

УДК 532.516

DOI 10.25205/2541-9447-2019-14-1-17-24

Интегральная модель волновых режимов течения тонкого слоя вязкой жидкости, учитывающая члены второго порядка малости и влияние газового потока

И. С. Вожаков

*Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН
Новосибирский государственный университет
Новосибирск, Россия*

Аннотация

Получена модель учитывающая влияние членов второго порядка малости по параметру длинноволности, а также касательных и нормальных напряжений со стороны газового потока. Выполнено исследование линейной устойчивости полученной системы уравнений и проведено сравнение результатов с точным решением уравнения Орра – Зоммерфельда. Показано, что интегральные модели отличаются от точного решения даже при малых числах Рейнольдса, что связано с тем, что профиль продольной скорости отличается от полупараболического. Выполнено моделирование эволюции нелинейных волн как для свободно стекающей, так и для увлекаемой газовым потоком пленки жидкости. Получены профили стационарно бегущих волн для различных чисел Рейнольдса. Проведено сравнение профилей волн, полученных по разным моделям. Показано, что отличия результатов, полученных по разным моделям, незначительны, а взаимодействие с газовым потоком приводит к уменьшению длины волны возмущений.

Ключевые слова

тонкий слой жидкости, длинноволновое приближение, линейный анализ, нелинейные волны

Благодарности

Работа выполнена за счет средств РФФИ (мол_а 18-31-00269)

Для цитирования

Вожаков И. С. Интегральная модель волновых режимов течения тонкого слоя вязкой жидкости, учитывающая члены второго порядка малости и влияние газового потока // Сибирский физический журнал. 2019. Т. 14, № 1. С. 17–24. DOI 10.25205/2541-9447-2019-14-1-17-24

**Integral Model of Wavy Flow Regimes of Thin Viscous Liquid Layer
Taking into Account Second Order Terms
and Influence of the Gas Flow**

I. S. Vozhakov

*Institute of Thermophysics SB RAS
Novosibirsk State University
Novosibirsk, Russian Federation*

Abstract

In this paper, a model is obtained which takes into account the influence of second-order terms of smallness in the long-wavelength parameter, as well as tangential and normal stresses from the gas flow. The linear stability of the obtained system of equations was studied and the results were compared with the exact solution of the Orr-Sommerfeld equation. It is shown that integral models differ from the exact solution even at low Reynolds numbers, which is due to the fact that the longitudinal velocity profile differs from the semi-parabolic one. The evolution of nonlinear waves was simulated for both a free falling and a liquid film entrained in a gas stream. The profiles of stationary-traveling waves for different Reynolds numbers are obtained. A comparison of the profiles of waves obtained by different models has been carried out. It is shown that the differences in the results obtained by different models are insignificant, and the interaction with the gas flow leads to a decrease in the wavelength of the disturbances.

© И. С. Вожаков, 2019

ISSN 2541-9447

Сибирский физический журнал. 2019. Том 14, № 1
Siberian Journal of Physics, 2019, vol. 14, no. 1

Keywords

thin liquid layer, longwave approximation, linear analysis, nonlinear waves

Acknowledgements

The work was financially supported by the grant of the RFBR No. 18-31-00269 mol_a

For citationVozhakov I. S. Integral Model of Wavy Flow Regimes of Thin Viscous Liquid Layer Taking into Account Second Order Terms and Influence of the Gas Flow. *Siberian Journal of Physics*, 2019, vol. 14, no. 1, p. 17–24. (in Russ.) DOI 10.25205/2541-9447-2019-14-1-17-24**Введение**

Тонкие пленки жидкости, увлекаемые газовым потоком, часто встречаются в различных промышленных процессах для интенсификации тепло- и массоотдачи. Поверхностные волны играют важную роль во взаимодействии между фазами из-за многократного увеличения площади межфазной поверхности при их развитии. Эксперименты [1; 2] показали, что длина волн, развивающихся при стекании пленок жидкости, много больше, чем толщина пленки. Это предполагает введение низкоразмерных моделей, построенных на длинноволновом параметре $\varepsilon \ll 1$, который показывает малость отношения толщины пленки к длине волны возмущений. Такие модели основаны на ранних работах Бенни [3] и Шкадова [4]. В дальнейшем Руйер-Квил и Манневиль [5] добавили поправки следующих порядков к профилю скорости в пленке жидкости. Этот подход был также использован в работе [6] для моделирования пленок, увлекаемых турбулентным потоком газа.

