1 = z^3 = z^5 = 0, \quad Y = 0, \quad Y = \infty. \quad (4)$$

Решение системы (3) ищется методом разложения по малому параметру A

$$\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{\infty} A^i(X) \mathbf{Z}_i. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3) и приравнявая сумму членов одного порядка по амплитуде A , в первом приближении получаем однородную систему уравнений, коэффициенты которой при параллельном течении не зависят от времени и координаты X . В условиях нейтральной устойчивости \mathbf{Z}_1 имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 &= A_1(X) \exp(i\theta) \tilde{\mathbf{Z}}_1(Y) + \\ &\quad + A_{-1}(X) \exp(-i\theta) \tilde{\mathbf{Z}}_{-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\theta = \alpha X - \omega t$, индексом (-1) помечены комплексно сопряженные величины.

Полученная при этом система обыкновенных дифференциальных уравнений Дана – Линя – Алексева [23] с граничными условиями (4) является основой для нахождения собственных значений α при заданных значениях частоты ω и числа Рейнольдса Re , а также для построения амплитудных функций линейных волн вида (6) с неопределенной амплитудой A . При этом выбрана нормировка $|\tilde{z}^3|_{\max} = 1$.

Во втором порядке по A система неоднородных дифференциальных уравнений (3) используется для построения вторичных гармоник. Исследуем характеристики вторичных волн.

При самовоздействии исходных волн вида (6) в нелинейных членах F^k появляются слагаемые вида

$$\begin{aligned} &A_1 A_{-1} \tilde{z}^i \tilde{z}^j, \\ &A_1 A_1 \tilde{z}^i \tilde{z}^j \exp(2i\theta), \\ &A_{-1} A_{-1} \tilde{z}^i \tilde{z}^j \exp(-2i\theta). \end{aligned}$$

Первые из них учитывают порождение гармоник с нулевыми фазами. Назовем их вторичными нулевыми гармониками, а соответствующие им решения – $\mathbf{Z}_{2,0}$. Заведомо стационарные вторичные нулевые гармоники, налагаясь на средние характеристики пограничных слоев U и T , вносят вклад в них искажение.

Из-за силового поля, создаваемого вторыми слагаемыми в F^k , генерируются гармоники с удвоенными фазами 2θ . Назовем их обертонами и обозначим соответствующие им решения через $\mathbf{Z}_{2,2}$, а сопряженные – через $\mathbf{Z}_{2,-2}$. Таким образом, в режиме самовоздействия первичная волна порядка $O(A)$ порождает две вторичные компоненты.

Естественно предположить, что и собственные функции вторичных волн удовлетворяют краевым условиям (4).

Если не учитывать зависимость амплитуды A от продольной координаты в третьем порядке (уравнение на \mathbf{Z}_3) появляются резонансные члены в результате перемножения компонентов векторов $\mathbf{Z}_{2,0}$ и членов типа $A_1 \tilde{z}_1^i \exp(i\theta)$, также в результате перемножения членов второго приближения $A_1 A_1 \tilde{z}_1^i \tilde{z}_1^j \exp(2i\theta)$, $A_{-1} A_{-1} \tilde{z}_{-1}^i \tilde{z}_{-1}^j \exp(-2i\theta)$ и членов первого порядка $A_{-1} \tilde{z}_{-1}^k(Y) \exp(-i\theta)$, $A_1 \tilde{z}_1^k(Y) \exp(i\theta)$ соответственно. Если же принять во внимание зависимость амплитуды A_1 от X , тогда в левой части системы наряду с членами классической теории появляются члены пропорциональные dA_1/dX . При переносе их в правую часть левый оператор становится вырожденным, и dA_1/dX определится из условия разрешимости системы уравнений с правой частью.

