

С. Н. Яковенко

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН
ул. Институтская, 4/1, Новосибирск, 630090, Россия*

yakovenk@itam.nsc.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ СКАЛЯРА В ОБЛАСТИ ОБРУШЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ТЕЧЕНИИ С ПРЕПЯТСТВИЕМ *

Путем осреднения полученных ранее данных прямого численного моделирования вычислены статистические моменты в квазистационарной области турбулентности, формирующейся после опрокидывания внутренних волн в течении с препятствием и устойчивой стратификацией. Исследована эволюция во времени и пространственное поведение бюджета уравнений переноса для турбулентных потоков скаляра. Выполнены априорные оценки аппроксимаций для корреляции «давление – сдвиг скаляра» и процессов турбулентной диффузии в этом уравнении. Проведенный анализ полезен для изучения турбулентной области в терминах статистических моментов и для проверки гипотез замыкания в моделях турбулентности. Показано, что порождение средним сдвигом и плавучестью, а также корреляции с пульсациями давления приближенно балансируются в глобальном балансе уравнения для турбулентных потоков скаляра, как в уравнении для сдвиговых напряжений Рейнольдса, и в отличие от уравнений для дисперсии пульсаций скаляра и нормальных напряжений Рейнольдса. Алгебраические выражения для турбулентных потоков скаляра, типа модели градиентной диффузии, а также полученные в локально-равновесном и неравновесном приближениях, оказываются некорректными, поэтому оправдано привлечение полных дифференциальных уравнений переноса для турбулентных потоков скаляра.

Ключевые слова: устойчивая стратификация, обрушение внутренних волн, течение над препятствием, прямое численное моделирование, турбулентный поток скаляра, корреляция с пульсациями давления, полуэмпирические модели турбулентности.

Введение

Подветренные внутренние волны, генерируемые топографией, при определенных условиях опрокидываются, что приводит к образованию квазистационарных областей турбулентности, наблюдавшихся в лабораторных экспериментах [1] и геофизических течениях. Эта проблема изучена путем прямого численного моделирования (DNS) [2; 3] уравнений Навье – Стокса в приближении Буссинеска. Внутренние волны генерировались двумерным препятствием косинусои-

дальной формы высотой h в течении с постоянными входными значениями скорости U и градиента плотности, соответствующего устойчивой стратификации. В DNS-расчете при числах Рейнольдса $Re = Uh/\nu = 4000$ и Прандтля $Pr = \nu/\lambda = 1$ обрушение волн имеет место, если число Фруда F_h (основанное на h) относительно мало, как и в [1]. Результаты при $F_h = 0,6$ представлены в [2–5] мгновенными и осредненными траекториями частиц среды, изолиниями плотности, спектрами, членами баланса в уравнениях

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 17-01-00332а). Автор выражает благодарность проф. И. П. Кастро и д-ру Т. Г. Томасу за помощь в получении данных прямого численного моделирования и их обсуждение, а также проф. А. Ф. Курбацкому за внимание к вопросам моделирования статистических моментов второго порядка.

для напряжений Рейнольдса и скалярной дисперсии, полученными при осреднении по размаху препятствия в области перемешивания и по значительному интервалу времени, на котором возникающая область турбулентности полностью развита и квазистационарна.

В настоящей работе на основе данных DNS [2] получены различные характеристики поля скорости и скаляра в области обрушения подветренных волн, в частности распределения турбулентных потоков скаляра и членов баланса в уравнении для этих потоков. Затем выполнены априорные оценки аппроксимаций корреляции «давление – сдвиг скаляра» и членов турбулентной диффузии, а также алгебраических моделей для турбулентных потоков скаляра. Такой анализ полезен как для изучения поведения области турбулентности в терминах статистических моментов, так и для верификации моделей турбулентности.

Уравнение для турбулентных потоков скаляра

Основные уравнения для мгновенных полей скорости и скаляра в безразмерном виде [2] при $Pr = 1$ и осреднении по Рейнольдсу дают уравнение для турбулентных потоков скаляра $\langle u'_i f' \rangle$:

$$\begin{aligned} \partial \langle u'_i f' \rangle / \partial t = \\ = -A_{if} + M_{if} + T_{if} + D_{if} + P_{if} + G_{if} + \pi_{if} - \varepsilon_{if} \equiv \\ \equiv \langle u'_i f' \rangle_t, \end{aligned} \quad (1)$$

$$A_{if} = \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u'_i f' \rangle}{\partial x_j}, \quad M_{if} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \langle u'_i f' \rangle}{\partial x_i^2},$$

$$T_{if} = -\frac{\partial \langle u'_i u'_j f' \rangle}{\partial x_j}, \quad D_{if} = -\frac{\partial \langle p' f' \rangle}{\partial x_i},$$

$$P_{if} = -\langle u'_j f' \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle f' \rangle}{\partial x_j},$$

$$G_{if} = -\delta_{i3} F_h^{-2} \langle f' f' \rangle, \quad \pi_{if} = \left\langle p' \frac{\partial f'}{\partial x_i} \right\rangle,$$

$$\varepsilon_{if} = \frac{2}{Re} \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f'}{\partial x_j} \right\rangle,$$

где скорость изменения (левая часть) балансируется адвекцией (A_{if}), молекулярной диффузией (M_{if}), турбулентной диффузией за счет тройных корреляций (T_{if}), диффузией давления (D_{if}), порождением средними

сдвигами скорости и скаляра (P_{if}), порождением плавучести (G_{if}), корреляцией с пульсацией давления (π_{if}), диссипацией (ε_{if}). Скаляр f и давление p представляют собой [2] нормализованные отклонения от гидростатических величин плотности и давления соответственно; u_i – вектор мгновенной скорости, а u'_i , f' и p' – пульсации скорости, скаляра и давления соответственно. Бюджеты уравнений переноса для турбулентной кинетической энергии $k = \langle u'_i u'_i \rangle / 2$, компонент тензора напряжений Рейнольдса $\langle u'_i u'_j \rangle$ и дисперсии пульсаций скаляра рассмотрены в [2; 4; 5]. Ниже приводится анализ бюджета уравнения переноса (1).