Постановка задачи

В настоящем исследовании проводится моделирование динамики нелинейных волн на пленке жидкости, стекающей под действием силы тяжести и трения со стороны газового потока. Течение газа является турбулентным и происходит в вертикальном канале. Решение этой проблемы в полной сопряженной постановке связано со значительными вычислительными трудностями, поэтому зачастую выделяют два этапа моделирования: определение напряжений газа на поверхности пленки и последующий расчет эволюции волн в жидкости [7]. Скорость жидкости значительно меньше характерной скорости газа, поэтому поверхность раздела полагают жесткой и неподвижной. Кроме того, вследствие малости толщины пленки влияние возмущений границы раздела на скорости в газе можно считать линейным. В силу этого задача вычисления нормальных и касательных напряжений газа на поверхности сводится к рассмотрению влияния на них отдельных пространственных гармоник. Полная постановка задачи в жидкости включает уравнения Навье – Стокса и неразрывности, которые в безразмерной записи имеют вид [2]

$$u_t + uu_x + vu_y = -p_x + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}}(u_{yy} + \varepsilon^2 u_{xx}) + \frac{1}{\varepsilon \text{Fr}}, \quad (1)$$

$$\varepsilon^2 (v_t + uv_x + vv_y) = -p_y + \frac{\varepsilon}{\text{Re}}(v_{yy} + \varepsilon^2 v_{xx}), \quad (2)$$

$$u_x + v_y = 0. \quad (3)$$

Соответствующие кинематические и динамические граничные условия на стенке ($y = 0$)

$$u = 0, \quad v = 0,$$

и межфазной поверхности ($y = h(x, t)$)

$$u_y = T + \varepsilon^2 \left(\frac{4v_y h_x}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} - v_x \frac{1 - \varepsilon^2 h_x^2}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} \right), \quad (4)$$

$$v = h_t + uh_x,$$

$$p = P + \frac{2\varepsilon}{\text{Re}} \left(v_y \frac{1 - \varepsilon^2 h_x^2}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} - \frac{(u_y + \varepsilon^2 v_x) h_x}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} \right) - \frac{\text{We} \varepsilon^2 h_{xx}}{(1 + \varepsilon^2 h_x^2)^{3/2}}. \quad (5)$$

Здесь $u = \tilde{u} / U$ – продольная компонента скорости; $v = \tilde{v} / (UH / L)$ – поперечная компонента скорости; $x = \tilde{x} / L$ – продольная координата; $y = \tilde{y} / H$ – поперечная координата; $t = \tilde{t} / (L / U)$ – время; $h = \tilde{h} / H$ – мгновенная локальная толщина; $\text{Re} = \rho UH / \mu$ – число Рейнольдса; $\text{Fr} = U^2 / gH$ – число Фруда; $\text{We} = \sigma / \rho H U^2$ – число Вебера; $\varepsilon = H / L$ – параметр длинноволности; L – характерный продольный масштаб; $T = \tilde{T} / (\mu U / H)$ и $P = \tilde{P} / (\rho U^2)$ – касательные и нормальные напряжения на границе раздела фаз соответственно. Описание расчета касательных и нормальных напряжений на границе раздела представлено в [8].

Ранее автором в работе [9] была допущена ошибка при выводе интегральной модели течения пленки жидкости с учетом малых членов по параметру длинноволности. Для случая волнистой пленки жидкости, следуя методу работ [4; 10] и удовлетворяя граничным условиям, будем искать профиль продольной скорости в виде

$$u = A(x, t)y + B(x, t)y^2, \quad (6)$$

$$A(x, t) = A_0(x, t) + \varepsilon^2 A_1(x, t), \quad B(x, t) = B_0(x, t) + \varepsilon^2 B_1(x, t).$$