В условиях нейтральной устойчивости

$$\frac{dA_1}{dX} = \frac{W}{Q} |A_1|^2 A_1 \equiv b |A_1|^2 A_1, \quad (7)$$

$$W = \int_0^\infty (\mathbf{E}_+ \cdot \mathbf{Z}^+ dY),$$

где компоненты вектора \mathbf{E} , включают члены $\tilde{z}_1^i(Y) \tilde{z}_{20}^j(Y)$, $\tilde{z}_{-1}^i(Y) \tilde{z}_{22}^j(Y)$, $\tilde{z}_1^i(Y) \tilde{z}_{2,-2}^j(Y)$, \mathbf{Z}^+ – решение сопряженных к уравнениям Дана – Линя – Алексева.

$$Q = \int_0^\infty \left(\left\| \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right\| \tilde{\mathbf{Z}}_1 \cdot \mathbf{Z}^+ \right) dY,$$

где матрица $\left\| \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right\|$ имеет вид

$$\left\| \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right\| = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ -\rho_0 U, & 0, & -\rho_0 U_\gamma, & -1/\gamma M^2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \rho_0 U, & 0, & 0, & 0 \\ \rho_0, & 0, & 0, & \rho_0 U, & \rho_0^2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -\frac{\gamma-1}{\gamma} U, & \rho_0 U, & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично (7) для комплексно-сопряженной амплитуды $A_{-1} = A_1^*$

$$\frac{dA_1^*}{dX} = \frac{W^*}{Q^*} |A_1|^2 A_1^* \equiv b^* |A_1|^2 A_1^*. \quad (8)$$

Умножая (7) на A_1^* , а (8) на A_1 и складывая их левые и правые части соответственно, получим уравнение Ландау в точках нейтральной кривой:

$$\frac{d|A_1|^2}{dX} = 2 \text{Real}(b) |A_1|^4 \equiv 2b^r |A_1|^4. \quad (9)$$

Как отмечалось выше, если $b^r < 0$, имеет место мягкое возбуждение, периодические устойчивые колебания ответвляются в неустойчивую область. При $b^r > 0$ имеет место жесткое возбуждение, существуют периодические неустойчивые решения в устойчивой относительно малых колебаний области.

Результаты и обсуждение

Рассматривались двумерные возмущения при числе Маха $M = 2$ в широком диапазоне чисел Рейнольдса $\text{Re}_c < \text{Re} < 700$, Re_c – критическое число Рейнольдса, на частотах с безразмерными частотными параметрами $0,1855 \cdot 10^{-4} < F < 2,47 \cdot 10^{-4}$. Исходные данные соответствовали экспериментам [14], в опытах температура торможения была постоянной и составляла 310 К, $\gamma = 1,4$, $\sigma = 0,72$.

Нейтральная кривая для бесконечно малых двумерных возмущений (линейное приближение), показана на рис. 1. Найдено, что критическое число Рейнольдса $\text{Re}_c = 204,4$.

Среди вторичных гармоник наибольший интерес представляют нулевые, определяющие деформацию эпюр осредненной продольной скорости U и средней температуры T . Чтобы понять их положение относи-

