УДК 532.517

Э. А. Аринштейн, **Д. К. Токарев**

Тюменский государственный университет
ул. Перекопская, 15а, Тюмень, 625000, Россия

earin@inbox.ru, *tokarevDK@tngg.ru*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Рассмотрены некоторые свойства течения однородной вязкой жидкости в трубе переменного сечения, характеризующейся цилиндрической симметрией. Предложен аналитический подход к определению скорости потока в экстремальных сечениях. Выявлены условия возникновения застойной зоны в окрестностях максимального сечения. Рассмотрен частный случай решения задачи для семейств линий тока, допускающей простое представление.

Ключевые слова: уравнение Навье – Стокса, семейство линий тока, параметр линии тока, экстремальное сечение.

Задача о течении несжимаемой жидкости по трубам с периодически меняющимся радиусом вдоль оси рассматривалась в основном в зарубежной литературе. В большинстве случаев для получения профиля скорости и темпа падения давления в трубе переменного сечения авторы предполагали, что течение жидкости происходит в канале с медленно изменяющимся радиусом кривизны [1–4], либо представляли уравнения течения в конечно-разностной форме и реализовывали численные расчет [5–8]. Следует отметить, что в рамках работы по описанию течения жидкости в канале переменного сечения J. A. Deiber и W. R. Schowalter [9] осуществили эксперимент с использованием глицерина в качестве фильтрующейся жидкости.

В рамках данной работы предложен аналитический подход к описанию некоторых свойств течения несжимаемой жидкости в трубе с периодически меняющимся радиусом вдоль оси трубы.

Постановка задачи

Рассмотрим модель течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе переменного сечения. Для упрощения предполагаем, что модель характеризуется следующими свойствами:

1) цилиндрическая симметрия вдоль оси трубы;

2) профиль стенки трубы можно описать гладкой функцией с чередующимися максимумами и минимумами;

3) течение жидкости является ламинарным и стационарным;

4) в минимальном и максимальном сечениях скорость принимает экстремальные значения, и, как следствие, ускорение обращается в ноль.

В качестве граничного условия, принято условие прилипания жидкости на стенки трубы радиуса:

$$V\left(R_{+-}\right)=0. \qquad (1)$$

Исходные уравнения в переменных r и z (в силу симметрии поставленной задачи физические величины не зависят от угловой координаты) при условии стационарности потока имеют вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rV_r\right)}{\partial r}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0 -$$

уравнение непрерывности.

Аринштейн Э. А., *Токарев Д. К.* Математическая модель течения жидкости в трубе переменного сечения // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Физика. 2016. Т. 11, № 4. С. 61–67.

Система уравнений Навье – Стокса [10]

$$V_r\frac{\partial V_z}{\partial r}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}= =-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right), \quad (2)$$

$$V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}= =-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}-\frac{V_r}{r^2}\right). \quad (3)$$

Экстремальные сечения (сечение, характеризующееся максимальным или минимальным радиусом трубы) обладают существенными особенностями:

$$\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)_{\text{extr}}=0;\left(V_r\right)_{\text{extr}}=0.$$

Благодаря этому нелинейные члены в экстремальных сечениях обращаются в ноль. Рассмотрим участок в окрестности некоторого экстремального сечения, в котором положим $z=0$. Примем, что в окрестности сечения с достаточной точностью V_z является четной функцией от z $\left(V_z(-z)=V_z(z)\right)$, а функция V_r является нечетной функцией от z $\left(V_r(-z)=-V_r(z)\right)$.

Запишем уравнение (2) и (3) в окрестностях экстремальных сечений:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}=\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right), \quad (4)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}=\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}-\frac{V_r}{r^2}\right). \quad (5)$$

Уравнение (5) выполняется тождественно.