Поперечную скорость найдем из уравнения неразрывности:

$$v = - \left(\frac{A_x y^2}{2} + \frac{B_x y^3}{3} \right).$$

Введем в рассмотрение локальный расход:

$$q(x, t) = \int_0^h u(x, y, t) dy.$$

Тогда, используя граничное условие (4) и оставляя члены до ε^2 включительно, получим систему уравнений

$$\frac{(A_0 + \varepsilon^2 A_1) h^2}{2} + \frac{(B_0 + \varepsilon^2 B_1) h^3}{3} = q, \quad (7)$$

$$A_0 + 2B_0 h = T + \left(\frac{1}{2} A_{0xx} h^2 + \frac{1}{3} B_{0xx} h^3 + 4h^2 h_x B_{0x} + 4h h_x A_{0x} - 2B_1 h - A_1 \right) \varepsilon^2. \quad (8)$$

Удовлетворяя уравнениям (7), (8), в нулевом порядке по ε получим

$$A_0 = \frac{3q}{h^2} - \frac{T}{2}, \quad B_0 = -\frac{3q}{2h^3} + \frac{3T}{4h}.$$

Во втором порядке имеем

$$A_1 = -\frac{1}{2} q_{xx} + \frac{3qh_{xx}}{4h} - \frac{3q_x h_x}{2h} + \frac{3qh_x^2}{2h^2} + \frac{1}{8} h h_{xx} T - \frac{1}{4} h h_x T_x + \frac{5}{4} h_x^2 T,$$

$$B_1 = \frac{3q_{xx}}{4h} - \frac{9qh_{xx}}{8h^2} + \frac{9q_x h_x}{4h^2} - \frac{9qh_x^2}{4h^3} - \frac{3}{16} h_{xx} T + \frac{3}{8} h_x T_x - \frac{15}{8} \frac{h_x^2 T}{h}.$$

Интегрируя (2) по поперечной координате, получим давление, а константу интегрирования найдем из граничного условия (5). Затем, подставляя найденное давление в (1) и интегрируя его и уравнение неразрывности (3) по слою, получим

$$h_t + q_x = 0, \quad (9)$$

$$q_t + \frac{6}{5} \left(\frac{q^2}{h} \right)_x + \frac{1}{20} (qhT)_x + \frac{1}{120} (h^3 T^2)_x + hP_x = \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left(\frac{\text{Re}}{\text{Fr}} h - \frac{3q}{h^2} + \frac{3}{2} T \right) + \text{We} \varepsilon^2 h h_{xxx} + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \left(5q_{xx} - \frac{27}{4} \frac{q h_{xx}}{h} - \frac{9}{2} \frac{q_x h_x}{h} + \frac{9}{2} \frac{q h_x^2}{h^2} + \frac{3}{8} T h h_{xx} - \frac{11}{4} T h_x^2 + \frac{5}{4} h h_x T_x + \frac{1}{4} h^2 T_{xx} \right) + \varepsilon^2 Q. \quad (10)$$

Приведем значение Q для свободно стекающей пленки жидкости, поскольку в случае с газовым потоком полученное выражение чрезвычайно громоздко:

$$Q = \frac{11}{40} q_{xxx} h^2 + \frac{1}{10} q_{tx} h_x h - \frac{9}{20} q_t h_{xx} h - \frac{9}{20} q_t h_x^2 - \frac{153}{280} q^2 h_{xxx} + \frac{54}{35} \frac{q^2 h_x h_{xx}}{h} - \frac{27}{35} \frac{q^2 h_x^3}{h^2} + \frac{219}{280} h q q_{xxx} - \frac{19}{35} q q_{xx} h_x - \frac{677}{280} q h_{xx} q_x + \frac{54}{35} \frac{q (h_x)^2 q_x}{h} + \frac{257}{280} q_{xx} h q_x - \frac{44}{35} q_x^2 h_x - 3 \text{We} \varepsilon^2 h h_x \left(h_{xx}^2 + \frac{1}{2} h_x h_{xxx} \right).$$

В случае стационарного течения ($h=1$, $q=1$) выразим число Фруда, исключая один из параметров уравнения:

$$\frac{\text{Re}}{\text{Fr}} = 3 - \frac{3}{2} T.$$

Для исключения еще одного параметра выберем масштаб по продольной координате таким, чтобы нейтральное волновое число в длинноволновом приближении (уравнение Орра – Зоммерфельда при малых числах Рейнольдса) было равно единице $k_n = 1$ [11], тогда

$$\text{We} \varepsilon^2 = \frac{18}{5}, \quad \text{We} = \frac{3^{1/3} \text{Fi}^{1/3}}{\text{Re}^{5/3}}, \quad \text{Fi} = \frac{\sigma^3}{\rho^3 g \nu^4}.$$

Таким образом в задаче для свободно стекающей пленки жидкости ($T=0$, $P=0$) остается только один параметр (εRe) при учете членов первого порядка малости и два параметра (ε , Re) при учете членов второго порядка малости.