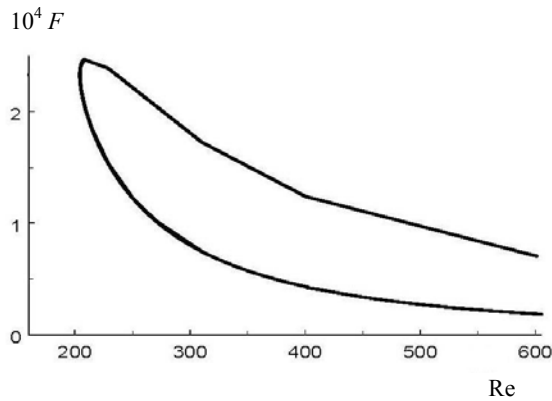


Рис. 1. Нейтральная кривая двумерных бесконечно малых возмущений при $M = 2$

тельно осредненных параметров, приведем поперечные распределения величин U и T в пограничном слое исходного невозмущенного течения. На рис. 2, *a* показаны их значения для теплоизолированной стенки при $M = 2$ (кривые 1, 2). Деформация средних значений записывается как $\Delta U = |A_1|^2 u_{1,-1}$ и $\Delta T = |A_1|^2 \Theta_{1,-1}$, она определяется квадратами амплитуд исходных волн. Таким образом, вид вторичных нулевых гармоник дает нам направление деформации средних значений в области высоких амплитуд возмущений. На рис. 2, *b, в* показаны эти вторичные гармоники в четырех точках нейтральной кривой. Рассмотрение разных чисел Рейнольдса, а также положений верхней и нижней ветвей нейтральной кривой сделано специально, так как эти деформации напрямую определяют значение и знак нелинейных коэффициентов в амплитудных уравнениях (9). Учет нелинейности обуславливает большую заполненность профиля U в пристенной области и появление дефекта скорости вблизи внешней границы, что приводит к увеличению толщины пограничного слоя. Этот результат хорошо согласуется с экспериментальными данными, а по виду совпадает с тенденцией, присущей турбулентным распределениям. Обращает на себя внимание тот факт, что самые большие искажения средних скоростей имеют место на нижней ветви нейтральной кривой, а в области критического Рейнольдса и на верхней ветви деформации одного порядка. Характерно также, что хотя диапазон и значения положительных $u_{1,-1}$ меньше диапазона и значений отрицательных, следует

учитывать, что при своих Y в пристенных областях они действуют на значительно меньшие средние значения U , а следовательно, создают бóльшие относительные искажения исходных величин.

Также становится ясно, что в пристенной области происходит уменьшение средних температур, а это, как показано многими, стабилизирует вихревые волны. Необходимо напомнить, что для теплоизолированной пластины при $M = 2$ на стенке безразмерное $T_w(0) = 1,687$. Интересно, что деформации скорости и температуры в разных точках нейтральной кривой не следуют друг другу по величинам.

Для полноты картины приведем вещественные и мнимые члены амплитудных функций обертонов $u_{1,1}$ и $\Theta_{1,1}$ для числа Рейнольдса с нижней ветви $Re = 400,3$. Они показаны на рис. 3. Видно, что максимумы этих вторичных гармоник сосредоточены в пристенной области при малых Y .

Влияние нелинейных процессов на амплитуды первичных волн можно проанализировать, рассматривая нелинейные коэффициенты. Из (9) следует, что, поскольку на нейтральной кривой $\alpha^i = 0$, то, не решая уравнения, можно определить направление движения этих нейтральных точек по вещественным значениям коэффициентов $b^r = \text{Real}(b)$. Назовем коэффициент от взаимодействия первичной волны и нулевых гармоник b_1^r , а коэффициент от взаимодействия первичной волны и обертона b_2^r . Последовательно рассмотрим эти коэффициенты для разных частот и чисел Рейнольдса. Такое представление сделано в двух видах: на рис. 4, *a* – для частотных параметров, а на рис. 4, *b* – для чисел Рейнольдса.

Оказалось, что рассмотренные вторичные нулевые гармоники действуют на первичные волны стабилизирующе (все нелинейные b_1^r отрицательны), а вот обертоны, напротив, дестабилизируют первичные волны (все b_2^r положительны). Это ясно видно на рисунках и относительно частот, и относительно Re . Результирующий знак у суммарных коэффициентов $b^r = b_1^r + b_2^r$ дает нам движение или ответвление режимов на нейтральной кривой. Оказалось, что на верхней ветви ветвление осуществляется