Продифференцируем выражение (4) по r, выражение (5) по z:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial r}&=\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial V_z}{\partial r},\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 P}{\partial r\partial z}&=\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial V_r}{\partial z}.\end{aligned} \quad (6)$$

С учетом того, что

$$\operatorname{rot}V=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial V_z}{\partial \varphi}-\frac{\partial rV_\varphi}{\partial z}\right)e_r+ +\left(\frac{\partial V_r}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)e_\varphi+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial rV_\varphi}{\partial r}-\frac{\partial V_r}{\partial \varphi}\right)e_z,$$

получим следующее соотношение, характеризующее поток жидкости в экстремальном сечении:

$$\Delta\operatorname{rot}_\varphi V\Big|_{z=0}=0.$$

Для решение задачи необходимо определить зависимость $\frac{\partial P}{\partial z}$ от r. Представим уравнение (6) в виде

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 P}{\partial r\partial z}= =\nu\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial V_r}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)=\nu\frac{\partial^2}{\partial z^2}\operatorname{rot}_\varphi V.$$

Тогда в экстремальном сечении

$$\frac{\partial P(z,r)}{\partial z}= =\frac{\partial P(z)}{\partial z}+\rho\nu\int_0^r\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\operatorname{rot}_\varphi V(r)\right)dr'.$$

Выражение $\rho\nu\int_0^r\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\operatorname{rot}_\varphi V(r)\right)dr'$ содержит члены третьего порядка по z и пропорционален вязкости ν. В модели маловязкой жидкости его можно рассматривать как малую поправку и учесть методом последовательных приближений. В первом приближении $\frac{\partial P}{\partial z}$ в экстремальном сечении от радиуса не зависит.

Поток жидкости в экстремальном сечении

Рассмотрим свойства семейства линий тока в приближении, при котором линии тока подобны контуру трубы и образуют поверхности с цилиндрической симметрией:

$$r_l=kR(z),$$

где $0<k<1$ – параметр линии тока; $R(z)$ – функция, описывающая контур трубы.

В окрестностях экстремальных сечений параметр линии тока можно определить следующим образом:

$$k=\left(\frac{r}{R}\right)=k_\pm f(r,z),$$

где R – радиус трубы; $r=r_l(z)$ на линии тока; $k_\pm=\left(\frac{r}{R}\right)_\pm$ – параметр линии тока в различных экстремальных сечениях; $f(r,z)$ – функция, характеризующая расширения или сжатия линий тока. В окрестностях экстремальных сечений $f(r,z)\approx 1$.

В общем случае $k_- \neq k_+$.

Гладкая функция $R(z)$ аппроксимируется первыми двумя членами разложения в ряд

$$R(z) \approx R_\pm \left(1 \mp \frac{z^2}{R^2}\chi_\pm^2\right),$$

где $\chi^2 = R\left|\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right| = \frac{R}{r_{\text{curve}}}$ – относительная кривизна.

При решении задачи для заданного экстремального сечения начало системы координат помещено на оси трубы в этом сечении.

Закон сохранения массы в окрестностях экстремального сечения представим в виде

$$\begin{aligned} &2\pi V_z r\Delta r = 2\pi V_z rR(z)\Delta k = \text{const}, \\ &V_z rR(z) = \text{const}. \end{aligned} \tag{7}$$

Отсюда следуют соотношения, определяющие старшие производные вдоль линий тока:

$$r\left\{\frac{\partial V_z}{\partial z}R(z) + V_z\frac{\partial R}{\partial z}\right\} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}R(z) + 2\frac{\partial V_z}{\partial z}\frac{\partial R}{\partial z} + V_z\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = 0.$$

Тогда уравнение Навье – Стокса (1) в экстремальном сечении примет вид неоднородного уравнения Бесселя:

$$\frac{d^2 V_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV_z}{dr} \pm V_z\left(\frac{\chi}{R}\right)^2 = \frac{1}{\nu\rho}\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{8}$$

Поток жидкости в минимальном сечении

Так как для минимального сечения (далее обозначается индексом «–») $\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} > 0$, решение неоднородного уравнения Бесселя (8) с учетом граничного условия (1) будет иметь вид

$$V_z^- = \frac{1}{\nu\rho}\left(\frac{R}{\chi}\right)_-^2\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)_-\left(1 - \frac{I_0\left(\frac{r}{R_-}\chi\right)}{I_0(\chi)}\right), \tag{9}$$

где $I_0(\chi)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Определим расход жидкости в трубе через минимальное сечение:

