

УДК 532.5.013.4  
DOI 10.25205/2541-9447-2020-15-1-62-79

## Анализ устойчивости прямооточных струй с градиентом плотности

С. С. Абдуракипов, В. М. Дулин

*Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН  
Новосибирск, Россия*

### *Аннотация*

С использованием спектрального метода коллокаций Чебышева проведен анализ временной и пространственной устойчивости прямооточной круглой струи с поперечным градиентом плотности. Проанализированы характерные частоты, волновые числа и собственные моды наиболее неустойчивых возмущений струи. Сделан вывод, что учет влияния плотности в большинстве случаев приводит к уменьшению инкрементов роста всех неустойчивых мод и уменьшению их фазовых скоростей. Показано, что соотношения между фазовой и группой скоростями, полученными из временного и пространственного анализа устойчивости прямооточной струи, оказываются справедливыми лишь при больших толщинах сдвигового слоя.

### *Ключевые слова*

гидродинамическая устойчивость, круглые струи, метод коллокаций

### *Благодарности*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 19-79-30075).

### *Для цитирования*

Абдуракипов С. С., Дулин В. М. Анализ устойчивости прямооточных струй с градиентом плотности // Сибирский физический журнал. 2020. Т. 15, № 1. С. 62–79. DOI 10.25205/2541-9447-2020-15-1-62-79

## Stability Analysis of Round Jets with Density Gradient

S. S. Abdurakipov, V. M. Dulin

*Institute of Thermal Physics SB RAS  
Novosibirsk, Russian Federation*

### *Abstract*

Using Chebyshev spectral collocation method, the temporal and spatial stability analysis of a round jet with tangential velocity profile and transverse density gradient is carried out. The characteristic frequencies, wave numbers and eigen modes of the most unstable normal perturbations are analyzed. It is concluded that considering transverse density gradient in most cases leads to decrease in the growth rates and phase velocities of all unstable modes. It is shown that the relations between the phase and group velocities obtained from the temporal and spatial stability analysis of round jet turn out to be valid only for large shear layer thicknesses.

### *Keywords*

stability analysis, round jet, spectral collocation method

### *Acknowledgements*

This work was financially supported by the Russian Science Foundation (grant No. 19-79-30075).

### *For citation*

Abdurakipov S. S., Dulin V. M. Stability Analysis of Round Jets with Density Gradient. *Siberian Journal of Physics*, 2020, vol. 15, no. 1, p. 62–79. (in Russ.) DOI 10.25205/2541-9447-2020-15-1-62-79

© С. С. Абдуракипов, В. М. Дулин, 2020

## Введение

Прямоточные осесимметричные турбулентные струи всегда интересовали исследователей по причине развития в них неустойчивостей в форме крупномасштабных вихревых структур. Общеизвестно, что профили средней скорости в прямооточных струях перегибные, что приводит к формированию и дальнейшему росту неустойчивости Кельвина – Гельмгольца сдвигового слоя струи. Линейный анализ устойчивости, заключающийся в изучении эволюции нормальных мод возмущений основного потока, сыграл важную роль для понимания неустойчивостей свободных струй [1–5]. Среди различных видов потоков круглая струя представляет собой важный фундаментальный объект для изучения, так как неустойчивости, возникающие в слое смещения, порождают множество других мод, которые могут существовать одновременно, по крайней мере на начальном участке струи. В литературе описывают три основных вида неустойчивости в ближней области прямооточной струи [6].

Линейный анализ устойчивости для пространственно развивающихся слоев смещения [1] и для круглых струй [2] с различными отношениями радиуса струи к толщине потери импульса показывает, что на выходе из сопла наиболее неустойчивыми являются высокочастотные возмущения сдвигового слоя. При начальном ламинарном пограничном слое на срезе сопла ( $z/d < 1$ ) в результате механизма Кельвина – Гельмгольца сдвиговое течение становится неустойчивым к малым возмущениям, что приводит к экспоненциальному росту двумерных волн вниз по потоку. Физическим результатом проявления роста неустойчивости Кельвина – Гельмгольца является закручивание волн в вихри и формирование когерентных вихревых структур. В экспериментальной работе [7] Becker и Massaro исследовали струю с ударным профилем скорости (англ. top-hat) на выходе из сопла при разных значениях числа Рейнольдса и толщины потери импульса. Они сделали подробную визуализацию для количественной оценки длины волны осесимметричной («варикозной») моды неустойчивости ( $m = 0$ ), ответственной за образование вихревых колец, при внешнем воздействии на поток. В работе [8] Crow и Champagne показали, что вблизи кромки сопла в тонком сдвиговом слое развивается невязкая неустойчивость Кельвина – Гельмгольца, которая увеличивается в масштабе вместе с утолщением сдвигового слоя при удалении от сопла. В этой области (до  $r/d < 1$ ) характеристики неустойчивостей хорошо описываются линейной теорией [3, 5]. Далее на начальном участке струи в области  $z/d = 1–6$  проявляется второй вид неустойчивости, связанный с насыщением амплитуды и попарным объединением кольцевых вихрей из-за резонанса возмущений с суб- и супергармониками. В данной области преобладают низкочастотные пульсации, генерируемые наиболее крупными вихрями. В конце начального участка струи характерное число Струхала, определенное по диаметру сопла, составляет  $St = fd/U_0 = 0,3–0,5$ . Разброс в значениях числа  $St$  обусловлен влиянием начальных условий на срезе сопла [9]. Третий вид неустойчивости связан с возникновением азимутальной неоднородности кольцевых вихрей, которая в конечном счете приводит к развалу кольцевых вихрей на «клубки» [10]. Данный тип неустойчивости ответственен за формирование продольных структур, вытянутых по потоку. Динамика продольных структур играет большую роль в процессе смещения в дальнем поле струи [11–14].

Целью данной работы являлось:

- 1) временной и пространственный анализ устойчивости ламинарной струи с тангенциальным профилем скорости и градиентом плотности в поперечном направлении;
- 2) анализ влияния поперечного градиента плотности на характеристики азимутальных мод;
- 3) сравнение результатов пространственного и временного анализа устойчивости.

## Уравнения и граничные условия теории устойчивости

Система уравнений Навье – Стокса, описывающая движение вязкой несжимаемой жидкости в отсутствие внешних сил, в цилиндрической системе координат  $u = (u, v, w)$  и  $x = (r, \theta, z)$  преобразуется в следующую систему уравнений:

уравнение неразрывности:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

уравнение на радиальную компоненту:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right),$$

уравнение на азимутальную компоненту:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \nabla^2 v - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right),$$

уравнение на осевую компоненту:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w_z,$$

где оператор Лапласа:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Запишем мгновенные переменные потока в виде суммы средних и малых пульсационных величин:

$$u = U + \tilde{u}, \quad v = V + \tilde{v}, \quad w = W + \tilde{w}, \quad p = P + \tilde{p}.$$

Линеаризуем систему уравнений относительно малых возмущений скорости и давления ( $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}$ ). Предположим, что выполняется условие квазипараллельного приближения, и малые возмущения имеют вид нормальных мод:

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}) = \text{Re} \left\{ [iF(r), G(r), H(r), P(r)] \exp(i(kz + m\theta - \omega t)) \right\}. \quad (1)$$

Здесь  $F, G, H, P$  – комплексные амплитуды возмущений,  $k$  – комплексное аксиальное волновое число,  $m$  – вещественное азимутальное волновое число, а  $\theta$  – комплексная окружная частота. После всех преобразований итоговая система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) 6-го порядка на амплитуды возмущений:

уравнение неразрывности:

$$F' + \frac{F}{r} + \frac{mG}{r} + kH = 0, \quad (2)$$

уравнение на радиальную компоненту:

$$\begin{aligned} -\frac{iF''}{\text{Re}} + i \left[ U - \frac{1}{\text{Re}r} \right] F' + \left[ \omega + i \frac{dU}{dr} - \frac{mV}{r} - kW + \frac{i}{\text{Re}} \left( \frac{m^2 + 1}{r^2} + k^2 \right) \right] F + \\ + \left[ \frac{i2m}{\text{Re}r^2} - \frac{2V}{r} \right] G + P' = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

уравнение на азимутальную компоненту:

$$\begin{aligned} -\frac{G''}{\text{Re}} + \left[ U - \frac{1}{\text{Re}r} \right] G' + \left[ -i\omega + \frac{imV}{r} + ikW + \frac{U}{r} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{m^2 + 1}{r^2} + k^2 \right) \right] G + \\ + \left[ i \frac{dV}{dr} + \frac{2m}{\text{Re}r^2} + \frac{iV}{r} \right] F + \frac{imP}{r} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

уравнение на осевую компоненту:

$$-\frac{H''}{\text{Re}} + \left[ U - \frac{1}{\text{Re}r} \right] H' + \left[ -i\omega + \frac{imV}{r} + ikW + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) \right] H + i \frac{dW}{dr} F + ikP = 0. \quad (5)$$

Здесь система обыкновенных дифференциальных уравнений представлена в безразмерном виде. Число Рейнольдса построено по диаметру сопла  $d$  и начальной скорости  $U_0$  на выходе из сопла. Штрихи над переменными обозначают дифференцирование по  $r$ .