Распространенным подходом для определения $\langle u'_i f' \rangle$ также является упрощение (1) до алгебраического соотношения. В предположении малости процессов адвекции и диффузии величины $\langle u'_i f' \rangle$ по сравнению с порождением, соответствующими членами в (1) пренебрегают или выражают их алгебраически через известные величины. В частности, перенос компонент $\langle u'_i f' \rangle$ полагается пропорциональности переносу величины $\sqrt{k \langle f' f' \rangle}$ (см., например, [6]):

$$\begin{aligned} R_{if} \equiv \frac{\left(\frac{\partial \langle u'_i f' \rangle}{\partial t} + A_{if} - T_{if} \right)}{\langle u'_i f' \rangle} \approx \frac{1}{2} \alpha_{if} \times \\ \times \left\{ \frac{\left(\frac{\partial k}{\partial t} + A_k - T_k \right)}{k} - \frac{\left(\frac{\partial \langle f' f' \rangle}{\partial t} + A_f - T_f \right)}{\langle f' f' \rangle} \right\} \equiv R_{kff}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\alpha_{if} = 0$ [7] (локальное равновесие) или $\alpha_{if} = 1$ [6] (неравновесное приближение).

Учет (1) и уравнений для турбулентной кинетической энергии и скалярной дисперсии [4; 5]

$$\partial k / \partial t = -A_k + M_k + T_k + D_k + P + G - \varepsilon,$$

$$\partial \langle f' f' \rangle / \partial t = -A_f + M_f + T_f + P_f - \varepsilon_f,$$

$$\begin{aligned}
 A_k &= \langle u_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i}, \quad M_k = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 k}{\partial x_i^2}, \\
 T_k &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_j}, \quad D_k = -\frac{\partial \langle p' u'_i \rangle}{\partial x_i}, \\
 P &= -\langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}, \quad G = -\frac{\delta_{i3}}{F_h^2} \langle u'_i f' \rangle, \\
 \varepsilon &= \frac{1}{\text{Re}} \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle, \\
 A_f &= \langle u_i \rangle \frac{\partial \langle f' f' \rangle}{\partial x_i}, \quad M_f = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{\partial^2 \langle f' f' \rangle}{\partial x_i^2}, \\
 T_f &= -\frac{\partial \langle u'_i f' f' \rangle}{\partial x_i}, \quad P_f = -2 \langle u'_i f' \rangle \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial x_i}, \\
 \varepsilon_f &= \frac{2}{\text{RePr}} \left\langle \frac{\partial f'}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f'}{\partial x_i} \right\rangle
 \end{aligned}$$

в (2) в пренебрежении молекулярной диффузии и диффузией давления дает соотношение

$$\begin{aligned}
 P_{if} + G_{if} + \pi_{if} - \varepsilon_{if} = \\
 = \frac{1}{2} \alpha_{if} \left\{ \frac{(P + G - \varepsilon)}{k} - \frac{(P_f - \varepsilon_f)}{\langle f' f' \rangle} \right\} \langle u'_i f' \rangle, \quad (3)
 \end{aligned}$$

упрощающее дифференциальное уравнение (1) и определяющее $\langle u'_i f' \rangle$ [6; 7].

Результаты вычислений и априорных оценок

На рис. 1 из [4; 5] представлена картина течения в виде мгновенных траекторий частиц, изолиний осредненных значений ска-

ляра (плотности), амплитуды скорости, завихренности, градиентов скаляра в центральной вертикальной плоскости (вид сбоку), полученных из данных DNS [2] для квазистационарного периода первичной области турбулентности, возникающей при опрокидывании подветренных волн. Распределение плотности отражает слабонеустойчивое состояние в передней и нижней частях турбулентной области, поддерживающее генерацию пульсаций скаляра и скорости [5]. Локальные экстремумы турбулентных потоков скаляра образуются (рис. 1) в слое смешения над областью обрушения (где значительны вертикальные градиенты средних скорости и скаляра) и в зонах неустойчивого вертикального градиента плотности и максимума горизонтального градиента плотности на передней кромке области [5].

Бюджет уравнения (1) для турбулентных потоков скаляра демонстрирует малые изменения величин потоков на интервале $35 \leq t \leq 55$ (рис. 2), подтверждая квазистационарное поведение турбулентной области, возникающей при обрушении волн. Молекулярная диффузия везде пренебрежимо мала (максимум $|M_{if}|$ на два порядка меньше максимума $|T_{if}|$, рис. 3), поэтому показана на рис. 2 не отдельно, а в сумме с турбулентной диффузией. Все слагаемые (1) находились непосредственно из данных DNS, за исключением производных по времени, определявшихся как численная невязка баланса остальных членов (1). Остаточная величина изменения по времени,

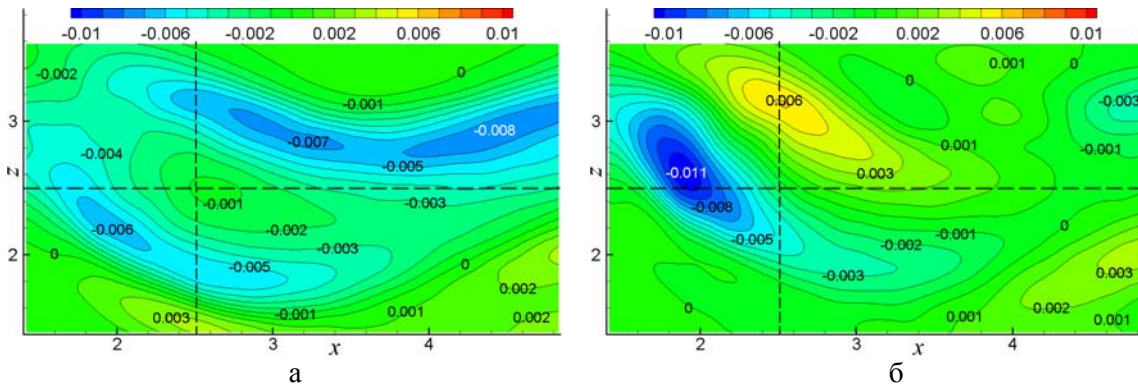


Рис. 1. Изолинии компонент вектора турбулентных потоков скаляра $\langle u'f' \rangle$ (а), $\langle w'f' \rangle$ (б). Осреднение выполнено по всем узлам вдоль размаха препятствия (по координате y) и локально по (9×9) -узлам в (x, z) -плоскости, а затем по квазистационарному периоду ($35 \leq t \leq 55$)