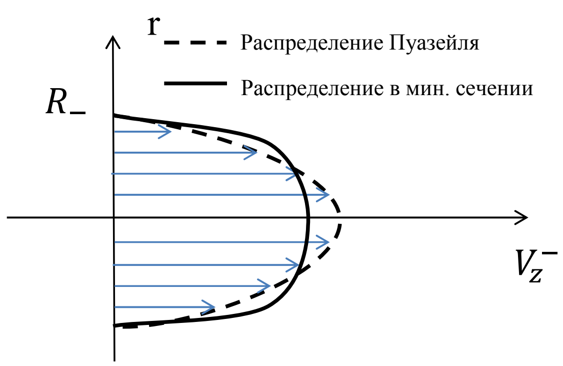
$$Q = \frac{\pi R_-^4}{\nu\chi_-^2}\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)_-\left(\frac{\frac{\chi_-}{2}I_0(\chi_-) - I_1(\chi_-)}{\frac{\chi_-}{2}I_0(\chi_-)}\right). \tag{10}$$

Важность определения расхода жидкости следует из того, что он одинаков в любом сечении. Это позволяет связать свойства потока в различных сечениях.

Учитывая (9) и (10), выразим распределение скорости в минимальном сечении через расход жидкости:

$$V_z^- = \frac{Q\chi_-}{2\pi\rho R_-^2}\left(\frac{I_0(\chi_-) - I_0\left(\frac{r}{R_-}\chi_-\right)}{\frac{\chi_-}{2}I_0(\chi_-) - I_1(\chi_-)}\right). \tag{11}$$

Модифицированная функция Бесселя $I_0\left(\frac{r}{R_-}\chi\right)$ всегда положительна и растет экспоненциально при росте аргумента, поэтому распределение скорости в минимальном сечении будет иметь вид, схематически представленный на рис. 1.



Обозначения, принятые в рис. 1–4

R_- – минимальный радиус сечения трубы

R_+ – максимальный радиус сечения трубы

R_f – радиус застойной зоны

r – радиус трубы

V_z^- – скорость потока в минимальном сечении трубы

V_z^+ – скорость потока в максимальном сечении трубы

Рис. 1. Распределение скорости в сечении с минимальным диаметром

В случае малой кривизны выражения (10) и (11) примут вид

$$Q=\pi\frac{R_-^4}{8\nu}\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)_-\left(\frac{1+\frac{1}{12}\chi_-^2+\ldots}{1+\frac{\chi_-^2}{4}+\ldots}\right),$$

$$V_z^-=\frac{2Q}{\pi\rho R_-^2}\left(1-\left(\frac{r}{R_-}\right)^2\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1+\left(\frac{\chi_-}{12}\right)^2\left(1+\left(\frac{r}{R_-}\right)^2+\ldots\right)}{1+\frac{1}{12}\chi_-^4+\ldots}\right).$$

Выражения (10) и (11) являются решением задачи Пуазейля с учетом поправок на кривизну стенок.

Поток жидкости в максимальном сечении

В сечении с максимальным радиусом (далее обозначается индексом «+») $\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}<0$, и решение неоднородного уравнения Бесселя (3.2) будет иметь вид

$$V_z^+=\frac{1}{\nu\rho}\left(\frac{R}{\chi}\right)_+^2\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)_+\left(\frac{J_0\left(\frac{r}{R_+}\chi_+\right)}{J_0(\chi_+)}-1\right). \quad (12)$$

Ввиду того, что функция $J_0\left(\frac{r}{R_+}\chi_+\right)$ является знакопеременной, необходимо рассмотреть следующие случаи.

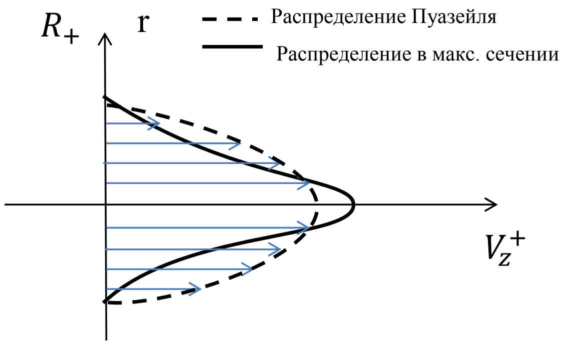


Рис. 2. Распределение скорости в сечении с максимальным диаметром при $\frac{r}{R_+}\chi_+<x_1$

1. $\chi_+<x_1$, где $x\approx 2{,}40$ – первый корень функции Бесселя $J_0(\chi_+)$.

В этом случае $J_0\left(\frac{r}{R_+}\chi_+\right)>0$ при всех $r<R_+$, и задача решается при тех же граничных условиях, что и для случая течения в минимальном сечении.