Для свободных струйных течений система уравнений должна удовлетворять граничным условиям [15]:

$$F(\infty) = G(\infty) = H(\infty) = P(\infty) = 0 \quad (r \rightarrow \infty), \quad (6)$$

$$F(0) = G(0) = H(0) = P(0) = 0 \quad (r = 0, |m| > 1), \quad (7)$$

$$H(0) = P(0) = 0, \quad F(0) + mG(0) = 0, \quad 2F'(0) + mG'(0) = 0 \quad (r = 0, |m| = 1), \quad (8)$$

$$F(0) = G(0) = 0, \quad H'(0) = P'(0) = 0 \quad (r = 0, |m| = 0). \quad (9)$$

Для заданного профиля средней скорости ( $U$ ,  $V$ ,  $W$ ) система ОДУ уравнений (2)–(5) и набор граничных условий (6)–(9) образуют задачу на собственные значения. При этом ненулевое решение ( $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $P$ ) существует только тогда, когда комплексная пара ( $k$ ,  $\omega$ ) удовлетворяет дисперсионному закону  $D[k, \omega, m, \text{Re}, C] = 0$ , где символ  $C$  отвечает за контролируемые параметры, связанные с профилем средней скорости потока. В зависимости от условий решения задачи на собственные значения различают три типа анализа устойчивости. Во временном анализе устойчивости задача решается для вещественного волнового числа  $k$  и комплексной частоты  $\omega$ , в пространственном анализе устойчивости, наоборот, полагают  $\omega$  вещественной, а  $k$  комплексным, и в самом общем случае пространственно-временного анализа устойчивости и  $k$ , и  $\omega$  являются комплексными. Первый подход (временной анализ устойчивости) предполагает, что при постоянной длине волны возмущения, существуют как затухающие (если  $\omega_i < 0$ ), так и растущие со временем моды (если  $\omega_i > 0$ ). Здесь индекс  $i$  обозначает мнимую, а  $r$  – действительную часть. Временной анализ устойчивости применяется для исследования устойчивости ограниченных течений, где нет свободного потока, например, течение Тейлора – Куэтта между вращающимися цилиндрами [16]. Второй подход (пространственный анализ устойчивости) предполагает, что при постоянной частоте в эволюции возмущений существуют затухающие (если  $-k_i < 0$ ) и растущие (если  $-k_i > 0$ ) по пространству моды. Он применим для свободных сдвиговых течений, которые преимущественно конвективно неустойчивы [1; 17; 18]. Третий подход (пространственно-временной анализ устойчивости), в котором возмущения могут расти как во времени, так и по пространству, используется для потоков, где наблюдаются автоколебания с характерной частотой, связанные с областями абсолютной неустойчивости, например, в спутных струях, неизотермических струях [19], сильно закрученных струях с распадом и прецессией вихревого ядра [20]. Для определения абсолютной неустойчивости находят все точки с нулевой комплексной групповой скоростью  $d\omega(k_0)/dk = 0$  с  $\omega_0 = \omega(k_0)$ . Такие точки  $(k_0, \omega_0)$  называются седловыми. Если любая из этих точек имеет положительный временной инкремент роста, то течение будет абсолютно неустойчивым, а при отрицательных значениях инкремента – конвективно неустойчивым либо устойчивым. Физически это соответствует ситуации, когда область самоподдерживающихся возмущений разрастается в обоих направлениях.

### Описание численного метода

Основная идея решения системы ОДУ (2)–(5) с граничными условиями (6)–(9) состоит в том, чтобы, применив стандартную процедуру дискретизации, свести ее к системе линей-

ных алгебраических уравнений путем разложения по базису функций, а затем вычислить неизвестные коэффициенты разложения, минимизирующие остаточную функцию [21]. Существуют различные методы, позволяющие решить эту задачу. В данной работе в качестве основного был применен спектральный метод коллокаций Чебышева [15], использующий разложение по базису из полиномов Чебышева, обладающих спектральными свойствами [21; 22]. В методе коллокаций Чебышева невязка решения минимизируется локально в каждой точке расчетной сетки [21]. В качестве вспомогательного использовался хорошо проверенный метод пристрелки [23].

Полиномы Чебышева, определенные в интервале  $[-1, 1]$  и формирующие базис разложения при дискретизации системы ОДУ и граничных условий имеют вид

$$T_n(\xi) = \cos[n \cos^{-1} \xi], \quad -1 \leq \xi \leq 1.$$

Расчетная сетка формируется из точек коллокации, которые являются точками экстремума последнего в усеченной серии  $N$ -го полинома Чебышева:

$$\xi_j = \cos \frac{\pi j}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Поскольку физическая область в данной задаче  $[0, r_{max}]$  не совпадает с областью определения полиномов Чебышева  $[-1, 1]$ , было использовано преобразование переменных. В литературе [18; 20; 24] при исследовании устойчивости струйных течений часто применяют преобразование, позволяющее сгущать точки в ядре струи, где присутствуют значительные градиенты скорости:

$$r(\xi_j) = c_1 \frac{1 - \xi_j}{c_2 + \xi_j}, \quad \text{где } c_2 = 1 + \frac{2c_1}{r_{max}}.$$

Представим искомые амплитуды  $f(\xi) = [F, G, H, P]$  в виде разложения по базису из  $N$  полиномов Чебышева:

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(\xi).$$

Тогда производные будут иметь следующий вид:

$$\left( \frac{df}{d\xi} \right)_j = \sum_{n=0}^N A_{jn} f_n, \quad \left( \frac{d^2 f}{d\xi^2} \right)_j = \sum_{n=0}^N B_{jn} f_n,$$

где элементы матриц коэффициентов первой и второй производных задаются формулами

$$A_{jn} = \frac{\bar{C}_j (-1)^{j+n}}{C_n \xi_j + \xi_n}, \quad (j \neq n); \quad A_{jj} = \frac{-\xi_j}{2(1 - \xi_j^2)}; \quad A_{00} = \frac{2N^2 + 1}{6} = -A_{NN}; \quad B_{jn} = A_{jn} A_{jn};$$

$$\bar{C}_0 = \bar{C}_N = 2, \quad C_j = 1, \quad (1 \leq j \leq N - 1).$$

После подстановки вышеуказанных разложений и приведения к компактной форме система ОДУ (2)–(5) записывается в форме системы линейных алгебраических уравнений: уравнение неразрывности:

$$\left( \frac{d\xi}{dr} \right)_j \sum_{n=0}^N A_{jn} F_n + \frac{1}{r(\xi_j)} F_j + \frac{m}{r(\xi_j)} G_j + k H_j = 0,$$

уравнение на радиальную компоненту:

$$\left( \frac{d^2 \xi}{dr^2} \right)_j \sum_{n=0}^N B_{jn} F_n + \left[ \frac{1}{r(\xi_j)} - \text{Re} U_j \right] \left( \frac{d\xi}{dr} \right)_j \sum_{n=0}^N A_{jn} F_n +$$

$$+ \left[ i \text{Re} \omega - \text{Re} \left( \frac{dU}{dr(\xi_j)} \right)_j - \frac{i \text{Re} m V_j}{r(\xi_j)} - \frac{m^2 + 1}{r^2(\xi_j)} \right] F_j -$$

$$-\left[ \frac{2m}{r^2(\xi_j)} + \frac{i2\text{Re}V_j}{r(\xi_j)} \right] G_j + i\text{Re} \left( \frac{d\xi}{dr} \right)_j \sum_{n=0}^N A_{jn} P_n - ik \text{Re} W_j F_j - k^2 F_j = 0,$$

уравнение на азимутальную компоненту:

$$-\left[ \text{Re} \left( \frac{dV}{dr(\xi_j)} \right)_j + \frac{2m}{r^2(\xi_j)} + \frac{i2\text{Re}V_j}{r(\xi_j)} \right] F_j + \left( \frac{d^2\xi}{dr^2} \right)_j \sum_{n=0}^N B_{jn} G_n + \left[ \frac{1}{r(\xi_j)} - \text{Re}U_j \right] \left( \frac{d\xi}{dr} \right)_j \sum_{n=0}^N A_{jn} G_n + \\ + \left[ i\text{Re}\omega - \frac{i\text{Re}mV_j}{r(\xi_j)} - \frac{\text{Re}U_j}{r(\xi_j)} - \frac{m^2+1}{r^2(\xi_j)} \right] G_j - \frac{i\text{Re}m}{r(\xi_j)} P_j - ik \text{Re} W_j G_j - k^2 G_j = 0,$$

уравнение на осевую компоненту:

$$i\text{Re} \left( \frac{dW}{dr(\xi_j)} \right)_j + \left( \frac{d^2\xi}{dr^2} \right)_j \sum_{n=0}^N B_{jn} H_n + \left[ \frac{1}{r(\xi_j)} - \text{Re}U_j \right] \left( \frac{d\xi}{dr} \right)_j \sum_{n=0}^N A_{jn} H_n + \\ + \left[ i\text{Re}\omega - \frac{i\text{Re}mV_j}{r(\xi_j)} - \frac{m^2}{r^2(\xi_j)} \right] H_j - ik \text{Re} W_j H_j - ik \text{Re} P_j - k^2 H_j = 0.$$