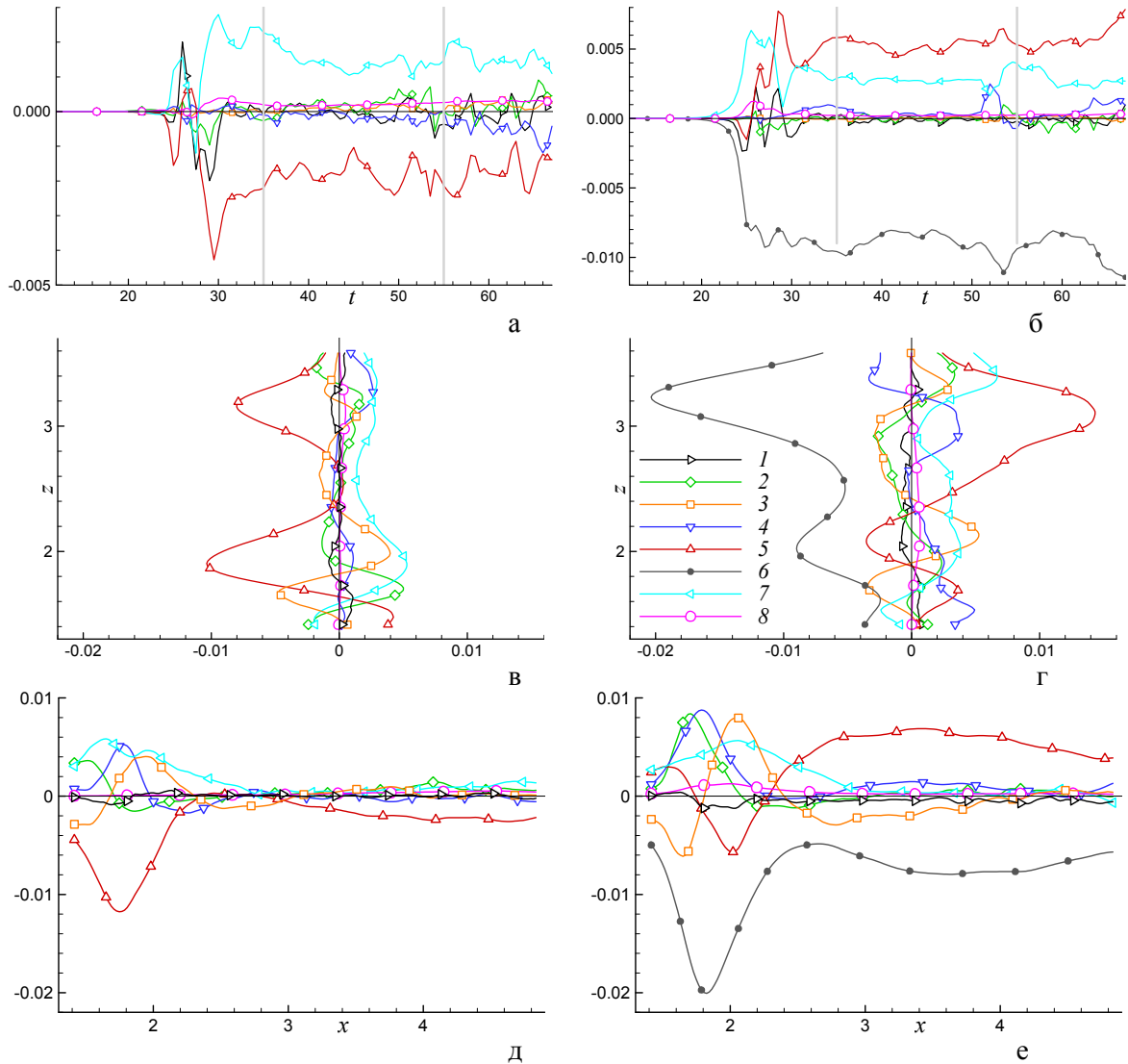


Рис. 2. Бюджет уравнения (1) для турбулентных потоков скаляра $\langle u'f' \rangle$ (а, в, д) и $\langle w'f' \rangle$ (б, з, е):

$$1 - \langle u'_i f' \rangle_t; \quad 2 - (-A_{ij}); \quad 3 - (T_{ij} + M_{ij}); \quad 4 - D_{ij}; \quad 5 - P_{ij}; \quad 6 - G_{ij}; \quad 7 - \pi_{ij}; \quad 8 - (-\varepsilon_{ij})$$

(а, б – эволюция по времени величин, осредненных по y и локально по малым площадям с (9×9) -узлами в (x, z) -плоскости, затем по области турбулентности $(1,41 \leq x \leq 4,84$ и $1,41 \leq z \leq 3,59)$; профили при $x = 2,5$ (в, д) и $z = 2,5$ (з, е), полученные при осреднении данных DNS, как на рис. 1)

обозначаемая как $\langle u'_i f' \rangle_t$, неявно включает погрешности вычислений баланса остальных членов, которые очень малы для используемой мелкой сетки [2].

С ростом времени (см. рис. 2, а, б) сначала, при $t \sim 22$, появляется порождение плавучести для турбулентных потоков скаляра ($G_{wf} \equiv G_{3f} = -(1/F_h^2) \langle f' f' \rangle$), приводя к быстрому росту $\langle w' f' \rangle$, как и в [4] для верти-

кальных пульсаций скорости $\langle w' w' \rangle$. Порождение плавучести остается доминирующим вкладом в бюджет $\langle w' f' \rangle$ -уравнения, в отличие от бюджета $\langle w' w' \rangle$ -уравнения, где глобально (т. е. при осреднении по области турбулентности) вклад порождения плавучести при $35 \leq t \leq 55$ был относительно малым [4]. Глобально корреляция с пульсациями давления приблизительно балансирует