Расход жидкости определяется выражением

$$Q=\frac{\pi R_+^4}{\nu\chi_+^2}\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)_+\left(\frac{J_1(\chi_+)+\frac{\chi_+}{2}J_0(\chi_+)}{\frac{\chi_+}{2}J_0(\chi_+)}\right). \quad (13)$$

Связь скорости в максимальном сечении с расходом примет вид

$$V_z^+=\frac{Q\chi_+}{2\pi\rho R_+^2}\left(\frac{J_0\left(\frac{r}{R_+}\chi_+\right)+J_0(\chi_+)}{J_1(\chi_+)-\frac{\chi_+}{2}J_0(\chi_+)}\right). \quad (14)$$

Распределение скорости (12) примет вид, представленный на рис. 2.

В случае малой кривизны выражения (13) и (14) примут вид

$$Q=\frac{\pi R_+^4}{8\nu}\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)_+\left(\frac{1-\frac{1}{12}\chi_+^2+\ldots}{1-\frac{\chi_+^2}{4}+\ldots}\right), \quad (15)$$

$$V_z^+=\frac{2Q}{\pi\rho R_+^2}\left(1-\left(\frac{r}{R_+}\right)^2\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1-\left(\frac{\chi_+}{12}\right)^2\left(1+\left(\frac{r}{R_-}\right)^2+\ldots\right)}{1-\frac{1}{12}\chi_-^4+\ldots}\right). \quad (16)$$

Выражения (15) и (16) являются решением задачи Пуазейля с учетом поправок на кривизну стенок.

Связь градиента давления в максимальном и минимальном сечениях определяется соотношением

$$\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)_+=\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)_-\left(\frac{R_-}{R_+}\right)^4\left(\frac{\chi_+}{\chi_-}\right)^3\times$$
$$\times\left(\frac{J_0(\chi_+)}{I_0(\chi_-)}\right)\left(\frac{\frac{\chi_-}{2}I_0(\chi_-)-I_1(\chi_-)}{J_1(\chi_+)-\frac{\chi_+}{2}J_0(\chi_+)}\right). \quad (17)$$

2. При $\chi_+ \to x_1$ из выражения (17) следует, что $\left(-\dfrac{\partial P}{\partial z}\right)_+ \to 0$. В этом случае $\dfrac{\partial P}{\partial z}$ может быть сравним с поправкой

$$\rho\nu\int_0^r\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\operatorname{rot}_\varphi V(r)\right)dr'$$

в выражении (6). Тогда граничное условие прилипания на стенках трубы (1) становится бессмысленным, поэтому выводы о характере решения имеют только качественный характер. При этом вместо граничного условия (1) используется условие $\left(-\dfrac{\partial P}{\partial z}\right)_+ \approx 0$ и равенство потоков.

3. В случае, когда $\chi_+ > x_1$, скорость при $\dfrac{r}{R_+}\chi_+ > x_1$ меняет знак (рис. 3), и течение характеризуется возникновением застойной зоны, в которой жидкость циркулирует с малой скоростью (рис. 4). В этом случае необходимо рассматривать две области потока $r < R_f$ и $r > R_f$, где R_f – радиус застойной зоны. При переходе из одной области в другую скорость изменяется непрерывно, при этом на границе между областями $V_z^+ \neq 0$.

3.1. $r < R_f$. В рассматриваемой области остаются справедливы соотношения (12)–(14). При этом параметр, характеризующий линии тока, будет определяться следующим образом:

$$k_f = \frac{r}{R_f},$$

причем $k_f \sim k_-$.

Граница застойной зоны R_f может быть определена из следующих уравнений, описывающих условия постоянства потока по трубе, при условии отсутствия массопереноса в застойной области:

$$V_z^+ = C_1 J_0\left(\frac{r}{R_+}\chi_+\right) + \frac{1}{\nu\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{c_2}\left(\frac{R}{\chi}\right)_+^2.$$

$$Q = 2\pi\rho\int_0^{R_f} rV_z^+ dr = \text{const}.$$

$$Q_{\text{заст}} = 2\pi\rho\int_{R_f}^{R_+} rV_z^+ dr = 0.$$

3.2. $r > R_f$. Рассматриваемая область характеризуется как застойная зона, в которой