Рассматривать члены порядка ε / Re в (10) и исключать из рассмотрения члены порядка ε^2 справедливо в случае, когда $1 > \varepsilon > \varepsilon / \text{Re} > \varepsilon^2$, т. е. это соответствует небольшим числам Рейнольдса $\text{Re} < 1/\varepsilon$ (для случая воды это означает $\text{Re} < 7$). Стоит заметить, что в слагаемых порядка ε^2 имеются нелинейные члены, содержащие производную по времени, что не позволяет провести моделирование эволюции стандартными методами.

Результаты

Для случая свободно стекающей пленки жидкости ($T=0$, $P=0$) проведен линейный анализ устойчивости пленки жидкости по отношению к возмущениям малой амплитуды. Для этого система (9), (10) линеаризовывалась относительно малых амплитуд h_1 , q_1 :

$$h = 1 + h_1 e^{ik(x-ct)}, \quad q = 1 + q_1 e^{ik(x-ct)}.$$

В итоге имеем

$$ch_1 - q_1 = 0, \quad (11)$$

$$ik \left(cq_1 + \frac{6}{5} h_1 - \frac{12}{5} q_1 - 3k^2 h_1 \right) + \frac{3}{\varepsilon \text{Re}} (3h_1 - q_1) + \frac{\varepsilon k^2}{\text{Re}} \left(\frac{27}{4} h_1 - 5q_1 \right) + \varepsilon Q_1 = 0, \quad (12)$$

$$Q_1 = ik^3 \left(\frac{11}{40} cq_1 + \frac{153}{280} h_1 - \frac{219}{280} q_1 \right).$$

Полагая $h_1 = 1$, а $c = c_r + ic_{im}$ и решая уравнения (11), (12) методом Ньютона, получим зависимости $c_r(k)$ и $c_{im}(k)$.

Из рис. 1 видно, что при малых числах Рейнольдса модель Шкадова дает существенное отличие в значениях как фазовой скорости (c_r) так и инкремента роста линейных волн ($\omega_{im} = c_{im}k$) от точного решения уравнения Orr – Зоммерфельда [12]. Учет членов следующих порядков малости обеспечивает лучшее соответствие фазовой скорости для длинных волн, в коротковолновой же области также наблюдается расхождение результатов. Повышение числа Рейнольдса приводит к увеличению разницы между точным решением задачи об устойчивости течения и результатами, полученными по интегральным моделям.