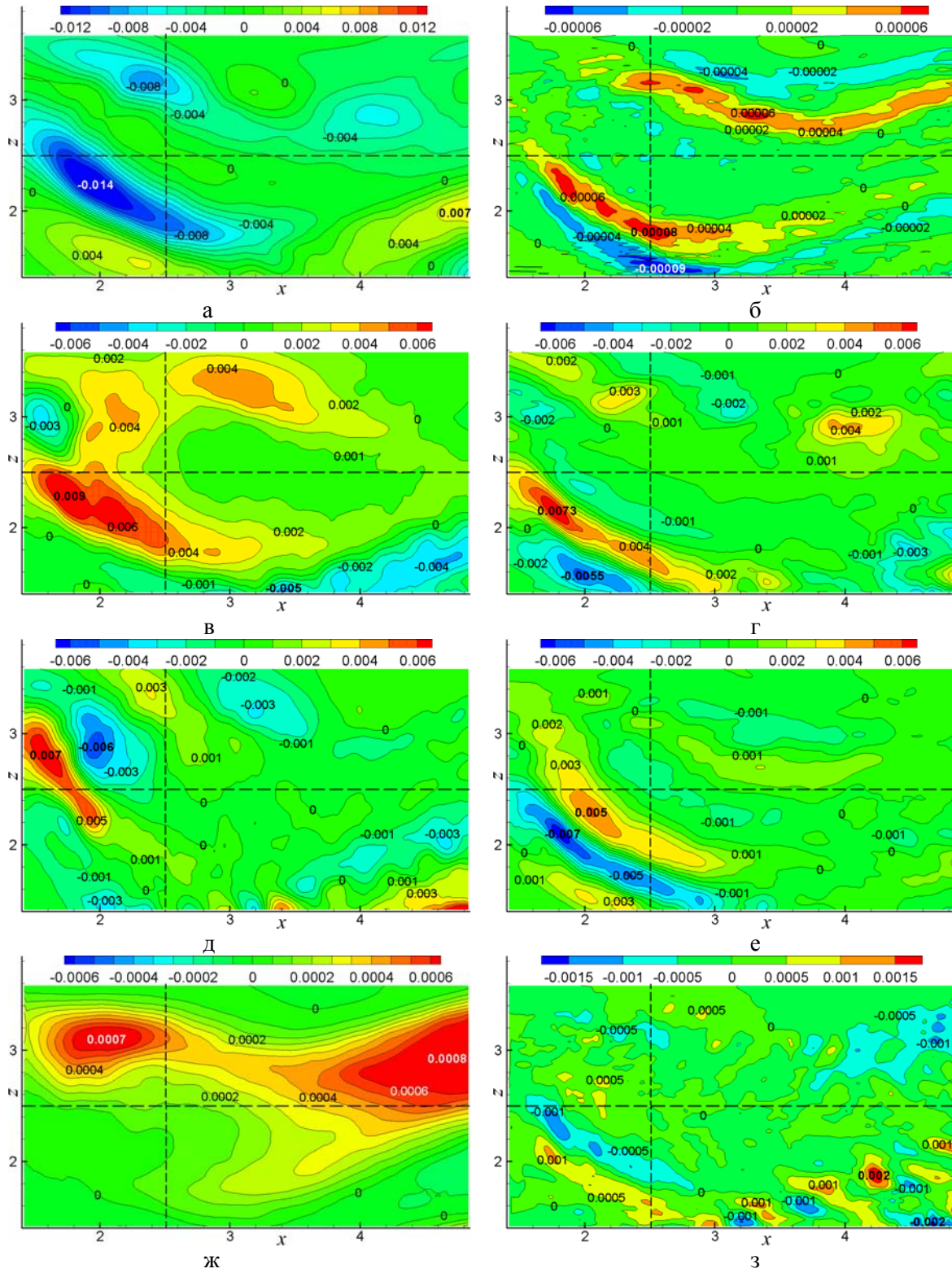


Рис. 3. Изолинии членов $\langle u'f' \rangle$ -уравнения, полученные осреднением данных DNS, как на рис. 1:

$$a - P_{uf}; \quad б - M_{uf}; \quad в - \pi_{uf}; \quad г - (-A_{uf}); \quad д - D_{uf}; \quad е - T_{uf} + M_{uf}; \quad ж - (-\varepsilon_{uf}); \quad з - \langle u'f' \rangle,$$

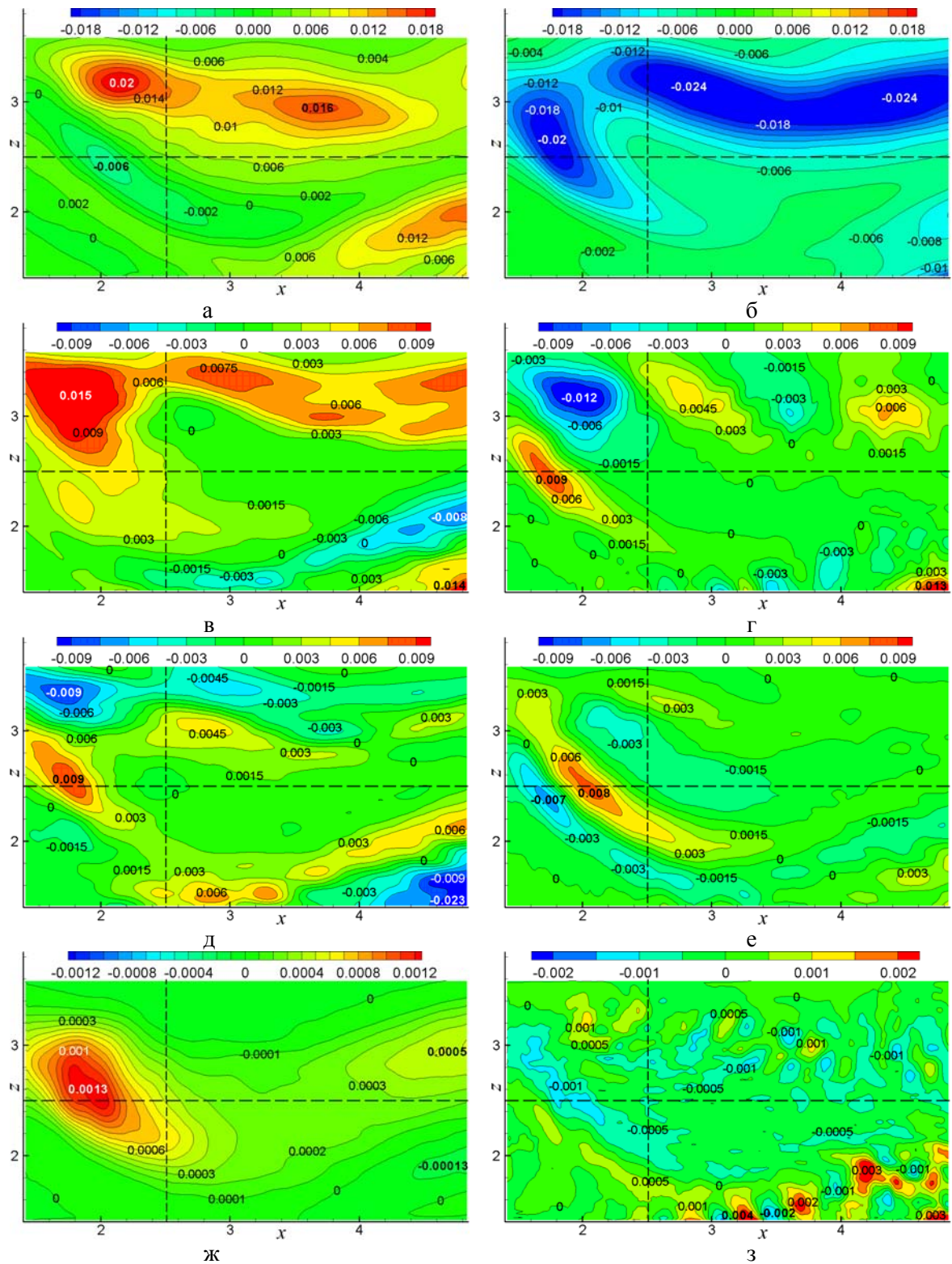


Рис. 4. Изолинии членов уравнения для $\langle w'f' \rangle$, полученные осреднением данных DNS, как на рис. 1:

$$a - P_{wf}; \quad б - M_{wf}; \quad в - \pi_{wf}; \quad г - (-A_{wf}); \quad д - D_{wf}; \quad e - T_{wf} + M_{wf}; \quad ж - (-\epsilon_{wf}); \quad з - \langle w'f' \rangle,$$

порождение средним сдвигом и порождение плавучести в бюджете уравнения (1), а адвекция, диссипация и диффузия оказываются величинами меньшего порядка.