Для временного анализа устойчивости вышеуказанные алгебраические уравнения с граничными условиями могут быть переписаны в виде обобщенной задачи на собственные значения в матричном виде:

$$DX = \omega EX, \text{ где } X = [F, G, H, P]^T.$$

Для пространственного анализа устойчивости уравнения являются квадратичными по  $k$ , поэтому для линеаризации полученных уравнений необходимо ввести дополнительные переменные вида

$$\bar{F} = kF, \quad \bar{G} = kG, \quad \bar{H} = kH.$$

После этой процедуры задачу на собственные значения для пространственного анализа устойчивости можно записать в виде

$$DX = kEX, \text{ где } X = [F, G, H, P, \bar{F}, \bar{G}, \bar{H}]^T.$$

Здесь  $D$  и  $E$  – матрицы коэффициентов размерности  $(4 \times (N+1))^2$  (для временной задачи) и  $(7 \times (N+1))^2$  (для пространственной задачи устойчивости), полученные после дискретизации системы ОДУ;  $\omega$  и  $k$  – собственные значения, несущие информацию об устойчивости решений;  $X$  – вектор собственных функций задачи устойчивости. При формировании матриц  $D$  и  $E$  строки, соответствующие алгебраическим уравнениям в граничных точках, были заменены на граничные условия (6)–(9), записанные в дискретном виде по аналогии с основными уравнениями. В зависимости от временной или пространственной задачи, 8 или 14 последних строк матрицы  $D$  и  $E$  содержали граничные условия. Обобщенная задача на собственные значения решалась с использованием QZ алгоритма. Более подробную информацию о формировании матриц в задаче на собственные значения и о процедуре ее решения можно найти в работах [15; 25].

После решения обобщенной задачи на собственные значения необходимо отсеять нефизические решения, вызванные дискретизацией системы уравнений. Для этого была использована процедура, основанная на последовательном применении трех критериев отсева мод, аналогично работе [20]. Первый критерий требует затухания решений на бесконечности:

$$\frac{\sum_{j=10}^{N/10} |F(r_j)|^2}{\sum_{j=10}^N |F(r_j)|^2} < \varepsilon_1.$$

Второй и третий критерий используют свойство быстрой сходимости и нечувствительности физических решений к изменению числа полиномов Чебышева:

$$\min(\omega - \omega') < \varepsilon_2 \text{ или } \min(k - k') < \varepsilon_2.$$

$$|1 - (X, X')| < \varepsilon_3. \quad (10)$$

Здесь штрих сверху и его отсутствие обозначают собственные числа и собственные функции, вычисленные при разных наборах  $N'$  и  $N$  полиномов Чебышева. В записи третьего критерия (10) круглые скобки соответствуют скалярному произведению собственных функций.

Таким образом, спектральный метод коллокаций Чебышева позволяет реализовать простой матричный алгоритм, например, в среде MATLAB, для эффективного решения целого класса задач гидродинамической устойчивости.

### Описание средних профилей

В расчетах использовался тангенциальный профиль осевой компоненты скорости вида

$$W(r) = \frac{1}{2} \left( 1 + \tanh \left[ \frac{1}{4\theta_{sl}} \left( \frac{1}{r} - r \right) \right] \right),$$

подобный используемому в ранних работах [1; 26], с хорошей точностью приближающий экспериментальные профили на начальном участке струи. Данный профиль показан на рис. 1, а для трех значений параметра  $\theta_{sl}$ , характеризующего толщину сдвигового слоя (толщину потери импульса). Радиальная координата нормирована на радиус струи  $R$ , а скорость – на максимум осевой скорости на оси струи  $W_{\max}$ :

$$\theta_{sl} = \int_0^{\infty} \frac{W}{W_{\max}} \left( 1 - \frac{W}{W_{\max}} \right) dr.$$

Для учета влияния неоднородной плотности в анализе устойчивости в случае потоков с горением радиальное распределение безразмерной температуры задавалось профилем Крокко – Бузмана [27]:

$$T(r) = s + (1-s)W(r) + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 [1-W(r)]W(r).$$

Здесь  $s = T_{\infty} / T_{cl}$  – отношение температуры на периферии струи к температуре на ее оси;  $Ma = W_{cl} / c_s$  – число Маха, равное отношению скорости потока на оси струи к скорости звука  $c_s$ ;  $\gamma$  – показатель адиабаты.

Профиль безразмерной плотности, определяемый согласно уравнению состояния идеального газа как профиль обратной температуры, показан на рис. 1, б. В данных расчетах влияние стохастических турбулентных пульсаций не учитывалось.

### Результаты

#### Временной анализ устойчивости прямоочной струи

В работе представлены результаты исследования временной устойчивости ламинарной прямоочной струи с тангенциальным профилем скорости, в том числе при вариации плотности в радиальном направлении.



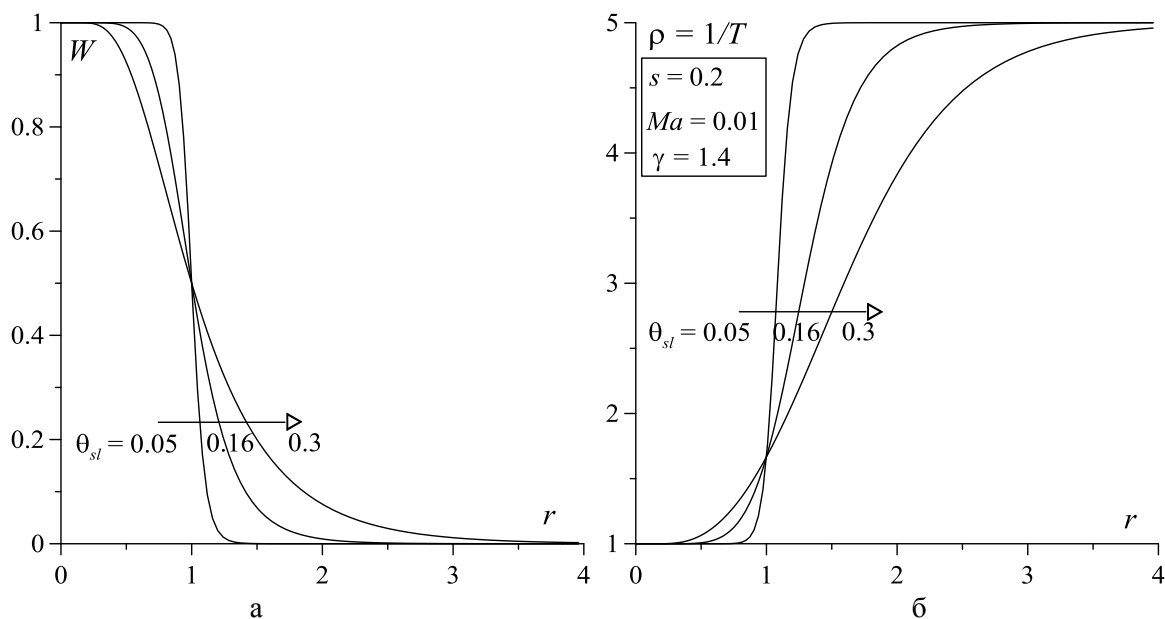


Рис. 1. Профили средней осевой скорости (а) и плотности (б) прямооточной ламинарной струи при различных толщинах сдвигового слоя  $\theta_{sl}$

Fig. 1. Profiles of mean axial velocity (a) and density (b) of a round laminar jet at various shear layer thicknesses  $\theta_{sl}$

На рис. 2 для примера показаны зависимости дисперсионных кривых, а именно инкремента роста  $\omega_{im}(k)$  и частоты возмущений  $\omega_{re}(k)$  как функций вещественного волнового числа  $k$ , для осесимметричной («варикозной») моды  $m = 0$  от числа Рейнольдса при фиксированной толщине сдвигового слоя  $\theta_{sl} = 0,16$ . Можно видеть, во-первых, что кривые неустойчивости занимают конечную область определения по аксиальным волновым числам  $k$  и имеют максимум, во-вторых, рост неустойчивости с увеличением  $Re$ , в-третьих, характерную сходимость дисперсионных кривых с ростом  $Re$  к кривой, соответствующей невязкому пределу  $Re \rightarrow \infty$ . Эта кривая, отмеченная на графиках пунктирной линией, лежит незначительно выше вязкого решения при  $Re = 8000$ . Можно заметить, что фазовые скорости возмущений  $c_{ph} = \omega_{re}/k$ , отвечающих «варикозной» моде  $m = 0$ , практически не зависят от числа  $Re$ . Дисперсионные кривые для старших мод  $m = \pm 1$  и  $m = \pm 2$  имеют схожий вид с показанными для нулевой моды. Однако есть небольшие расхождения при малых волновых числах  $k$ . Аналогичную картину в зависимости от  $Re$  можно наблюдать для мод  $m = \pm 1$  и  $m = \pm 2$  как для инкрементов роста, так и для фазовых скоростей.