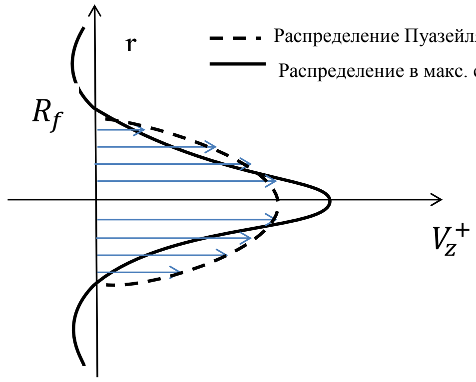


Рис. 3. Распределение скорости в сечении с максимальным диаметром $\chi_+ > x_1$

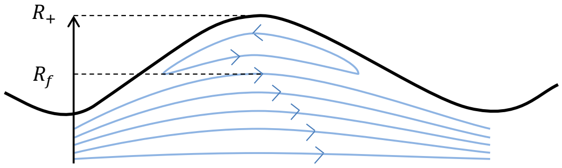


Рис. 4. Структура потока в канале с переменным сечением

жидкость циркулирует. При $r \to x_1, x_2 \ldots$ (где $x_1, x_2 \ldots$ – корни функции Бесселя) $\left(-\dfrac{\partial P}{\partial z}\right)_+ \to 0$, а константа при функции Бесселя стремится к малой величине, в связи с чем скорость V_z^+ в окрестностях границы трубы $(r \to R_+)$ не обращается в ноль, а характеризует поведение пограничного слоя жидкости. Параметр линии тока для данного случая определяется как $k_+ = \dfrac{r}{R_+}$, при этом какая либо связь с k_- отсутствует.

Простая модель потока при отсутствии застойной зоны

Поток рассматривается между двумя минимальными сечениями, радиус которых предполагается одинаковым. В простой модели все приближения ограничиваются членами второго порядка. Определим функцию, описывающую контур трубы $R(z)$, первыми членами разложения в ряд Фурье:

$$R(z) = a + b\sin\frac{z}{\lambda}.$$

Функцию $f(k,z)$, характеризующую неравномерность линий тока, примем равной единице.

Соответственно моделируем вид линий тока как $r = kR(z)$.

Закон сохранения массы примет вид

$$V_z\left(a + b\sin\frac{z}{\lambda}\right)^2 = \text{const}. \qquad (18)$$

Решение уравнения Навье – Стокса для поставленной задачи, будет иметь вид (11), (12).

Определение градиента давления для заданного участка трубы

Используя выражения (7) и (18), определим зависимость проекции скорости V_z через экстремальное значение скорости V_z^-

$$V_z = \frac{V_z^-\left(R^-\right)^2}{\left(a + b\sin\frac{z}{\lambda}\right)^2}. \qquad (19)$$

Учитывая (1) и (19), запишем уравнение Навье – Стокса (1) при $k = 0$ (ось трубы):

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} - $$

$$-\frac{\nu\left(R^-\right)^2\left(\left(V_z^-\right)' + r\left(V_z^-\right)''\right)}{r\left(a + b\sin\frac{z}{\lambda}\right)^2} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}. \qquad (20)$$

Проинтегрируем выражение (20) по длине трубы, учитывая, что интеграл от четных функций обращается в ноль. Вводя замену $\zeta = \mathrm{tg}\frac{z}{2\lambda}$, получим

$$\frac{1}{\rho}\int_{l_2}^{l_1}\frac{\partial P}{\partial z}dz =$$

$$= \frac{\nu\lambda\left(R^-\right)^2\left(\left(V_z^-\right)' + r\left(V_z^-\right)''\right)}{r} \times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial a}2\int_{l_2'}^{l_1'}\frac{1}{\left(a + a\zeta^2 + 2b\zeta\right)}d\zeta. \qquad (21)$$

Пределы интегрирования выберем таким образом, чтобы функция ζ была всюду непрерывна: $l_1' = \pi,$, $l_2' = -\pi$.