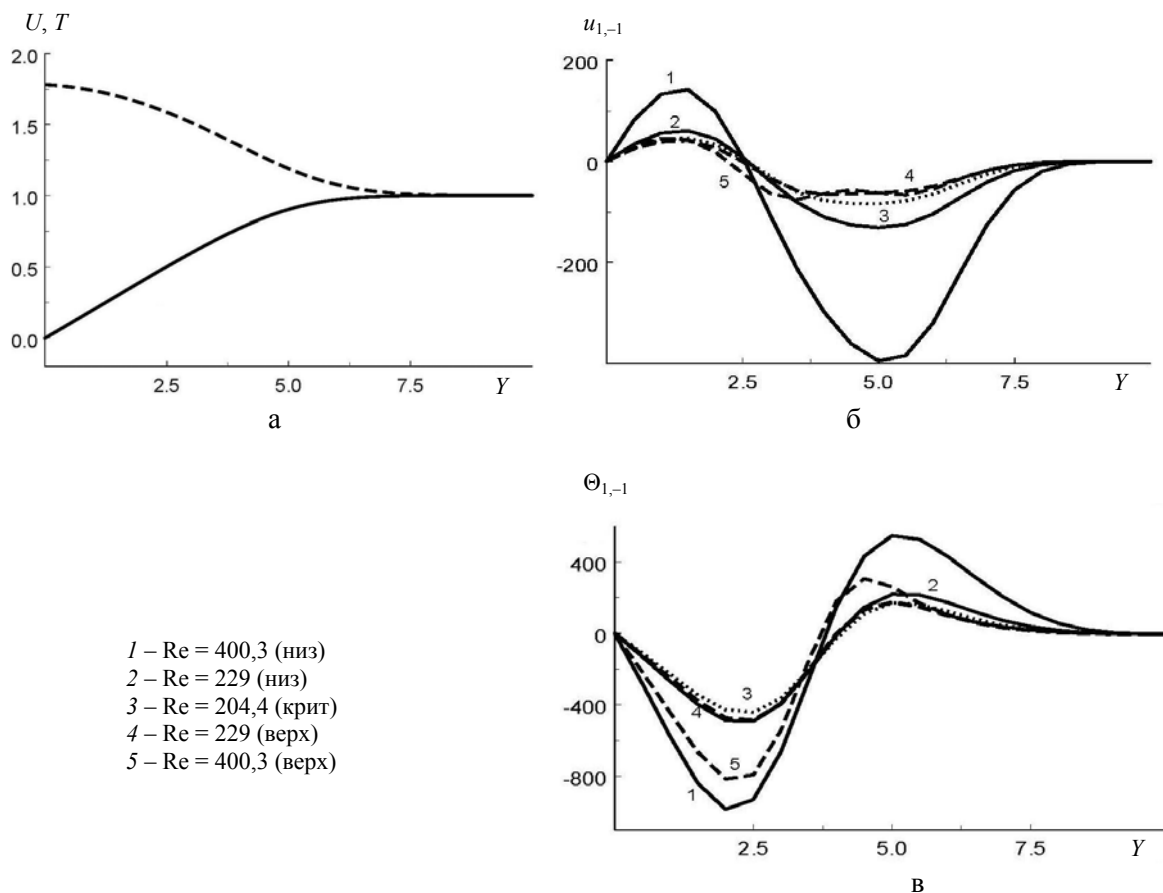


Рис. 2. Поперечные распределения средних значений скорости U и температуры T (а). Вторичные нулевые гармоники для пяти точек нейтральной кривой: б – $u_{1,-1}$; в – $\Theta_{1,-1}$