При малых толщинах сдвигового слоя  $\theta_{sl} = 0,05$ , характерных для профилей течения у самой кромки сопла, где наблюдаются значительные градиенты осевой компоненты скорости в радиальном направлении, большое число гармоник  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  неустойчивы с примерно равными и большими по величине инкрементами роста (рис. 3). Однако, как можно заметить, «варикозная» мода  $m = 0$  незначительно доминирует над всеми остальными. С ростом толщины сдвигового слоя, происходящим при удалении от кромки сопла, наблюдается резкое уменьшение инкрементов роста всех неустойчивых мод. Инкремент роста уменьшается более чем в 4 раза для мод с волновыми числами  $|m| < 3$ , а остальные вовсе становятся устойчивыми при дальнейшем увеличении  $\theta_{sl}$ . При толщине сдвигового слоя  $\theta_{sl} = 0,16$  «синусоидальная» мода ( $m = \pm 1$ ) (также называемая в литературе «флаговой») незначительно доминирует над «варикозной» ( $m = 0$ ). При дальнейшем увеличении  $\theta_{sl}$  доминирующая роль моды «флаговой» неустойчивости ( $m = \pm 1$ ) возрастает. Полученный результат находится в хорошем соответствии с работами [1; 26] в количественном и качественном от-



ношении. Пространственная форма когерентных возмущений, получаемых из временного анализа устойчивости, представляет собой «стоячие волны» с заранее заданной длиной волны, что малоинформативно, поэтому они не представлены в данной работе.

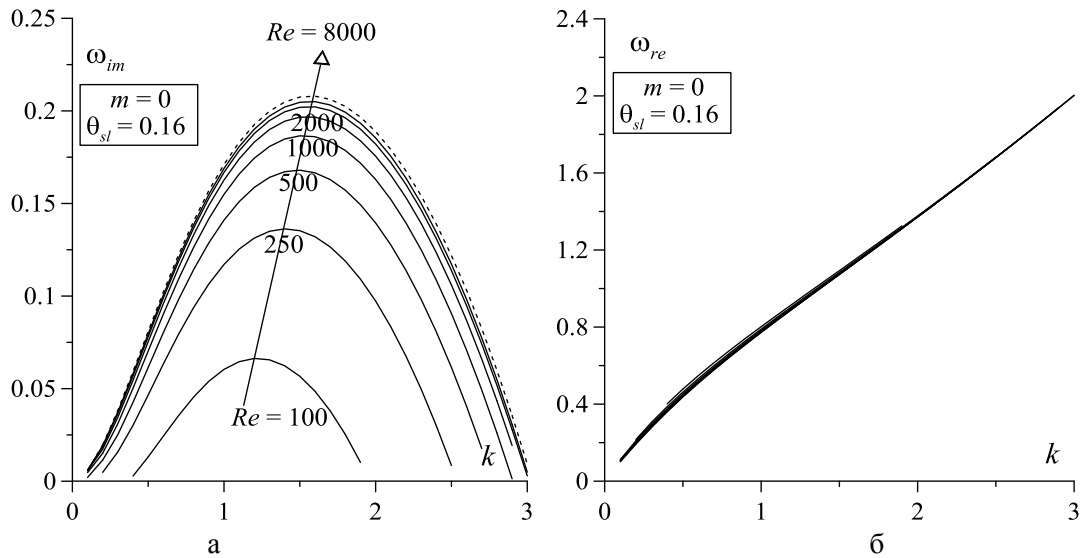


Рис. 2. Зависимость дисперсионных кривых временного анализа устойчивости прямооточной струи ((а) инкременты временного роста и (б) частот возмущений) для осесимметричной моды ( $m = 0$ ) от числа Рейнольдса при толщине сдвигового слоя  $\theta_{sl} = 0,16$ . Штрихованная линия соответствует невязкому пределу

Fig. 2. Dependence of the dispersion curves of the temporal stability analysis of a round jet ((a) increments of temporary growth and (b) perturbation frequencies) for the axisymmetric mode ( $m = 0$ ) on the Reynolds number for the shear layer thickness  $\theta_{sl} = 0,16$ . The dashed line corresponds to the inviscid limit

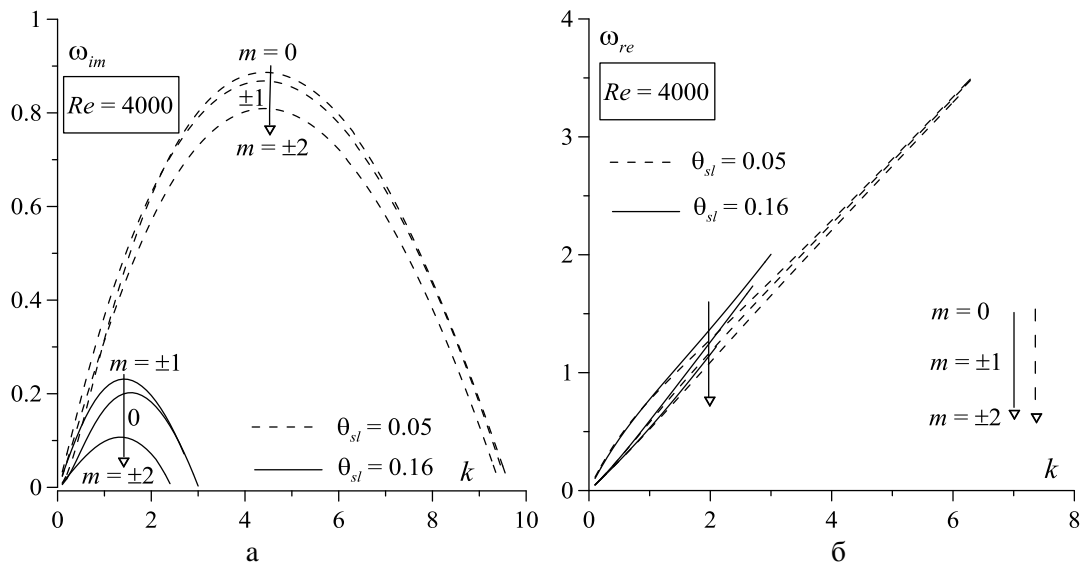


Рис. 3. Дисперсионные кривые временного анализа устойчивости прямооточной струи ((а) инкременты временного роста и (б) частоты возмущений) при фиксированном числе  $Re = 4000$  и разных толщинах сдвигового слоя  $\theta_{sl} = 0,05$  и  $0,16$

Fig. 3. Dispersion curves of temporary stability analysis of a round jet ((a) increments of temporary growth and (b) the frequency of disturbances) for a fixed number  $Re = 4000$  and different shear layer thicknesses  $\theta_{sl} = 0,05$  and  $0,16$

Было проанализировано влияние изменения плотности в радиальном направлении на дисперсионные кривые, полученные из временного анализа устойчивости. При изменении параметров профиля плотности  $s$ ,  $Ma$ ,  $\gamma$  обнаружено, что величина  $s$ , соответствующая отношению температуры на периферии струи к температуре на ее оси, является определяющей, в то время как вариация остальных не приводила к существенным изменениям дисперсионных кривых. Другими словами, результаты анализа устойчивости значительно зависели лишь от разницы значений функции плотности в ядре и на периферии струи, но не от формы соответствующего профиля. В данной работе три значения  $s = 0,2, 0,5, 0,7$  использовались для изменения скачка функции плотности. На рис. 4 в качестве примера показано сравнение дисперсионных кривых без учета (сплошные) и с учетом изменения плотности (пунктирные линии) для  $Re = 4000$  и толщины сдвигового слоя  $\theta_{sl} = 0,16$ . Параметры профиля плотности равнялись  $s = 0,2$ ,  $Ma = 0,01$ ,  $\gamma = 1,4$ . Число Маха было оценено из данных эксперимента при том же числе Рейнольдса, а показатель адиабаты соответствовал значению для воздуха. Из анализа большого числа полученных зависимостей для прямооточной струи был сделан вывод, что учет влияния плотности в большинстве случаев приводит к стабилизации (уменьшению инкрементов роста) всех неустойчивых мод и уменьшению их фазовых скоростей, как показано на рис. 4.

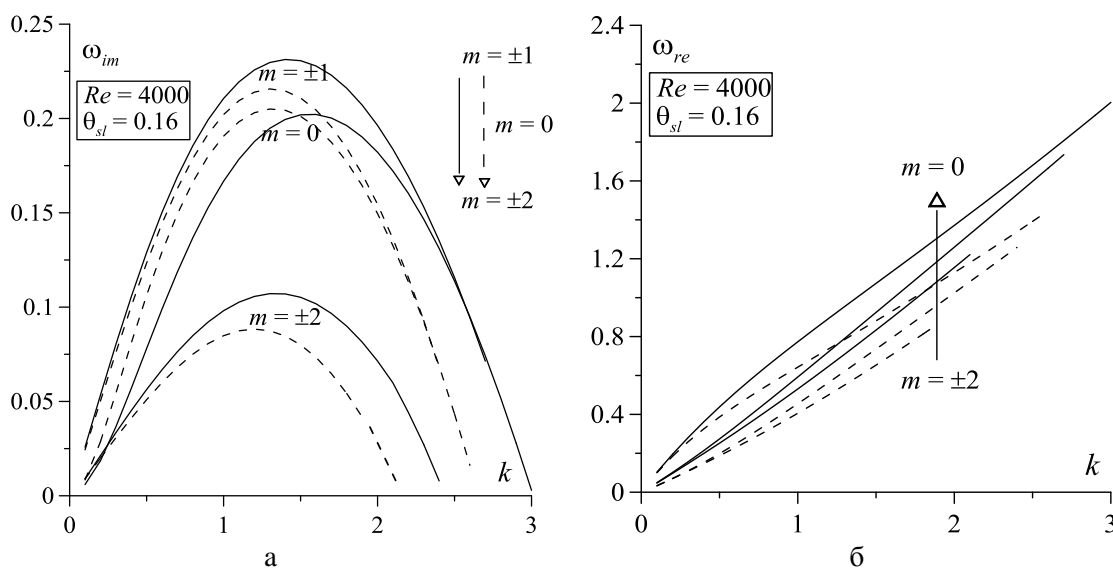


Рис. 4. Сравнение дисперсионных кривых временного анализа устойчивости прямооточной струи ((а) инкрементов временного роста и частот (б) возмущений) без учета (сплошные кривые) и с учетом изменения плотности (пунктирные) для числа  $Re = 4000$  и толщины сдвигового слоя  $\theta_{sl} = 0,16$ . Параметры профиля плотности:  $s = 0,2$ ,  $Ma = 0,01$ ,  $\gamma = 1,4$