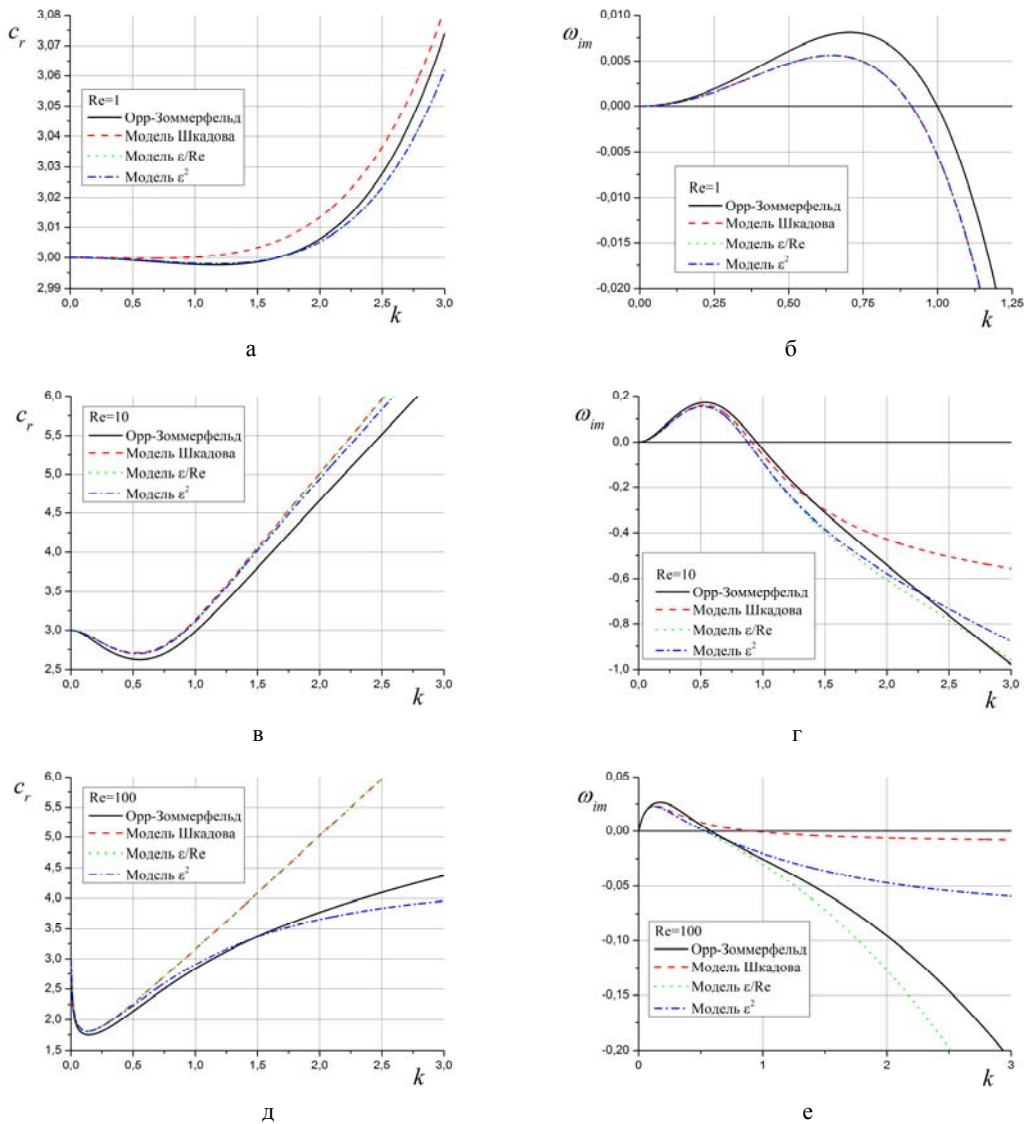


Рис. 1. Значения действительной компоненты фазовой скорости и инкремента роста линейных волн