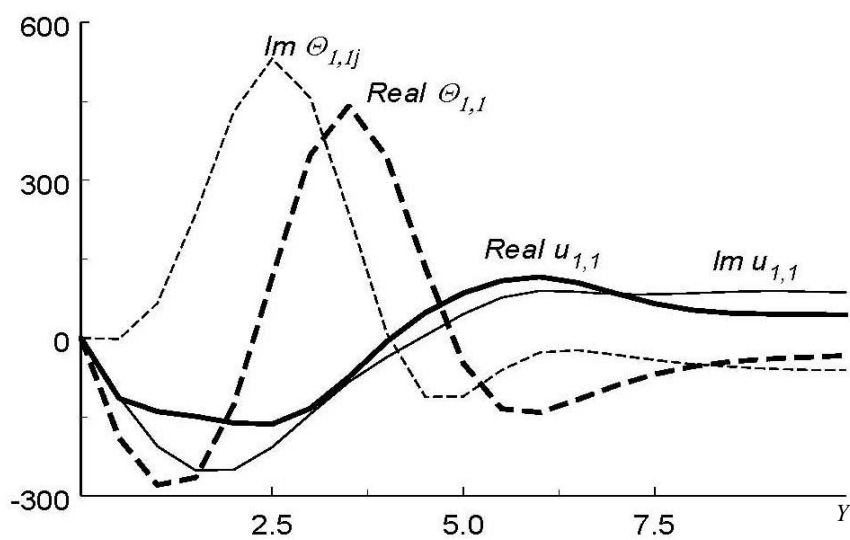


Рис. 3. Вещественные и мнимые части обертонов $u_{1,1}$ и $\Theta_{1,1}$ для $M = 2$ с нижней ветви нейтральной кривой $Re = 400,3$

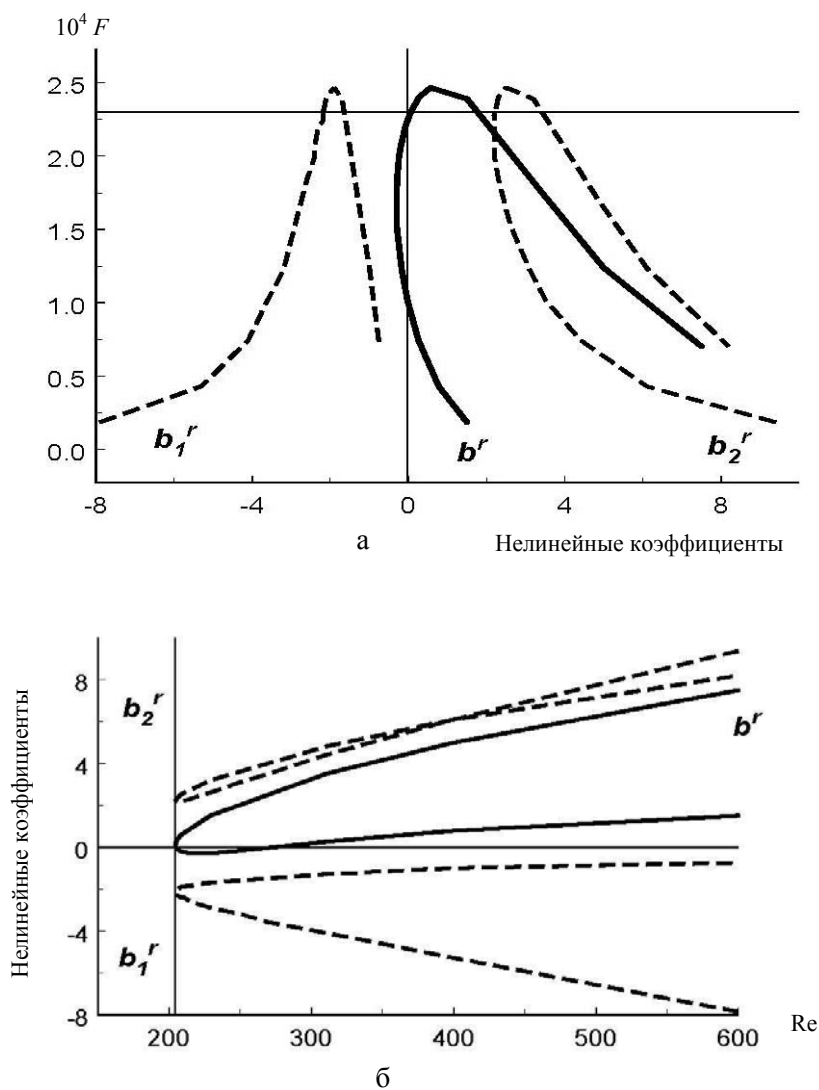


Рис. 4. Нелинейные коэффициенты для двумерных волн на нейтральной кривой в зависимости от частотного параметра (a) и от числа Рейнольдса (b)