Fig. 4. Comparison of the dispersion curves of the temporal stability analysis of a round jet ((a) increments of temporary growth and frequencies (b) of disturbances) without taking into account (solid curves) and taking into account the density gradient (dashed) for the Reynolds number  $Re = 4000$  and the thickness of the shear layer  $\theta_{sl} = 0,16$ . Density profile parameters:  $s = 0,2$ ,  $Ma = 0,01$ ,  $\gamma = 1,4$

### Пространственный анализ устойчивости прямооточной струи

В работе рассмотрены результаты исследования пространственной устойчивости ламинарной прямооточной струи с тангенциальным профилем скорости, в том числе при вариации плотности в радиальном направлении.

На рис. 5 показана зависимость дисперсионных кривых  $-k_{im}(\omega)$  и  $k_{re}(\omega)$  пространственного анализа устойчивости для «варикозной» моды  $m = 0$  от числа Рейнольдса при толщине сдви-

гового слоя  $\theta_{sl} = 0,16$ . Как и для временного анализа устойчивости, наблюдается рост уже пространственной неустойчивости при увеличении  $Re$  и сходимость к невязкому пределу. Можно видеть совпадение фазовых скоростей мод в области неустойчивости и их различие в области устойчивости (см. рис. 5, б). Характерная зависимость от  $Re$  наблюдалась также для первой и второй азимутальной моды.

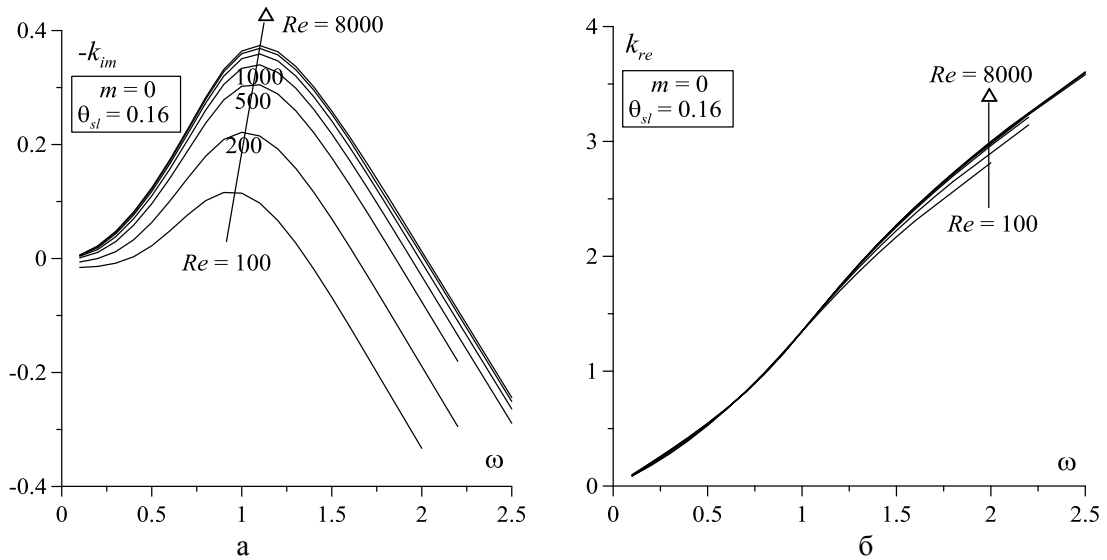


Рис. 5. Зависимость дисперсионных кривых пространственного анализа устойчивости прямооточной струи ((а) инкрементов пространственного роста и (б) аксиальных волновых чисел) для осесимметричной моды ( $m = 0$ ) от числа Рейнольдса при толщине сдвигового слоя  $\theta_{sl} = 0,16$

Fig. 5. The dependence of the dispersion curves of the spatial stability analysis of a round jet ((a) spatial growth increments and (b) axial wavenumbers) for the axisymmetric mode ( $m = 0$ ) on the Reynolds number for the shear layer thickness  $\theta_{sl} = 0.16$

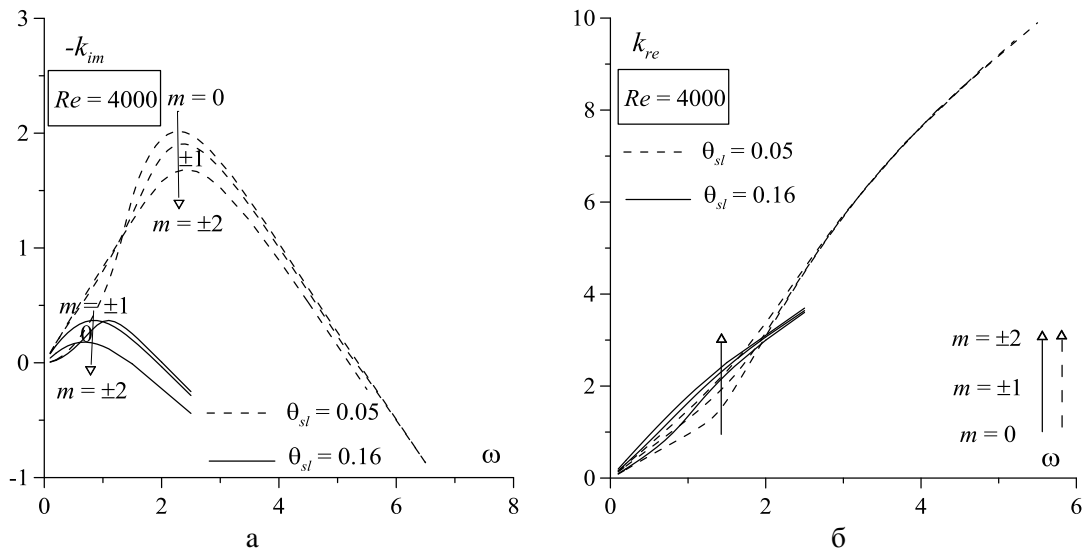


Рис. 6. Дисперсионные кривые пространственного анализа устойчивости прямооточной струи ((а) инкременты пространственного роста и (б) аксиальные волновые числа) при фиксированном числе  $Re = 4000$  и разных толщинах сдвигового слоя  $\theta_{sl} = 0,05$  и  $0,16$

Fig. 6. Dispersion curves of the spatial stability analysis of a round jet ((a) spatial growth increments and (b) axial wavenumbers) for a fixed number  $Re = 4000$  and different shear layer thicknesses  $\theta_{sl} = 0.05$  and  $0.16$

Как и в случае временного анализа устойчивости, было проанализировано поведение дисперсионных кривых при изменении толщины сдвигового слоя (рис. 6). Сравнивая рис. 3 и 6, можно видеть, что они хорошо соотносятся друг с другом. Пространственный анализ устойчивости также демонстрирует значительный рост неустойчивости всех мод при малых толщинах сдвигового слоя. При малых  $\theta_{sl}$  доминирует «варикозная» неустойчивость, но с увеличением толщины сдвигового слоя ее сменяет «флаговая». При увеличении толщины сдвигового слоя до  $\theta_{sl} = 0,3$  доминирующее влияние  $m = \pm 1$  над  $m = 0$  возрастает, а все моды с  $|m| > 1$  становятся устойчивыми. При такой толщине сдвигового слоя максимальные инкременты роста на порядок меньше, чем при  $\theta_{sl} = 0,05$ . Согласно пространственно-временному анализу устойчивости, результаты которого не представлены в данной работе, «варикозная» и «синусоидальная» моды имели конвективный характер неустойчивости для всех рассмотренных параметров профиля.

Результаты пространственного анализа устойчивости с учетом переменной плотности показывают, что аналогично результатам, полученным для временного анализа устойчивости, наблюдается уменьшение инкрементов пространственного роста ( $-k_{im}$ ) всех неустойчивых мод. При этом чем больше разница плотности в ядре струи и на периферии, определяемая параметром  $s$  аналитического профиля плотности, тем больший стабилизационный эффект имеет место.