Это аналогично бюджету уравнения для сдвиговых напряжений Рейнольдса и не соответствует бюджету уравнений для нормальных напряжений Рейнольдса и дисперсии пульсаций скаляра, где слагаемые адвекции и диссипации также вносят заметный вклад (см. рис. 2 из [4; 5]). Локальные распределения статей баланса (показанные при $x = 2,5$ и $z = 2,5$ на рис. 2, $\nu-e$, в (x, z) -плоскости на рис. 3, 4) в некоторых местах, например в передней части турбулентной области, имеют сравнимые величины членов порождения средним сдвигом, адвекции, диффузии давления и турбулентной диффузии. Вклады диссипации, молекулярной диффузии и результирующее изменение во времени $\langle u'_i f' \rangle_t$ остаются малыми и в локальных распределениях (см. рис. 2–4).

При добавлении малого члена диссипации (в моделях турбулентности этим членом обычно пренебрегают, полагая $\varepsilon_{if} \approx 0$) к

корреляции с пульсациями давления итоговая величина почти не меняется (см. рис. 3, ν, \mathcal{J} ; 4, ν, \mathcal{J} ; 5, a, δ) и следует линейной гипотезе стремления к изотропии [7; 8]

$$\begin{aligned} \pi_{if} - \varepsilon_{if} &\approx \\ \approx \pi_{if} &= -C_{1f} \frac{\varepsilon}{k} \langle u'_i f' \rangle - C_{2f} P_{if}^* - C_{3f} G_{if}, \\ P_{if}^* &= -\langle u'_j f' \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}, \\ C_1 &= 3,5, \quad C_{2f} = C_{3f} = 0,5, \end{aligned} \quad (4)$$

которая приблизительно подтверждается (см. рис. 5) с рекомендованными в [8] константами в (4), т. е. корреляция «давление – сдвиг скаляра», в основном, пропорциональна и противоположна по знаку величинам $\langle u'_i f' \rangle$, порождения сдвигом скорости P_{if}^* и порождения плавучести G_{if} , как и для сдвигового напряжения Рейнольдса [4]. Некоторое занижение корреляций с пульсациями давления для горизонтальной компоненты турбулентного потока тепла (в частности, в передней части области при $x \approx 2$) и завышение – для вертикальной компоненты

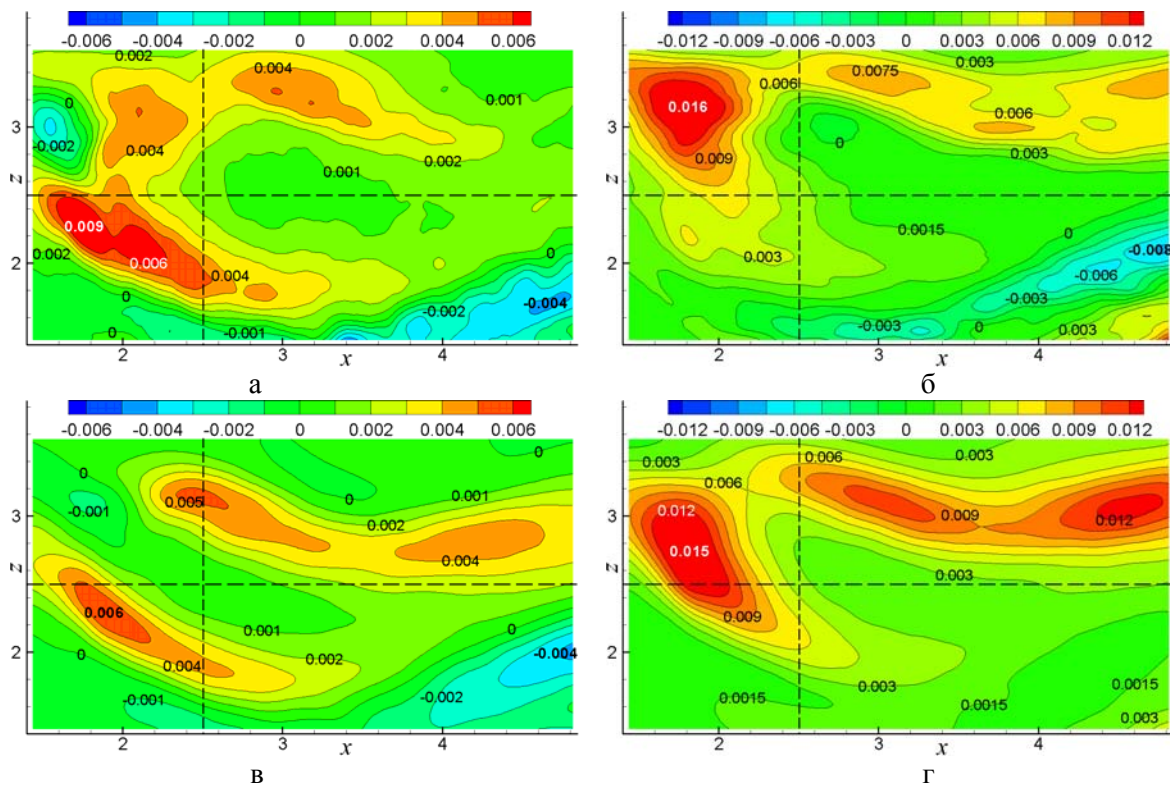


Рис. 5. Изолинии $(\pi_{if} - \varepsilon_{if})$, полученные: a, δ – непосредственно из данных DNS; ν, \mathcal{z} – из априорной оценки модели (4) – подстановки данных DNS в (4) ($a, \nu - (\pi_{if} - \varepsilon_{if})$; $\delta, \mathcal{z} - (\pi_{if} - \varepsilon_{if})$)