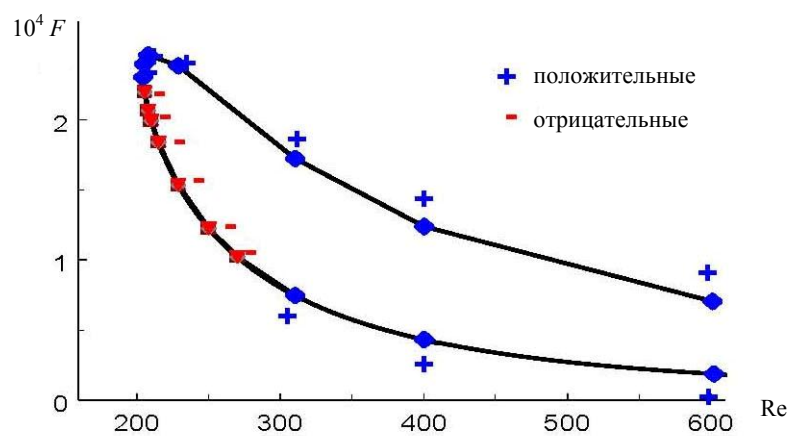


Рис. 5. Суммарные знаки нелинейных коэффициентов на нейтральной кривой

в докритическую область и движение нейтральной кривой происходит в область затухающих колебаний, что расширяет область растущих волн в сравнении с нейтральной кривой бесконечно малых колебаний.

Также найдены положительными суммарные коэффициенты на носике нейтральной кривой. Смена знака ветвления происходит чуть ниже критического числа Рейнольдса, при $Re_c = 204,6$. В самом критическом числе суммарный коэффициент b^r очень мал ($b^r = 0,066$), но это значение говорит о том, что критическое число Рейнольдса сдвигается в область меньших значений, в докритическую область, а значит, осуществляется жесткое возбуждение. Учитывая малость суммарного b^r и возможные погрешности при счете, правильнее будет полагать, что Re_c остается неизменным как для бесконечно малых, так и для конечных возмущений.

В области нижней ветви в диапазоне $204,6 < Re < 270$ суммарные коэффициенты (9) отрицательны, минимальное значение ($b^r = -0,3$) достигается при $Re = 300$. Это значит, что автоколебания существуют при числах Рейнольдса, превосходящих нейтральные значения, т. е. осуществляется закритический режим возбуждения. Далее опять происходит смена ветвления, в исследуемом диапазоне $270 < Re < 602$ суммарные коэффициенты b^r опять становятся положительными, а это означает переход к докритическому режиму, как на верхней ветви нейтральной кривой. На рис. 5 показаны знаки этих суммарных коэффициентов на нейтральной кривой, а на рис. 6 изображено положение нейтральной кривой, соответствующей этим b^r .

Сравним области вторичных автоколебательных режимов в сжимаемом газе (представленные данные) и в несжимаемой жидкости по [4], в которой изучается ветвление автоколебаний для семейства Фокнера – Скэн по методике Юдовича [16]. Для плоской пластины (безградиентное обтекание) получено ветвление в докритическую область устойчивости исходного течения, проявляющегося жесткий характер возбуждения. Подобный же характер возбуждения и в сжимаемом газе на верхней ветви. В [4] обнаружено, что ветвление происходит несколько выше критической точки, следовательно, возбуждение мягкое, Re_c сдвигается