В работе обнаружено хорошее совпадение собственных функций (амплитуд возмущений) с приведенными в работе [26], где был использован другой численный метод. В качестве наглядного примера на рис. 7–9 показаны изоповерхности радиальной компоненты  $\tilde{u}$  когерентных возмущений для первых трех азимутальных мод  $m = 0, \pm 1, \pm 2$ . Разный цвет соответствует значениям скорости противоположного знака. Собственные функции вычислены для максимумов дисперсионных кривых, приведенные на рис. 6. Пространственная форма возмущений была восстановлена на основе формулы (1) для нулевого момента времени. На левом и правом фрагментах каждого рисунка для сравнения показана пространственная форма мод при  $\theta_{sl} = 0,05$  и  $0,16$ . Сразу можно заметить существенно отличие аксиальных длин волн наиболее неустойчивых возмущений. Малая длина волны возмущений и большие показатели роста по пространству визуально делают практически неразличимыми моды при малых толщинах сдвигового слоя.

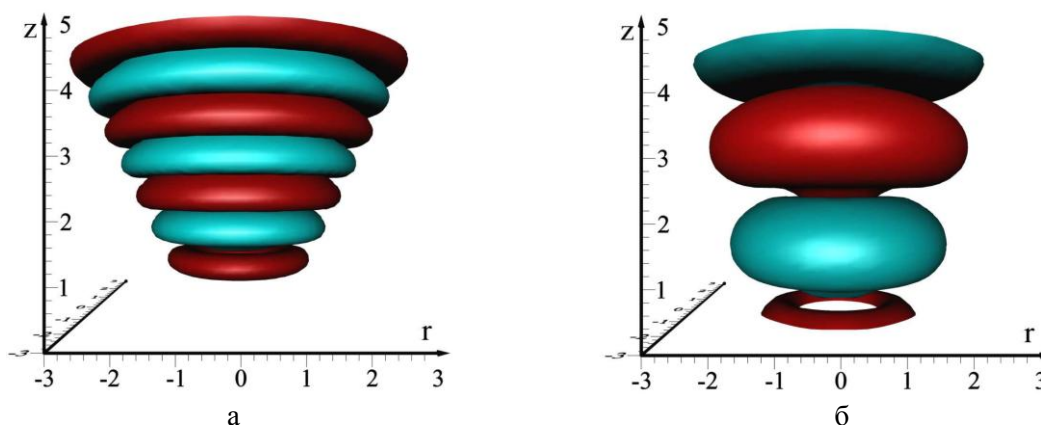


Рис. 7. Изоповерхности радиальной компоненты когерентных возмущений «варикозной» моды ( $m = 0$ ) при максимальном инкременте роста, полученные из пространственного анализа устойчивости прямоочной струи при (а)  $\theta_{sl} = 0,05$  ( $\omega = 2,3, k_{re} = 3,93, \tilde{u} = \pm 0,2$ ) и (б)  $\theta_{sl} = 0,16$  ( $\omega = 1,1, k_{re} = 1,54, \tilde{u} = \pm 0,1$ ). Цветом показаны значения разного знака

Fig. 7. Isosurfaces of the radial component of coherent perturbations of the “varicose” mode ( $m = 0$ ) at maximum growth increment, obtained from spatial stability analysis of a round jet at (a)  $\theta_{sl} = 0.05$  ( $\omega = 2.3, k_{re} = 3.93, \tilde{u} = \pm 0.2$ ) and (b)  $\theta_{sl} = 0.16$  ( $\omega = 1.1, k_{re} = 1.54, \tilde{u} = \pm 0.1$ ). Color shows the values of different signs

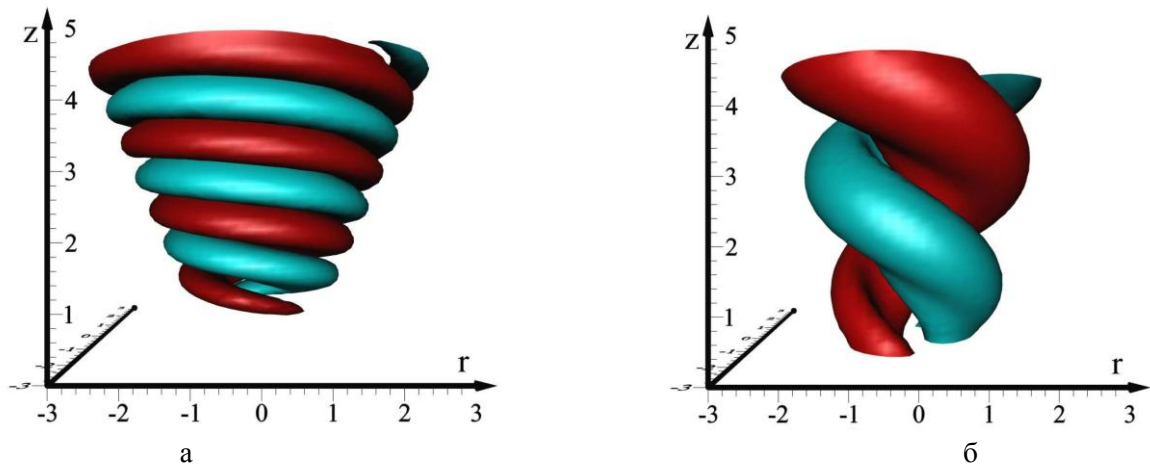


Рис. 8. Изоповерхности радиальной компоненты когерентных возмущений «синусоидальной» моды ( $m = \pm 1$ ) при максимальном инкременте роста, полученные из пространственного анализа устойчивости прямооточной струи при (а)  $\theta_{sl} = 0,05$  ( $\omega = 2,4$ ,  $k_{re} = 4,23$ ,  $\tilde{u} = \pm 0,2$ ) и (б)  $\theta_{sl} = 0,16$  ( $\omega = 0,8$ ,  $k_{re} = 1,30$ ,  $\tilde{u} = \pm 0,1$ ). Цветом показаны значения разного знака

Fig. 8. Isosurfaces of the radial component of coherent perturbations of the “sinusoidal” mode ( $m = \pm 1$ ) at maximum growth increment, obtained from the spatial stability analysis of a round jet at (a)  $\theta_{sl} = 0.05$  ( $\omega = 2.4$ ,  $k_{re} = 4.23$ ,  $\tilde{u} = \pm 0.2$ ) and (b)  $\theta_{sl} = 0.16$  ( $\omega = 0.8$ ,  $k_{re} = 1.30$ ,  $\tilde{u} = \pm 0.1$ ). Color shows the values of different signs

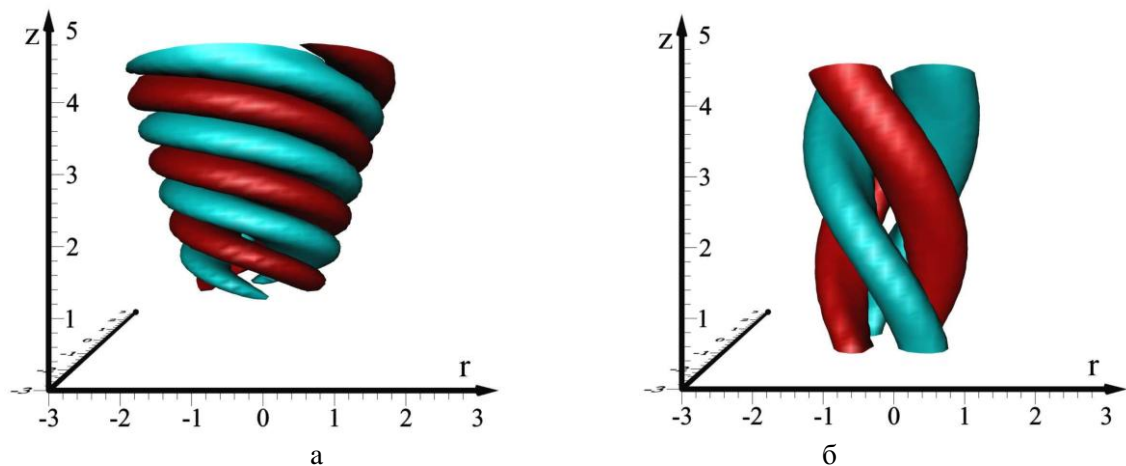


Рис. 9. Изоповерхности радиальной компоненты когерентных возмущений моды ( $m = \pm 2$ ) при максимальном инкременте роста, полученные из пространственного анализа устойчивости прямооточной струи при (а)  $\theta_{sl} = 0,05$  ( $\omega = 2,4$ ,  $k_{re} = 4,32$ ,  $\tilde{u} = \pm 0,2$ ) и (б)  $\theta_{sl} = 0,16$  ( $\omega = 0,7$ ,  $k_{re} = 1,28$ ,  $\tilde{u} = \pm 0,1$ )

Fig. 9. Isosurfaces of the radial component of coherent mode perturbations ( $m = \pm 2$ ) at the maximum growth increment, obtained from the spatial stability analysis of a round jet at (a)  $\theta_{sl} = 0.05$  ( $\omega = 2.4$ ,  $k_{re} = 4.32$ ,  $\tilde{u} = \pm 0.2$ ) and (b)  $\theta_{sl} = 0.16$  ( $\omega = 0.7$ ,  $k_{re} = 1.28$ ,  $\tilde{u} = \pm 0.1$ )

### Сравнение результатов временного и пространственного анализа устойчивости

Согласно работе [28], комплексные частоты и волновые числа, получаемые из временного (Temporal Stability, TS) и пространственного (Spatial Stability, SS) анализа устойчивости связаны между собой следующими соотношениями Гастера:

$$k_{re}(SS) \approx k_{re}(TS), \quad \omega_{re}(SS) \approx \omega_{re}(TS), \quad \frac{\omega_{im}(TS)}{-k_{im}(SS)} \approx \frac{\partial \omega_{re}}{\partial k_{re}}. \quad (11)$$

Для проверки соотношений (11) в данной работе было проведено сравнение фазовых и групповых скоростей азимутальных мод  $m = 0, \pm 1, \pm 2$  для трех значений толщин сдвигового слоя. В качестве наглядного примера на рис. 10 представлено сравнение лишь для осесимметричной моды ( $m = 0$ ). При малой величине  $\theta_{sl} = 0,05$  (рис. 10, а) заметно существенное различие фазовых скоростей, однако при  $\theta_{sl} = 0,3$  они совпадают с хорошей точностью. Аналогичная картина наблюдается и при сравнении групповых скоростей на рис. 10, в и г. Таким образом, соотношения (11) для прямоточной струи оказываются справедливыми лишь при больших толщинах сдвигового слоя.