Вычисляя интеграл (21), получим связь среднего градиента давления для выделенного участка трубы с градиентом давления в экстремальном сечении с минимальным радиусом на оси трубы ($r = 0$):

$$\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)_- = \Delta P\frac{\rho\left(a^2 - b^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2\pi a\lambda\left(R_-\right)^2}I_0(\chi).$$

Аналогично (18) представим проекцию скорости V_z через экстремальное значение скорости V_z^+:

$$V_z = \frac{V_z^+\left(R^+\right)^2}{\left(a + b\sin\frac{z}{\lambda}\right)^2}.$$

Из уравнение Навье – Стокса (1) при $k = 0$ (ось трубы) определим связь среднего градиента давления для выделенного участка трубы с градиентом давления в экстремальном сечении с максимальным радиусом на оси трубы ($k = 0$):

$$\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)_+ = \Delta P\frac{\rho\left(a^2 - b^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2\pi a\lambda\left(R_+\right)^2}J_0(\chi).$$

Заключение

Результаты исследования позволяют получить количественные оценки некоторых очевидных свойств: в трубе переменного сечения различие в распределении скоростей наиболее существенно именно в сечениях с минимальным и максимальным радиусом. В минимальном сечении скорость вблизи поверхности трубы возрастает, в максимальном – уменьшается в плоть до нуля и образования застойной зоны при достаточно большом радиусе этого сечения. Модель дает количественную оценку «остаточной жидкости», не увлекаемой потоком, в застойных зонах и позволяет найти критерий образования застойной зоны. Модель дает приближенную оценку отношения скоростей в минимальном и в максимальном сечениях при фиксированном потоке:

$$V_-/V_+ =$$

$$= \frac{\chi_-}{\chi_+}\left(\frac{R_-}{R_+}\right)^2\left(\frac{I_0(\chi_-) - 1}{\frac{\chi_-}{2}I_0(\chi_-) - I_1(\chi_-)}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{I_1(\chi_+)-\frac{\chi_+}{2}I_0(\chi_+)}{1-J_0(\chi_+)}\right).$$

В отличие от канала постоянного сечения в трубе с переменным радиусом наблюдается изменение градиента давления вдоль оси трубы. Данная модель позволяет получить оценку отношения градиентов давления в экстремальных сечениях (формула (17)).

Список литературы

1. *Burns J. C. F.*, *Parkes T.* Peristaltic Motion // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 29. P. 731.
2. *Dodson A. G.*, *Townsend P.*, *Walters K.* On the Flow of Newtonian and Non-Newtonian Liquids through Corrugated Pipes // Rheol. Acta. 1971. Vol. 10. P. 508.
3. *Chow J. C. F.*, *Soda K.* Laminar Flow in Tubes with Constriction // Phys. Fluids. 1972. Vol. 15. P. 1700.
4. *Lauga E.*, *Stroock A. D.*, *Stone H. A.* Three-dimensional flows in slowly varying planar geometries // Physics of Fluids. 2004. Vol. 16. No. 8.
5. *Payatakes A. C.*, *Chi Tien*, *Turian R. M.* Numerical Solution of Steady State Incompressible Newtonian Flow through Periodically Constricted Tube // Physics of Fluids. 1973. Vol. 19. P. 67.
6. *Azzam M. I. S.*, *Dullien F. A. L.* Flow in Tubes with Periodic Step Changes in Diameter: A Numerical Solution // Chem. Eng. Sci. 1977. Vol. 32. P. 1445.
7. *Kitandis P. K.* Stokes Flow in a Slowly Varying Two-Dimensional Periodic Pore // Transport in Porous Media. 1997. Vol. 26. P. 89–98.
8. *Tambaca J.* Effective model of the fluid through elastic tube with variable radius. 2005.
9. *Deiber J. A.* Flow Through Tubes with Sinusoidal Axial Variations in Diameter // Aiche Journal. 1979.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. М.: Наука, 1986. Т. 6. 735 с.

Материал поступил в редколлегию 12.10.2016

E. A. Arinstein, **D. K. Tokarev**

Tyumen State University
15a Perekopskaya Str., Tyumen, 625000, Russian Federation

earin@inbox.ru, tokarevDK@tngg.ru

MATHEMATICAL MODEL OF LIQUID FLOW THROUGH THE PIPE OF CURCULAR CROSS-SECTION

This article analyses the properties of homogeneous viscous liquid flow in the pipe with variable cross-section characterized by cylindrical symmetry. The analytical approach is proposed in order to determine the flow velocity profile in the pipe's extremium cross-sections. The conditions when dead spaces emerge in neighborhood of the maximum cross-section are identified. The particular case of problem-solving allowing prime presentation is examined for the set of current line allowing prime presentation.

Keywords: Navier – Stokes equation, set of current lines, current lines' parameter, extremium cross-section.