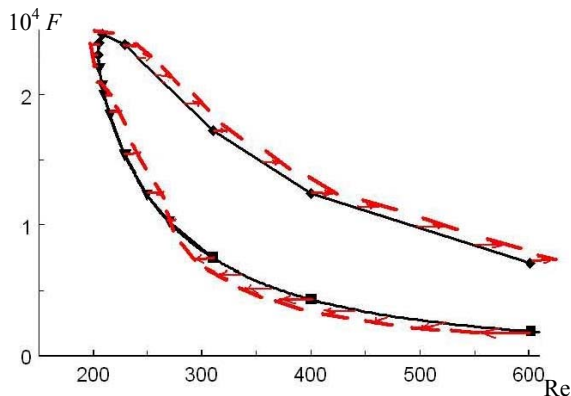


Рис. 6. Характер ветвления автоколебательных режимов на нейтральной кривой в соответствии со знаками нелинейных коэффициентов

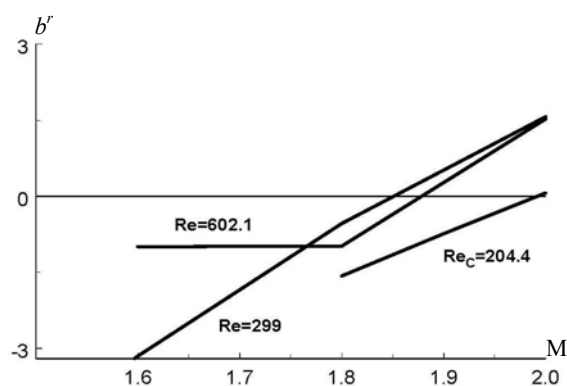


Рис. 7. Изменение характера ветвления при уменьшении числа Маха обтекания

в область больших значений. В данной работе (как подробно объяснено выше) вблизи Re_c обнаруживается жесткий характер возбуждения. Это первое отличие.

Ниже Re_c происходит сдвиг в область растущих колебаний в обоих сравниваемых течениях. Второе отличие заключается в том, что подобный сдвиг в несжимаемой жидкости осуществляется во всем диапазоне Re на нижней ветви, а в сжимаемом газе – только в некоторой области, ниже которой снова происходит ветвление и устанавливается докритический жесткий характер возбуждения.

Для определения природы этих отличий, проведен расчет нелинейных коэффициентов для нейтральных точек при меньших числах Маха. Результаты представлены на рис. 7 для двух Re с нижней ветви и для критического Re_c . Оказалось, что при уменьшении M происходит замена характера ветвления и он становится точно таким, как в несжимаемой жидкости. На нижней ветви

нейтральной кривой это происходит в районе $M = 1,85$, а для критической точки чуть ниже $M = 2$. Таким образом, можно считать установленным, что отличия в характере ветвления связаны с наличием эффектов сжимаемости при сверхзвуковой скорости.

Выводы

В рамках модели второго порядка по нелинейности (или третьего порядка по амплитуде возмущений) определен характер ветвления автоколебательных режимов при сверхзвуковых скоростях ($M = 2$) при исследовании нелинейных коэффициентов (коэффициентов Ландау). Рассмотренные двумерные вихревые возмущения обнаруживают жесткий характер возбуждения на верхней ветви нейтральной кривой и при больших числах Рейнольдса на нижней ветви. В области критического числа Рейнольдса на нижней ветви нейтральной кривой наблюдается смена жесткого режима возбуждения на мягкий. Установлено, что разница в характере ветвления решения вблизи нейтральных кривых на до- и сверхзвуковых скоростях определяется наличием сжимаемости в последнем случае.