Fig. 1. Real phase velocity component and linear wave growth increment

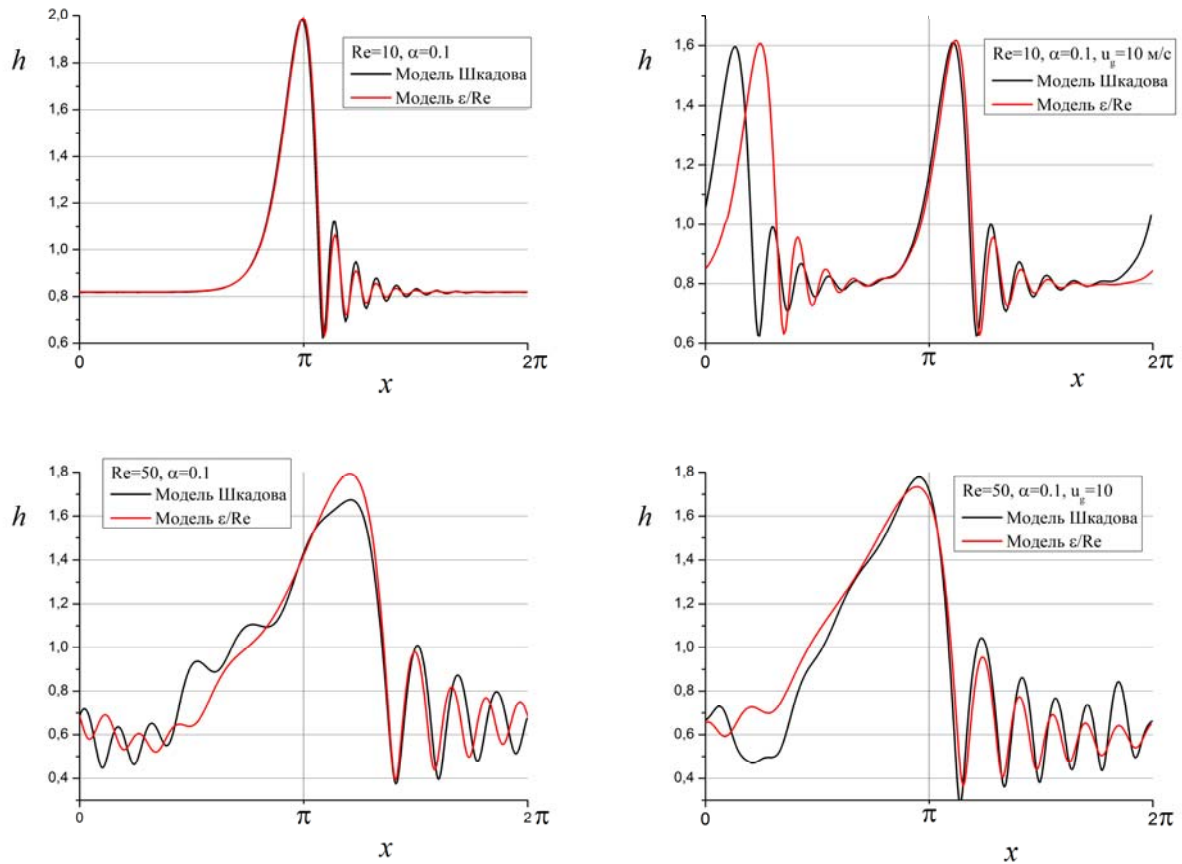


Рис. 2. Сравнение профилей стационарно бегущих волн, полученных по различным моделям при свободном стекании (слева) и в случае взаимодействия с газовым потоком (справа). α – волновое число первой гармоники. Диаметр канала 10 мм

Fig. 2. Comparison of profiles of stationary-traveling waves obtained by different models for free falling (left) and gas sheared (right) film. α – wave number of the first harmonic. Diameter of the channel is 10 mm

Как было замечено выше, при $Re > 7$ члены порядка ε/Re становятся малыми по отношению к членам порядка ε^2 . В то же время из рис. 2 видно, что учет членов порядка ε/Re приводит к большей устойчивости по отношению к коротковолновым возмущениям по сравнению с оригинальной моделью Шкадова в области умеренных чисел Рейнольдса, а дополнительное добавление членов порядка ε^2 , т. е. конвективной части уравнения (2), как и следовало ожидать, «дестабилизирует» течение. Поскольку учет членов следующих порядков малости не приводит к уменьшению разницы между точными решениями и интегральными моделями, можно заявить, что это связано с тем, что в случае волнового течения пленки жидкости наблюдается значительное отличие профиля скорости от полупараболического (6) даже при небольших числах Рейнольдса [13; 14]. В [15] показано, что форма профиля скорости оказывает принципиальное влияние на устойчивость течения. Выполнено моделирование эволюции возмущений как для свободно стекающей пленки жидкости, так и для взаимодействующей с газовым потоком. Для проведения моделирования искомые функции раскладываются в ряд Фурье по продольной координате. В результате получается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Ограничиваясь боль-

шим, но конечным набором гармоник и полагая, что старшие гармоники равны нулю, получаем ее конечномерный аналог, который решался методом Рунге-Кутты 4-го порядка. На рис. 2 представлены профили стационарно бегущих волн, полученные в результате моделирования эволюции. Видно, что при числе Рейнольдса $Re = 10$ не наблюдается заметных различий между моделями. При увеличении числа Рейнольдса отличия между моделями становятся более заметными, а влияние газового потока приводит к уменьшению длины формируемых возмущений.