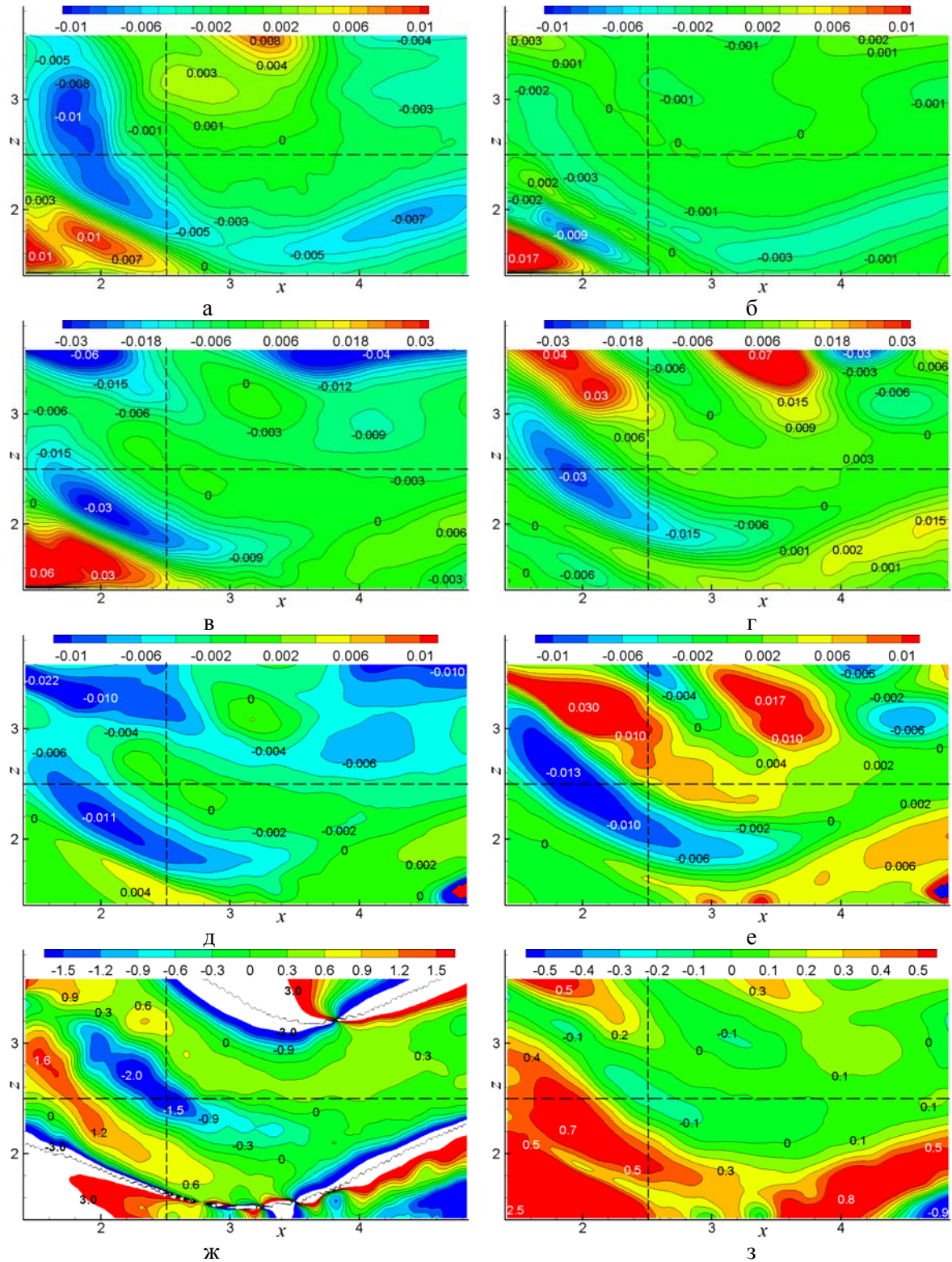


Рис. 6. Изолинии корреляций $\langle u'f' \rangle$ (а, в, д) и $\langle w'f' \rangle$ (б, г, е), полученных при подстановке осредненных данных DNS в выражения (6) (а, б), (5) при $\alpha_{if} = 0$ (в, г), (5) при $\alpha_{if} = 1$ (д, е); изолинии величин R_{if} (ж) и R_{iff} (з), т. е. левой и правой частей уравнения (2) для $\langle u'f' \rangle$

(в верхнем и нижнем слоях смешения при $x > 2,4$), по-видимому, может быть исправлено путем подходящих нелинейных модификаций модели (2) для π_{if} (приведенных, например, в [8]).

Подстановка аппроксимации (4) в (3) дает анизотропное выражение

$$\langle u'_i f' \rangle = \frac{P_{if} - C_{2f} P_{if}^* + (1 - C_{2f}) G_{if}}{C_{1f} \frac{\varepsilon}{k} + \frac{1}{2} \alpha_{if} \left\{ \frac{(P + G - \varepsilon)}{k} - \frac{(P_f - \varepsilon_f)}{\langle f' f' \rangle} \right\}} \quad (5)$$

для компонент вектора $\langle u'_i f' \rangle$. Простая модель изотропной турбулентной диффузии [9; 10]

$$\langle u'_i f' \rangle = \frac{v_t}{\sigma_t} \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial x_i}, \quad v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (6)$$

$$C_\mu = 0,09, \quad \sigma_t = 0,9$$

фактически учитывает только порождение средним сдвигом скаляра из (1) по сравнению с (5), где учтено большинство статей баланса исходного уравнения переноса (1). Сравнение распределений для турбулентных потоков скаляра на рис. 1 и 6, *a-e* показывает, однако, что (5) и (6) являются некорректными. Наиболее полная неравновесная модель (5) при $\alpha_{if} = 1$ дает некоторое качественное согласие, но количественные расхождения остаются существенными, по-видимому, из-за грубости допущения (2), как видно из рис. 6, *ж, з*. Таким образом, для рассматриваемой области обрушения подветренных волн турбулентные потоки скаляра лучше определять из решения полного дифференциального уравнения (1).