Список литературы

1. Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности // Докл. АН СССР. 1944. Т. 44, С. 339–342.
2. Гапонов С. А., Левченко В. Я. Современные проблемы перехода пограничного слоя // Успехи механики. 1981. № 4. С. 47–90.
3. Струминский В. В. Аэродинамика и молекулярная газовая динамика. М.: Наука, 1985. 240 с.
4. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1989, 366 с.
5. Петров Г. В. Гармоники волн Толлмина – Шлихтинга в сжимаемом пограничном слое // Теплофизика и аэромеханика. 2008. Т. 15, № 4. С. 599–602.
6. Маслов А. А., Поплавская Т. В., Цырюльников И. С. Нелинейные волновые процессы в гиперзвуковом ударном слое // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2010. № 4. С. 43–50.
7. Кудрявцев А. Н., Хотяновский Д. В. Прямое численное моделирование перехода к турбулентности в сверхзвуковом пограничном слое // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22, № 5. С. 567–580.
8. Mayer C. S. J., Wernz S., Fasel H. F. Numerical investigation of the nonlinear transition regime in a Mach 2 boundary layer // J. Fluid Mech. 2011. Vol. 668. P. 113–149.
9. Zhong L. X., Wang X. Direct Numerical Simulation on the Receptivity, Instability, and Transition of Hypersonic Boundary // Annu. Rev. Fluid Mech. 2012. Vol. 44. P. 527–561.
10. Craik A. D. D. Non-linear resonant instability in boundary layers // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 50. P. 393–413.
11. Zelman M. B., Maslennikova I. I. Tollmien – Schlichting wave resonant mechanism for subharmonic type transition // J. Fluid Mech. 1993. Vol. 252. P. 449–478.
12. Tumin A. Three-wave non-linear interaction in a three-dimensional compressible boundary layer // Int. J. Non-Linear Mech. 1995. Vol. 30. No. 5. P. 617–770.
13. Гапонов С. А., Масленникова И. И. Субгармоническая неустойчивость сверхзвукового пограничного слоя // Теплофизика и аэромеханика. 1997. Т. 4, № 1. С. 3–12.
14. Ермолаев Ю. Г., Косинов А. Д., Семенов Н. В. Характерные особенности слабонелинейного взаимодействия волн неустойчивости в сверхзвуковом пограничном слое // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Физика. 2008. Т. 3, вып. 3. С. 3–13.
15. Гапонов С. А., Терехова Н. М. Трехволновые взаимодействия возмущений в гиперзвуковом пограничном слое на непроницаемой и пористой поверхностях // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 3. С. 36–46.
16. Юдович В. И. Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1965. Т. 161, № 5. С. 1037–1040.
17. Андрейчиков И. П., Юдович В. И. Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202, № 4. С. 791–794.
18. Володин А. Г., Зельман М. Б. Парные нелинейные взаимодействия волн Толлмина – Шлихтинга в течениях типа пограничного слоя // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 5. С. 78–84.
19. Терехова Н. М. Комбинационное взаимодействие неустойчивых возмущений в сверхзвуковой струе // Изв. СО РАН. Сер. техн. наук. 1993. № 5. С. 82–93.

20. Терехова Н. М. Комбинационное взаимодействие возмущений в сверхзвуковом пограничном слое // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 41–48.

21. Гапонов С. А., Терехова Н. М. Эволюция возмущений повышенной интенсивности в сверхзвуковом пограничном слое // Аэромеханика и газовая динамика. 2003. № 1. С. 28–38.

22. Гапонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980. 144 с.

23. Алексеев М. А. Об асимптотических приближениях в задаче устойчивости ламинарного пограничного слоя при сверхзвуковых скоростях // Тр. ЦАГИ. 1972. Вып. 1420. 27 с.

Материал поступил в редколлегию 14.07.2016

S. A. Gaponov, N. M. Terekhova

*Institute of Theoretical and Applied Mechanics, SB RAS
4/1 Institutskaya Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation*

gaponov@itam.nsc.ru, terekh@itam.nsc.ru

THE OSCILLATIONS, BRANCHES FROM THE NEUTRAL CURVE IN A SUPERSONIC BOUNDARY LAYER AT $M = 2$

In the framework of the weakly nonlinear stability theory investigates soft and hard product of the periodic fluctuations in a supersonic boundary layer at Mach number $M = 2$. The model includes the effects of blooming (the product of the stationary secondary harmonics and the generation of perturbations of the double frequency). It is shown that in the framework of this model on the lower branch of the neutral curve appear region subcritical growth. This effect directly connected with the influence of compressibility.

Keywords: boundary layers, compressible flow, hydrodynamic stability, weakly nonlinear theory.