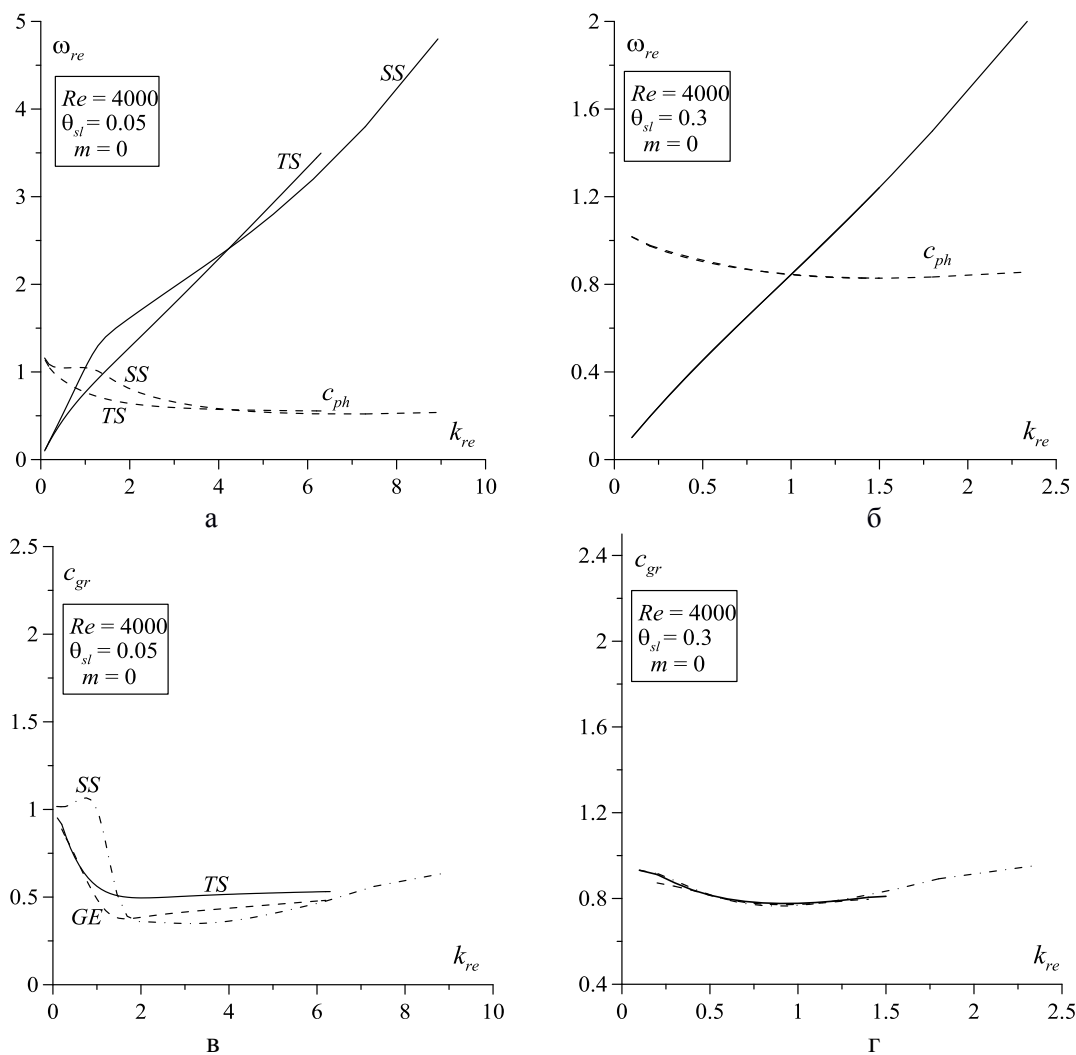


Рис. 10. Фазовые (а, б) и групповые (в, г) скорости для «варикозной» моды ( $m = 0$ ), полученные из временного (TS) и пространственного (SS) анализа устойчивости и соотношений Гастера (GE) (11) для прямоточной струи при малой ( $\theta_{sl} = 0,05$ ) и большой ( $\theta_{sl} = 0,16$ ) толщине сдвигового слоя

Fig. 10. Phase (a, b) and group (c, d) velocities for the “varicose” mode ( $m = 0$ ) obtained from the time (TS) and spatial (SS) stability analysis and Gaster (GE) relations (11) for a round jet at small ( $\theta_{sl} = 0.05$ ) and large ( $\theta_{sl} = 0.16$ ) shear layer thickness



### Заключение

Проведены исследования временной и пространственной устойчивости прямоочной ламинарной струи с тангенциальным профилем скорости, в том числе при вариации плотности в радиальном направлении. Проанализированы характерные частоты, волновые числа и собственные функции наиболее неустойчивых возмущений. Рассмотрен эффект влияния радиального градиента плотности на характеристики наиболее неустойчивых мод.

На основе временного анализа устойчивости показано, что при малых толщинах сдвигового слоя характерные для профилей течения у самой кромки сопла, где наблюдаются значительные градиенты осевой компоненты скорости в радиальном направлении, большое число гармоник неустойчивы с примерно равными и большими по величине инкрементами роста. Мода варикозной неустойчивости  $m = 0$  имеет наибольший инкремент роста. С ростом толщины сдвигового слоя, происходящим при удалении от кромки сопла, наблюдается существенное снижение инкрементов роста всех неустойчивых мод. На основе пространственного анализа устойчивости показано, что при малых толщинах сдвигового слоя также доминирует мода варикозной неустойчивости  $m = 0$ , но с увеличением толщины сдвигового слоя ее сменяет мода флаговой неустойчивости  $m = 1$ . Согласно пространственно-временному анализу устойчивости варикозная и синусоидальная моды имели характеристики конвективной неустойчивости для всех рассмотренных параметров профиля.

Было проанализировано влияние изменения плотности в радиальном направлении на дисперсионные кривые, полученные из временного анализа устойчивости. Результаты анализа устойчивости значительно зависели лишь от разницы значений функции плотности в ядре и на периферии струи, но не от формы соответствующего профиля.

В работе показано, что соотношения Гастера между фазовой и группой скоростью, рассчитанные из временного и пространственного анализа устойчивости для прямоочной струи, оказываются справедливыми лишь при больших толщинах сдвигового слоя.

В дальнейших работах будут представлены подробные результаты пространственно-временного анализа устойчивости с учетом эффектов переменной вязкости и плотности для данных экспериментального исследования турбулентных струй, в том числе с закруткой потока.

### Список литературы

1. **Michalke A.** On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer. *J. Fluid Mech.*, 1965, vol. 23 (3), p. 521–544.
2. **Michalke A., Fuchs H. V.** On turbulence and noise of an axisymmetric shear flow. *J. Fluid Mech.*, 1975, vol. 70 (1), p. 179–205.
3. **Мулляджанов Р. И., Сандберг Р. Д., Абдуракипов С. С., Джордж В. К., Ханъялич К.** О спиральных структурах в круглой турбулентной струе // Сибирский физический журнал. 2017. Т. 12, № 4. С. 40–50.
4. **Mullyadzhyanov R. I., Sandberg R. D., Abdurakipov S. S., George W. K., Hanjalić K.** Propagating helical waves as a building block of round turbulent jets. *Phys. Rev. Fluids*, 2018, vol. 3 (6), p. 062601.
5. **Cohen J., Wygnanski I.** The evolution of instabilities in the axisymmetric jet. Part 1. The linear growth of disturbances near the nozzle. *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 176, p. 191–219.
6. **Гиневский А. С., Власов Е. В., Каравосов Р. К.** Акустическое управление турбулентным струями. М.: Физматлит, 2001.
7. **Becker H. A., Massaro T. A.** Vortex evolution in a round jet. *J. Fluid Mech.*, 1968, vol. 31, p. 435–448.