Для замыкания (1) помимо параметризации (4) необходимо задать турбулентную диффузию T_{if} или корреляции, входящие в T_{if} . Для описания тонких нелокальных свойств турбулентного переноса иногда применяются модели третьего порядка с уравнением для $\langle u'_i u'_j f' \rangle$ [11], но в большинстве приложений используются алгебраические модели для тройных корреляций. Приближенно замкнутое уравнение переноса для $\langle u'_i u'_j f' \rangle$ с учетом локального равновесия дает

$$-\langle u'_i u'_j f' \rangle = C_{sf}^* \frac{k}{\varepsilon} \left[\langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial \langle u'_i f' \rangle}{\partial x_k} + \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial \langle u'_j f' \rangle}{\partial x_k} + \langle u'_k f' \rangle \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_k} \right], \quad (7)$$

$$C_{sf}^* = 0,11 \div 0,15,$$

эмпирическая константа найдена численной оптимизацией [8; 11]. Упрощенные аппроксимации [8; 12; 13] оказывают подобные модели (7) влияние за счет увеличения C_{sf} по сравнению с C_{sf}^* :

$$-\langle u'_i u'_j f' \rangle = C_{sf} \left(\frac{k}{\varepsilon} \right) \times \left[\langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial \langle u'_i f' \rangle}{\partial x_k} + \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial \langle u'_j f' \rangle}{\partial x_k} \right], \quad (8)$$

$$-\langle u'_i u'_j f' \rangle = C_{sf} \left(\frac{k}{\varepsilon} \right) \left[\langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial \langle u'_i f' \rangle}{\partial x_k} \right], \quad (9)$$

$$C_{sf} = 0,2 \div 0,3.$$

Наиболее простая градиентная модель аналогична (6) и членам диффузии в k - ε модели [9; 10]:

$$-\langle u'_i u'_j f' \rangle = (v_t / \sigma_t) \partial \langle u'_i f' \rangle / \partial x_j. \quad (10)$$

Диффузией давления D_{if} в моделях турбулентности обычно пренебрегают или включают D_{if} в аппроксимацию члена турбулентной диффузии $T_{if} = -\partial \langle u'_i u'_j f' \rangle / \partial x_j$, обусловленной тройными корреляциями, т. е. полагают, что $(T_{if} + D_{if})$ получается так же, как и T_{if} : например, для (9) и (10) соответственно

$$T_{if} + D_{if} \approx \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{sf} \frac{k}{\varepsilon} \langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial \langle u'_i f' \rangle}{\partial x_k} \right)$$

и

$$T_{if} + D_{if} \approx \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_t}{\sigma_{sf}} \frac{\partial \langle u'_i f' \rangle}{\partial x_j} \right).$$

На рис. 7 представлены величины $(T_{if} + D_{if})$, полученные непосредственно из данных DNS (см. D_{if} и T_{if} на рис. 3, 4) и результаты априорных оценок диффузионных членов $(T_{if} + D_{if})$ из (7)–(10). Как и в [5], эмпирические константы в (7)–(9) уменьшены, для того чтобы уровень процессов диффузии в передней части области обрушения был

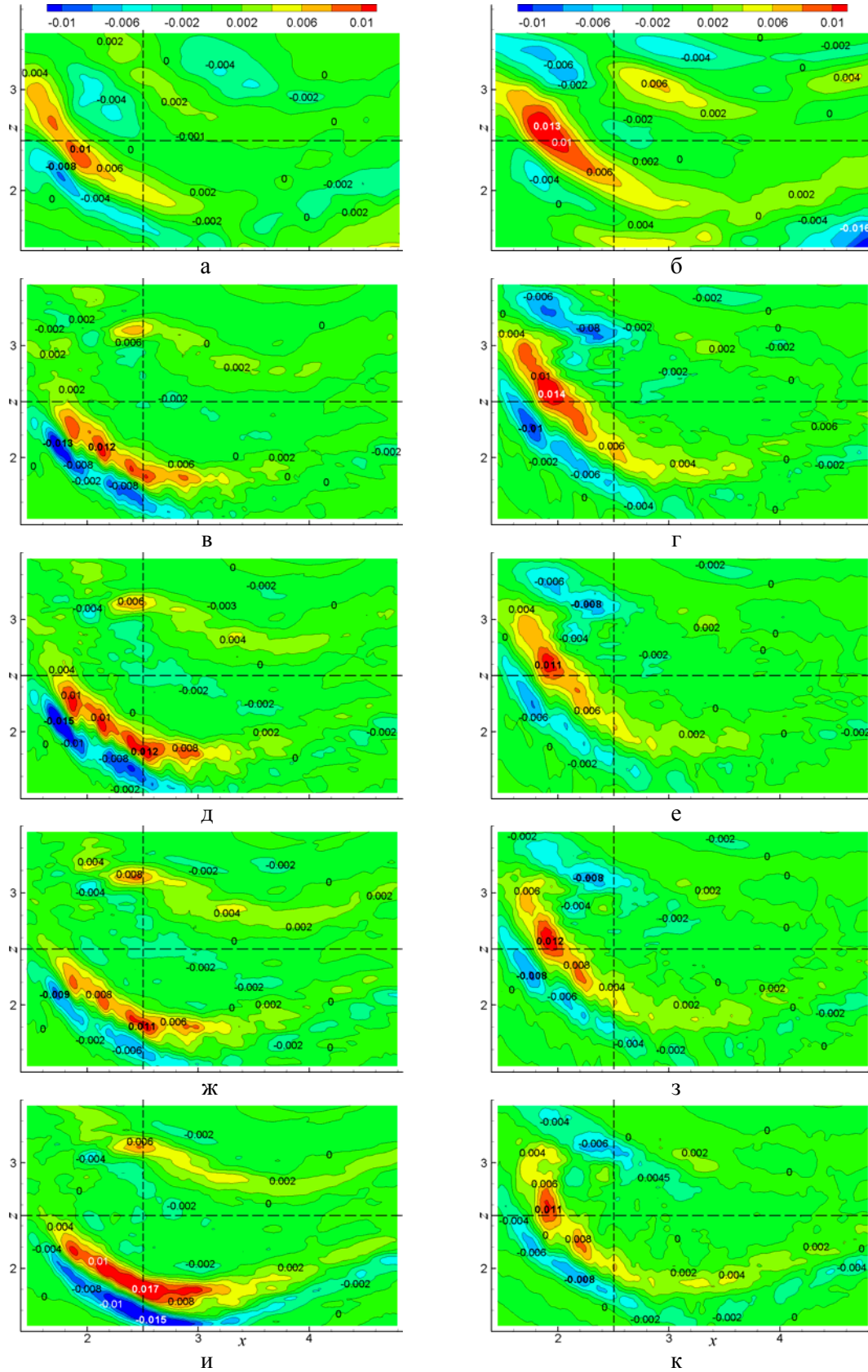


Рис. 7. Изолинии величин $(T_{if} + D_{if})$, в том числе $(T_{if} + D_{if})$ (а, в, д, з, и) и $(T_{wf} + D_{wf})$ (б, г, е, ж, к), вычисленных напрямую из данных DNS (а, б); из априорных оценок аппроксимаций (7) при $C_{sf}^* = 0,09$ (в, г); (8) при $C_{sf} = 0,12$ (д, е); (9) при $C_{sf} = 0,15$ (ж, з); градиентной модели (10) (и, к)

сопоставим с наблюдаемым в DNS, тогда как при $C_{sf}^* = 0,11$, $C_{sf}' = 0,2$, $C_{sf} = 0,3$ величина $(T_{if} + D_{if})$ получается завышенной.