Список литературы / References

1. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // ЖЭТФ. 1948. Т. 18, № 1. С. 3–28.
Kapitza P. L. Wave flow of thin viscous liquid film. *Zh. Exper. Teor. Fiz.*, 1948, vol. 18, p. 3–28. (in Russ.)
2. Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. Волновое течение пленок жидкости. М.: Наука, 1992.
Alekseenko S. V., Nakoriakov V. E., Pokusaev B. G., Fukano T. Wave flow of liquid films. New York, Begell House, 1994, 313 p.
3. Benney D. J. Long waves on liquid films. *Journal of Mathematics and Physics*, 1966, vol. 45, no. 1–4, p. 150–155.
4. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. Т. 1.
Shkadov V. Ya. Wave flow regimes of a thin layer of viscous fluid subject to gravity. *Fluid Dynamics*, 1967, vol. 2, no. 1, p. 29–34.
5. Ruyer-Quil C., Manneville P. Improved modeling of flows down inclined planes. *The European Physical Journal. B. Condensed Matter and Complex Systems*, 2000, vol. 15, no. 2, p. 357–369.
6. Tseluiko D., Kalliadasis S. Nonlinear waves in counter-current gas – liquid film flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 2011, vol. 673, p. 19–59.
7. Демехин Е. А. Нелинейные волны в пленке жидкости, увлекаемой турбулентным газовым потоком // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 2. С. 37–42.
Demekhin E. A. Nonlinear waves in a liquid film entrained by a turbulent gas stream. *Fluid Dynamics*, 1981, vol. 16, no. 2, p. 188–193.
8. Вожаков И. С., Архипов Д. Г., Цвелодуб О. Ю. Моделирование нелинейных волн на поверхности тонкой пленки жидкости, увлекаемой турбулентным потоком газа // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22, № 2. С. 201–212.
Vozhakov I. S., Arkhipov D. G., Tselodub O. Yu. Simulating nonlinear waves on the surface of thin liquid film entrained by turbulent gas flow. *Thermophysics and Aeromechanics*, 2015, vol. 22, no. 2, p. 191–202.
9. Vozhakov I. S., Cherdantsev A. V., Arkhipov D. G. Modelling secondary instability of co-current a thin gas-sheared film. *Fluid Dynamics Research*, 2016, vol. 48, no. 6, p. 061420.
10. Шкадов В. Я. Двухпараметрическая модель волновых режимов течения пленок вязкой жидкости // Вестник Моск. ун-та. Серия 1: Математика. Механика. 2013. № 4. С. 24–31.
Shkadov V. Ya. A two-parameter model of wave regimes for viscous liquid film flows. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2013, vol. 68, no. 4, p. 86–93.

11. **Архипов Д. Г., Качулин Д. И., Цвелодуб О. Ю.** Сравнение моделей волновых режимов стекания пленок жидкости в линейном приближении // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53, № 5. С. 19–29.
Arkhipov D. G., Kachulin D. I., Tsvlodub O. Yu. Comparison of models for wave regimes of liquid film downflow in the linear approximation. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2012, vol. 53, no. 5, p. 647–656.
12. **Yih C. S.** Stability of liquid flow down an inclined plane. *The Physics of Fluids*, 1963, vol. 6, no. 3, p. 321–334.
13. **Arkhipov D., Vozhakov I., Markovich D., Tsvlodub O.** Symmetry in the problem of wave modes of thin viscous liquid layer flow. *European Journal of Mechanics. B. Fluids*, 2016, vol. 59, p. 52–56.
14. **Scheid B., Ruyer-Quil C., Manneville P.** Wave patterns in film flows: modelling and three-dimensional waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 2006, vol. 562, p. 183–222.
15. **Гольдштик М. А., Штерн В. Н.** Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1977.
Goldshhtik M. A., Shtern V. N. Hydrodynamic stability and turbulence. Novosibirsk, Nauka, 1977. (in Russ.)

Материал поступил в редколлегию
Received
04.02.2019

Сведения об авторе / Information about the Author

Вожаков Иван Сергеевич, кандидат физико-математических наук, Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН (пр. Академика Лаврентьева, 1, Новосибирск, 630090, Россия); Новосибирский государственный университет (ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия)

Ivan S. Vozhakov, Candidate of Science (Physics and Mathematics), Institute of Thermophysics SB RAS (1 Academician Lavrentiev Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation); Novosibirsk State University (2 Pirogov Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation)

vozhakov@gmail.com