8. **Crow S. C., Champagne F. H.** Orderly structure in jet turbulence. *J. Fluid Mech.*, 1971, vol. 48, p. 547–591.
9. **Kim J., Choi H.** Large eddy simulation of circular jet: effect of inflow conditions on the near fel. *J. Fluid Mech.*, 2009, vol. 620, p. 381–411.
10. **Бильский А. В.** Гидродинамическая структура осесимметричной импактной струи: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2006.
11. **Litvinenko M., Kozlov V., Kozlov G., Grek G.** Effect of streamwise streaky structures on turbulization of a circular jet. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2004, vol. 45, no. 3, p. 349–357.
12. **Грек Г. Р., Козлов В. В., Литвиненко Ю. А.** Устойчивость дозвуковых струйных течений. Новосибирск, 2012.
13. **Абдуракипов С. С., Дулин В. М., Токарев М. П., Маркович Д. М.** Анализ когерентных структур в осесимметричной и шевронной струях // Сибирский физический журнал. 2018. Т. 13, № 4. С. 46–59.
14. **Mullyadzhyanov R., Abdurakipov S., Hanjalić K.** On coherent structures and mixing characteristics in the near field of a rotating-pipe jet. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2017, vol. 63, p. 139–148.
15. **Khorrami M. R., Malik M. R., Ash R. L.** Application of spectral collocation techniques to the stability of swirling flows. *J. Comp Phys.*, 1989, vol. 81, p. 206–229.
16. **Cotrell D. L., Pearlstein A. J.** Linear stability of spiral and annular Poiseuille flow for small radius ratio. *J. Fluid Mech.*, 2006, vol. 547, p. 1–20.
17. **Olendraru C., Sellier A.** Viscous effects in the absolute-convective instability of the Batchelor vortex. *J. Fluid Mech.*, 2002, vol. 459, p. 371–396.
18. **Parras L., Fernandez-Feria R.** Spatial stability and the onset of absolute instability of Batchelor's vortex for high swirl numbers. *J. Fluid Mech.*, 2007, vol. 583, p. 27–43.
19. **Michalke A.** Absolute inviscid instability of a ring jet with back-flow and swirl. *European Journal Mechanics B: Fluids*, 1999, vol. 18 (1), p. 3–12.
20. **Oberleithner K., Sieber M., Nayeri C. N. et al.** Three-dimensional coherent structures in a swirling jet undergoing vortex breakdown: stability analysis and empirical mode construction. *J. Fluid Mech.*, 2011, vol. 679, p. 383–414.
21. **Boyd J. P.** Chebyshev and Fourier Spectral Methods. 2<sup>nd</sup> ed. New York, DOVER Publ., 2000.
22. **Trefethen L. N.** Spectral methods in MATLAB. Philadelphia, SIAM, 2000.
23. **Lessen M., Paillet M.** The evolution of instabilities in the axisymmetric jet. Part 1. The linear growth of disturbances near the nozzle. *J. Fluid Mech.*, 1974, vol. 65 (4), p. 769–779.
24. **Abdurakipov S. S., Dulin V. M., Markovich D. M.** Self-oscillations in a jet flow and gaseous flame with strong swirl. *Thermophysics and Aeromechanics*, 2018, vol. 25 (3), p. 379–386.
25. **Khorrami M. R.** A Chebyshev spectral collocation method using a staggered grid for the stability of cylindrical flows. *Int. J. Num. Methods in Fluids*, 1991, vol. 12, p. 825–833.
26. **Morris P.** The spatial viscous instability of axisymmetric jet. *J. Fluid Mech.*, 1976, vol. 77 (3), p. 511–529.
27. **Michalke A.** Survey on jet instability theory. *Prog. Aerospace Sci.*, 1984, vol. 21, p. 159–199.
28. **Gaster M.** A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability. *J. Fluid Mech.*, 1962, vol. 14 (2), p. 222–224.

## References

1. **Michalke A.** On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer. *J. Fluid Mech.*, 1965, vol. 23 (3), p. 521–544.
2. **Michalke A., Fuchs H. V.** On turbulence and noise of an axisymmetric shear flow. *J. Fluid Mech.*, 1975, vol. 70 (1), p. 179–205.

3. **Mulladzhyanov R. I., Sandberg R. D., Abdurakipov S. S., George V. K., Khanialich K.** On spiral structures in a round turbulent jet. *Siberian Journal of Physics*, 2017, vol. 12, no. 4, p. 40–50. (in Russ.)
4. **Mullyadzhyanov R. I., Sandberg R. D., Abdurakipov S. S., George W. K., Hanjalić K.** Propagating helical waves as a building block of round turbulent jets. *Phys. Rev. Fluids*, 2018, vol. 3 (6), p. 062601.
5. **Cohen J., Wygnanski I.** The evolution of instabilities in the axisymmetric jet. Part 1. The linear growth of disturbances near the nozzle. *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 176, p. 191–219.
6. **Ginevsky A. S., Vlasov E. V., Karavosov R. K.** Acoustic control of turbulent jets. Moscow, Fizmatlit, 2001. (in Russ.)
7. **Becker H. A., Massaro T. A.** Vortex evolution in a round jet. *J. Fluid Mech.*, 1968, vol. 31, p. 435–448.
8. **Crow S. C., Champagne F. H.** Orderly structure in jet turbulence. *J. Fluid Mech.*, 1971, vol. 48, p. 547–591.
9. **Kim J., Choi H.** Large eddy simulation of circular jet: effect of inflow conditions on the near fel. *J. Fluid Mech.*, 2009, vol. 620, p. 381–411.
10. **Bilsky A. V.** Hydrodynamic structure of an axisymmetric impinging jet: PhD thesis. Novosibirsk, 2006. (in Russ.)
11. **Litvinenko M., Kozlov V., Kozlov G., Grek G.** Effect of streamwise streaky structures on turbulization of a circular jet. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2004, vol. 45, no. 3, p. 349–357.
12. **Grek G. R., Kozlov V. V., Litvinenko Yu. A.** Stability of subsonic jet flows. Novosibirsk, 2012. (in Russ.)
13. **Abdurakipov S. S., Dulin V. M., Tokarev M. P., Markovich D. M.** Analysis of coherent structures in axisymmetric and chevron jets. *Siberian Journal of Physics*, 2018, vol. 13, no. 4. p. 46–59. (in Russ.)
14. **Mullyadzhyanov R., Abdurakipov S., Hanjalić K.** On coherent structures and mixing characteristics in the near field of a rotating-pipe jet. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2017, vol. 63, p. 139–148.
15. **Khorrami M. R., Malik M. R., Ash R. L.** Application of spectral collocation techniques to the stability of swirling flows. *J. Comp Phys.*, 1989, vol. 81, p. 206–229.
16. **Cotrell D. L., Pearlstein A. J.** Linear stability of spiral and annular Poiseuille flow for small radius ratio. *J. Fluid Mech.*, 2006, vol. 547, p. 1–20.
17. **Olendraru C., Sellier A.** Viscous effects in the absolute-convective instability of the Batchelor vortex. *J. Fluid Mech.*, 2002, vol. 459, p. 371–396.
18. **Parras L., Fernandez-Feria R.** Spatial stability and the onset of absolute instability of Batchelor's vortex for high swirl numbers. *J. Fluid Mech.*, 2007, vol. 583, p. 27–43.
19. **Michalke A.** Absolute inviscid instability of a ring jet with back-flow and swirl. *European Journal Mechanics B: Fluids*, 1999, vol. 18 (1), p. 3–12.
20. **Oberleithner K., Sieber M., Nayeri C. N. et al.** Three-dimensional coherent structures in a swirling jet undergoing vortex breakdown: stability analysis and empirical mode construction. *J. Fluid Mech.*, 2011, vol. 679, p. 383–414.
21. **Boyd J. P.** Chebyshev and Fourier Spectral Methods. 2<sup>nd</sup> ed. New York, DOVER Publ., 2000.
22. **Trefethen L. N.** Spectral methods in MATLAB. Philadelphia, SIAM, 2000.
23. **Lessen M., Paillet M.** The evolution of instabilities in the axisymmetric jet. Part 1. The linear growth of disturbances near the nozzle. *J. Fluid Mech.*, 1974, vol. 65 (4), p. 769–779.
24. **Abdurakipov S. S., Dulin V. M., Markovich D. M.** Self-oscillations in a jet flow and gaseous flame with strong swirl. *Thermophysics and Aeromechanics*, 2018, vol. 25 (3), p. 379–386.
25. **Khorrami M. R.** A Chebyshev spectral collocation method using a staggered grid for the stability of cylindrical flows. *Int. J. Num. Methods in Fluids*, 1991, vol. 12, p. 825–833.
26. **Morris P.** The spatial viscous instability of axisymmetric jet. *J. Fluid Mech.*, 1976, vol. 77 (3), p. 511–529.

27. **Michalke A.** Survey on jet instability theory. *Prog. Aerospace Sci.*, 1984, vol. 21, p. 159–199.
28. **Gaster M.** A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability. *J. Fluid Mech.*, 1962, vol. 14 (2), p. 222–224.

Материал поступил в редколлегию  
Received  
16.01.2020

### Сведения об авторах / Information about the Authors

**Абдуракипов Сергей Сергеевич**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН (Новосибирск, Россия)

**Sergey S. Abdurakipov**, PhD in Physics and Mathematics, Researcher, S. S. Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS (Novosibirsk, Russian Federation)

s.s.abdurakipov@gmail.com

**Дулин Владимир Михайлович**, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН (Новосибирск, Россия)

**Vladimir M. Dulin**, Doctor of Science (Physics and Mathematics), Head of Laboratory, S. S. Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS (Novosibirsk, Russian Federation)

vmd@itp.nsc.ru