Модели (7)–(10) дают небольшую ложную зону положительных значений $(T_{if} + D_{if})$ в верхней части турбулентной области с максимумом при $x \approx 2,4$ и $z \approx 3,2$, отсутствующую на рис. 7, а, немного смещают вниз основную зону положительных значений $(T_{if} + D_{if})$ в передней части области и не воспроизводят малую зону положительных значений $(T_{wf} + D_{wf})$ при $x \approx z \approx 3$ (см. рис. 7). Тем не менее, в целом, градиентные модели процессов диффузии, особенно полная аппроксимация (7), демонстрируют неплохое качественное и количественное согласие, тогда как наиболее простая модель (10) с изотропным коэффициентом турбулентной диффузии ν_t/σ_t дает наихудшее согласие, завышая $(T_{if} + D_{if})$ и занижая $(T_{wf} + D_{wf})$. Также в [14] показано, что алгебраическая модель для $\langle u'_i u'_j u'_k \rangle$ будет точнее при учете не только порождения моментов третьего порядка, основанного на градиентах моментов второго порядка, но и порождения за счет плавучести и градиентов средних величин в уравнении переноса для тройных корреляций. Подобное уточнение, очевидно, возможно по отношению к (7) с привлечением всех членов полного порождения $\langle u'_i u'_j f' \rangle$ из уравнения переноса для этой корреляции.

Заключение

Турбулентная область, возникающая при обрушении подветренных внутренних волн в течении с препятствием и стратификацией, исследована путем анализа компонент вектора турбулентных потоков скаляра и статей баланса в уравнении переноса для этой величины, полученных из данных прямого численного моделирования [2]. На основе этих результатов выполнены априорные оценки возможностей общепринятых гипотез замыкания для корреляции «давление – сдвиг скаляра» и диффузионных членов в уравнении переноса для турбулентных потоков скаляра, а также алгебраических выражений для этих потоков. Подобный анализ бюджета уравнений переноса и работоспособности аппроксимаций моделей тур-

булентности можно провести и для различных моментов третьего порядка.

Список литературы

1. Castro I. P., Snyder W. H. Experiments on wave breaking in stratified flow over obstacles // J. Fluid Mech. 1993. Vol. 255. P. 195–211.
2. Yakovenko S. N., Thomas T. G., Castro I. P. A turbulent patch arising from a breaking internal wave // J. Fluid Mech. 2011. Vol. 677. P. 103–133.
3. Yakovenko S. N., Thomas T. G., Castro I. P. Transition through Rayleigh–Taylor instabilities in a breaking internal lee wave // J. Fluid Mech. 2014. Vol. 760. P. 466–493.
4. Яковенко С. Н. Бюджет уравнений для напряжений Рейнольдса в области турбулентности, возникающей при обрушении внутренних волн // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Физика. 2012. Т. 7, вып. 4. С. 87–95.
5. Яковенко С. Н. Бюджет уравнения для дисперсии пульсаций скаляра в области турбулентности, возникающей при обрушении подветренных волн // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Физика. 2015. Т. 10, вып. 4. С. 85–94.
6. Гибсон М. М., Лондер Б. Е. О расчете свободных горизонтальных турбулентных течений со сдвигом в условиях влияния естественной конвекции // Теплопередача. Серия С. 1976. Т. 98, № 1. С. 86–94.
7. Gibson M. M., Launder B. E. Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer // J. Fluid Mech. 1978. Vol. 86. P. 491–511.
8. Hanjalić K., Launder B. Modelling turbulence in engineering and the environment: Second-moment routes to closure. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 379 p.
9. Jones W. P., Launder B. E. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence // Int. J. Heat Mass Transfer. 1972. Vol. 15. P. 301–314.
10. Поди В. Модели турбулентности окружающей среды // Методы расчета турбулентных течений / Под ред. В. Кольмана. М.: Мир, 1984. С. 227–322.
11. Курбацкий А. Ф. Моделирование нелокального турбулентного переноса импульса и тепла. Новосибирск: Наука, 1988. 240 с.

12. *Wyngaard J. C.* Modelling the planetary boundary layer – Extension to the stable case // *Boundary Layer Meteorology*. 1975. Vol. 9. No. 4. P. 441–460.

13. *Lauder B. E.* Heat and mass transport // *Turbulence* / Ed. by P. Bradshaw. Berlin: Springer-Verlag, 1976. P. 231–287.

14. *Yakovenko S. N.* Second- and third-order moment budgets in a turbulent patch resulting from internal gravity wave breaking // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2011. Vol. 318. Article 072022. P. 1–10.

Материал поступил в редколлегию 19.10.2016

S. N. Yakovenko

*Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS
4/1 Institutskaya Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation*

yakovenk@itam.nsc.ru

**MODELING THE TURBULENT SCALAR FLUXES
IN AN INTERNAL WAVE BREAKING REGION
IN STRATIFIED FLOW WITH OBSTACLE**

Based on averaging of the direct numerical simulation data obtained earlier, statistical moments are calculated in a turbulent patch arising after internal wave overturning in a flow with obstacle and stable stratification. Temporal evolution and spatial behavior of the turbulent-scalar-flux transport equation budget have been studied. A priori estimations of approximations for the pressure-scalar-gradient correlation and turbulent-diffusion processes in this equation have been carried out. The performed analysis is helpful to explore the turbulent patch in terms of statistical moments, and to verify closure hypotheses in turbulence models. It is shown that, in the global balance of the turbulent-scalar-flux equation, the mean-shear and buoyancy productions and the pressure-scalar-gradient correlation are roughly balanced, as for the shear Reynolds stress equation, and in contrast to the scalar variance and normal Reynolds stress equations. The algebraic turbulent-scalar-flux relations of the gradient diffusion type, as well as those derived in local-equilibrium and non-equilibrium assumptions are incorrect; therefore the use of the full turbulent-scalar-flux equation is justified.

Keywords: stable stratification, internal wave breaking, flow above obstacle, direct numerical simulation, turbulent scalar flux, correlation with pressure fluctuations, semi-empirical turbulence models.